

弛豫媒质中有限束超声波的非线性传播畸变理论*

杜 功 焕

(南京大学声学研究所)

1988年4月6日收到

文中提出弛豫媒质中有限束非线性声波方程,并采用微扰法求得由非线性传播畸变产生的高次谐波的一般解。研究表明,对高斯型声波,其谐波畸变可以解析给出,而且其径向分布始终维持高斯函数。虽然其频散量大小会影响各次谐波的振幅,但其相速的变化却仍与对应频率的小振幅波相同。文中还用 Blackstock 算子将所得的结果应用于任何吸收-频散媒质,包括只能从经验得到其吸收与频率关系的一些生物媒质。

一、引 言

有限束超声波非线性传播畸变的研究不仅具有理论意义,而且也具有实用价值。因为实际应用的超声场总是由有限大小的辐射源产生的,所以衍射效应必须予以考虑。近年来, Aanonsen 等人^[1]曾用数值方法研究了有限束近声场的谐波畸变。作者与 Breazeale^[2]曾给出高斯型声束的非线性谐波畸变的解析表达式,并对二次谐波的畸变规律作了测量。Hamilton 等人^[3]也曾利用高斯型声束对非线性参量阵作了理论计算。本文试图从更普遍的情况,即对存在弛豫吸收机构的媒质,给出非线性有限束声波的谐波畸变解。如果利用 Blackstock 的算子^[4]以及 Kramers-Kronig 的超声吸收与频散量的关系^[5],则可将所得的解推广到任何吸收-频散的媒质。在不少化学反应的媒质中存在着各种各样的弛豫吸收机构,而像高聚化合物以及许多生物媒质也是吸收与频散兼而有之的。本文以高斯型声束作为研究对象。这不仅是因为高斯型声场具有一些独特优点(在近场区无极大与极小的干涉现象;而在远场区不产生旁瓣辐射),已日益引起人们重视,并且据 Wen 与 Breazeale^[6]的最近研究表明,高斯型声场可以作为一种基本场的形式,而各种各样的声场,包括活塞型声场都可以看作不同参数的高斯型声场的叠加。因此求解高斯型声场也可以看作一般有限束声场的一种基础研究。

二、弛豫媒质中有限束非线性声波一般解

作者在考虑了频散效应,即引入推迟时间变量 $g = \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$ 而不是

* 国家自然科学基金资助的课题。

$$g_0 = \omega \left(t - \frac{z}{c_0} \right)$$

后,曾对 Polykova 等人^[7]提出的弛豫媒质中一维 Burgers' 方程作了修正并表示为^[8]

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma'} + (\Delta_e c_0 / \beta u_0) \frac{\partial U}{\partial g} - U \frac{\partial U}{\partial g} = G' \frac{\partial^2 U}{\partial g^2} + J(U), \quad (1)$$

式中

$$J(U) = \sum_{i=1}^k A_i \frac{\partial}{\partial g} \int_{-\infty}^g \frac{\partial U}{\partial g'} \exp[-(g - g')/\omega \tau_i] dg',$$

式中 $U = u/u_0$, u 为媒质质点速度, u_0 为它的参考值. $\sigma' = (\beta \omega u_0 / c_0^2) z$, β 为媒质的非线性参数, z 为轴向的传播距离. $G' = b\omega / \rho_0 c_0 \beta u_0$, 其中 $b = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \eta' + \frac{(\gamma - 1)}{Pr} \right)$, η' 为媒质的切变粘滞系数, Pr 为 Prandtl 数, γ 为比热比. $c = c_0(1 + \Delta_e)$, 这里 Δ_e 是由于弛豫效应引起的相速变化, 称为频散量. A_i 与 τ_i 分别代表与第 i 个独立弛豫机构相对应的内参数及其弛豫时间.

Aanonsen 等人^[9]曾在 Kuznetsov^[9] 方程基础上提出描述窄行波束的无量纲非线性声波方程如下:

$$\left(4 \frac{\partial^2}{\partial g_0 \partial \sigma} - \nabla_{\perp}^2 - 4\alpha_e r_0 \frac{\partial^3}{\partial g^3} \right) \bar{p} = D_0 \frac{\partial^2}{\partial g^2} \bar{p}^2. \quad (2)$$

这里 α_e 代表媒质的小振幅波经典吸收系数, 一般应表示成 $\alpha_e = b\omega^2 / \rho_0 c_0^3$. 上式中, $\bar{p} = p / (\rho_0 c_0 u_0)$, p , ρ_0 为声压与媒质的密度. $\sigma = z/r_0$, $D_0 = 2r_0/l_D$, 而 $r_0 = a^2\omega/2c_0$, $l_D = c_0/\omega\beta M$. 这里 a 为所谓特性宽度的参考值, $M = u_0/c_0$ 为声马赫数. $\nabla_{\perp}^2$ 为无量纲形式表示的横向 Laplace 算子. 在圆对称情况下有 $\nabla_{\perp}^2 = (1/\xi)[\partial/\partial\xi(\xi\partial/\partial\xi)]$, 而 $\xi = \rho/a$, ρ 为一径向坐标. 方程(2)是在抛物线近似下得出的, 一般适用于高频窄声束的情况. 在抛物线近似下声压与质点速度的线性关系可采用平面波近似 $p = \rho_0 c_0 u$.

比较(1)和(2)式, 就可以归纳而求得如下的二维非线性行波方程:

$$\left(4 \frac{\partial^2}{\partial g \partial \sigma} - \nabla_{\perp}^2 + 4\Delta_e k_0 r_0 \frac{\partial^2}{\partial g^2} - 4\alpha_e r_0 \frac{\partial^3}{\partial g^3} \right) \bar{p} - J'(\bar{p}) = D_0 \frac{\partial^2}{\partial g^2} \bar{p}^2, \quad (3)$$

式中

$$J'(\bar{p}) = \sum_{i=1}^k A'_i \frac{\partial^2}{\partial g^2} \int_{-\infty}^g \frac{\partial \bar{p}}{\partial g'} \exp[-(g - g')/\omega \tau_i] dg',$$

而

$$A'_i = 4k_0 r_0 A_i.$$

方程(3)同时考虑经典吸收与弛豫吸收-频散效应. 对于这类的非线性声波方程, 迄今较为有效的求解方法还是借助于微扰法.

设其解为

$$\bar{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_n, \quad (4)$$

式中 $\bar{p}_n$ 代表第 n 级近似解. 将(4)式代入(3)式便可得代表各近似级或与各次谐波相对

应的方程如下:

$$\left(4 \frac{\partial^2}{\partial g \partial \sigma} - \nabla_{\perp}^2 + 4 \Delta_c k r_0 \frac{\partial^2}{\partial g^2} - 4 \alpha_c r_0 \frac{\partial^2}{\partial g^3}\right) \bar{p}_n - J'(\bar{p}_n) = \bar{g}_n, \quad (5)$$

式中

$$\bar{g}_n = \frac{1}{2} D_0 \frac{\partial^2}{\partial g^2} \begin{cases} 0 & n=1; \\ \bar{p}_1 \bar{p}_1 & n=2; \\ 2 \bar{p}_1 \bar{p}_2 & n=3; \\ \bar{p}_2 \bar{p}_2 + 2 \bar{p}_3 \bar{p}_1 & n=4; \\ \dots & \end{cases} \quad (6)$$

现取解为如下形式:

$$\bar{p}_n = \hat{p}_n(\xi, \sigma) \exp(-i n g). \quad (7)$$

将(7)式代入(5)式并计及(6)式, 可得一组表示逐次近似的方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{i}{4n} \nabla_{\perp}^2 - \Delta_c n k_0 r_0 i + n^2 \alpha_c r_0\right) \hat{p}_n + J''(\hat{p}_n) = \frac{i}{4n} D_n \quad (8)$$

式中

$$D_n(\xi, \sigma) = -\frac{n^2}{2} D_0 \begin{cases} 0 & n=1; \\ \hat{p}_1 \hat{p}_1 & n=2; \\ 2 \hat{p}_1 \hat{p}_2 & n=3; \\ \hat{p}_2 \hat{p}_2 + 2 \hat{p}_3 \hat{p}_1 & n=4; \\ \dots & \end{cases} \quad (9)$$

以及

$$J''(\hat{p}_n) = \chi_n \hat{p}_n(\xi, \sigma), \quad (10)$$

而

$$\chi_n = \alpha_{cn} r_0 + n k_0 \Delta_{cn} r_0 i. \quad (11)$$

这里 $\alpha_{cn} = \sum_{j=1}^k \frac{A_j}{c_0} n^2 \omega^2 \tau_j / (1 + n^2 \omega^2 \tau_j^2)$ 和 $\Delta_{cn} = \sum_{j=1}^m A_j \frac{n^2 \omega^2 \tau_j^2}{1 + n^2 \omega^2 \tau_j^2}$ 分别代表与 $n\omega$ 角频率对应的小振幅波的弛豫吸收系数和频散量。(8)式还可改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{i}{4n} \nabla_{\perp}^2 + h_n\right) \hat{p}_n = \frac{i}{4n} D_n, \quad (12)$$

式中

$$h_n = h_n^{(1)} + i h_n^{(2)}, \quad (13)$$

而

$$h_n^{(1)} = (\alpha_{cn} + \alpha_{rn}) r_0, \quad h_n^{(2)} = n k_0 r_0 (\Delta_{cn} - \Delta_{c1}). \quad (14)$$

(13)式中与 $n=1$ 对应的是齐次微分方程, 而与 $n \geq 2$ 对应的是非齐次方程。对这两类方程分别对变量 ξ 使用 Hankel 变换, 并对 $n=1$ 利用 $u(\xi, 0) = u_0(\xi) e^{-i \omega t}$ 以及对 $n \geq 2$ 利用 $\bar{p}_n(\xi, 0) = 0$ 的边界条件, 求解对变量 σ 的线性方程, 便可分别求得它们的解为

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(\xi, \sigma) = & \frac{2}{i\sigma} \exp[-(\alpha_s + \alpha_n)r_0\sigma] \int_0^\infty q(\xi') J_0\left(2 \frac{\xi\xi'}{\sigma}\right) \\ & \cdot \exp\left(i \frac{\xi^2 + \xi'^2}{\sigma}\right) \xi' d\xi' \end{aligned} \quad (15)$$

和

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{s>2}(\xi, \sigma) = & \exp(-h_s\sigma) \int_0^\sigma \frac{\exp(h_s\sigma')}{(\sigma - \sigma')} \\ & \cdot d\sigma' \int_0^\infty -\frac{D_s i}{4n} \exp\left(2i \frac{\xi^2 + \xi'^2}{\sigma - \sigma'}\right) J_0\left(4 \frac{\xi\xi'}{\sigma - \sigma'}\right) \xi' d\xi'. \end{aligned} \quad (16)$$

三、高斯型声场的解

假定声源表面振动的径向分布遵循高斯函数,即取 $u_0(\xi) = u_0 \exp(-B\xi^2)$, 则(15)和(16)式便可分别积出并可表示成

$$\begin{aligned} \tilde{p}_s(\xi, \sigma, g_s) = & \operatorname{Re}\{D_0^{s-1/2} i \exp(-h_s^{(1)}\sigma) \\ & \cdot \exp[-nA\xi^2(1 - iB\sigma)] f_s(\sigma) \exp(-ig_s)\}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $A = B/(1 + B^2\sigma^2)$, $g_s = n\omega\left(i - \frac{z}{c_s}\right)$,

$$c_s = c_0(1 + \Delta_{cs}),$$

而

$$\begin{aligned} f_1(\sigma) = & (A/B)^{1/2} \exp[-itan^{-1}(B\sigma)], \\ f_2(\sigma) = & (A/B)^{1/2} [H_2^2(\sigma) + F_2^2(\sigma)]^{1/2} \exp[-itan^{-1}(B\sigma) \\ & - itan^{-1}(F_2(\sigma)/H_2(\sigma))], \\ f_3(\sigma) = & [3(A/B)^{1/2}/16] [H_3^2(\sigma) + F_3^2(\sigma)]^{1/2} \\ & \cdot \exp[-itan^{-1}(B\sigma) - itan^{-1}(F_3(\sigma)/H_3(\sigma))], \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} H_2(\sigma) = & \int_0^\sigma \frac{\exp[(h_2^{(1)} - 2h_1^{(1)})\sigma']}{(1 + B^2\sigma'^2)^{1/2}} \cos[\tan^{-1}(B\sigma') + h_2^{(2)}\sigma'] d\sigma', \\ F_2(\sigma) = & \int_0^\sigma \frac{\exp[(h_2^{(1)} - 2h_1^{(1)})\sigma']}{(1 + B^2\sigma'^2)^{1/2}} \sin[\tan^{-1}(B\sigma') + h_2^{(2)}\sigma'] d\sigma', \\ H_3(\sigma) = & \int_0^\sigma \frac{\exp[(h_3^{(1)} - h_2^{(1)} - h_1^{(1)})\sigma'] (H_2^2(\sigma') + F_2^2(\sigma'))^{1/2}}{(1 + B^2\sigma'^2)^{1/2}} \\ & \cdot \cos[\tan^{-1}(B\sigma') + \tan^{-1}(F_2(\sigma')/H_2(\sigma')) \\ & + (h_3^{(2)} - h_2^{(2)})\sigma'] d\sigma', \\ F_3(\sigma) = & \int_0^\sigma \frac{\exp[(h_3^{(1)} - h_2^{(1)} - h_1^{(1)})\sigma'] (H_2^2(\sigma') + F_2^2(\sigma'))^{1/2}}{(1 + B^2\sigma'^2)^{1/2}} \\ & \cdot \sin[\tan^{-1}(B\sigma') + \tan^{-1}(F_2(\sigma')/H_2(\sigma')) \\ & + (h_3^{(2)} - h_2^{(2)})\sigma'] d\sigma'. \end{aligned}$$

取类似的步骤可以得出更高次的谐波表示式。虽然对于传播距离 σ 的函数关系会表

现得愈来愈复杂,但是可以预期沿径向坐标将始终遵循高斯函数,而且与第 n 次谐波对应的高斯系数正好是基频的 n 倍。从(17)式还可得出一重要结论,由非线性畸变产生的各次谐波的相速变化与相应频率的小振幅波完全一样,尽管各次谐波的频散量将会对其相应的谐波幅度产生影响。

四、对任何吸收-频散媒质的推广

以上公式是在弛豫媒质中求解的。Blackstock^[4] 曾引入一个算子 $L(p)$ 来代表吸收和频散效应。将这算子代替(8)式中的 $J''(\tilde{p}_n)$, 就可类似地得到 $L[\exp(-ing)\tilde{p}_n(\xi, \sigma)] = \chi_n \exp(-ing)\tilde{p}_n(\xi, \sigma)$ 。对于上述的弛豫机构,这里的 χ_n 就是(11)式。Blackstock 算子可应用于任何吸收-频散媒质,因而这里的 χ_n 就可代表任何吸收系数及与此机构对应的频散量。O'Donnell 等人^[5]曾指出,可用 Kramers-Kronig 关系来联系吸收系数与频散量,它们可表示成

$$\alpha(\omega) = \frac{\pi\omega^2}{2c_0^3} \frac{dc(\omega)}{d\omega}; \quad \Delta_c(\omega) = \frac{2c_0}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2} d\omega',$$

这里 ω_0 为某一参考值,而 c_0 是当 ω_0 时的声速。因此只要知道某种流体的吸收系数随频率的关系,尽管这种关系可以由经验确定的,就可由上式确定其对应的频散量。例如对于不少生物媒质可以由经验确定其吸收系数近似为 $\alpha_n = A_0 n \omega$, 这里 A_0 为一常数,而其对应的频散量就可确定为 $\Delta_{cn} = \frac{2}{\pi} c_0 A_0 \ln\left(\frac{n\omega}{\omega_0}\right)$ 。

五、对一般有限声束的推广

据 Wen 等人研究表明^[6],高斯函数可以作为有限束声场的一基本解,任何分布的声场可以用一系列高斯函数的叠加来近似。设平面源的经向分布可用一系列高斯函数来近

似表示,即 $u_0(\xi) = \sum_{m=1}^M A_m \exp(-B_m \xi^2)$ 。这里 A_m, B_m 为一些复常数。对于边缘效应

很强的活塞型振动分布,取 $M = 10$ 就可达到足够的近似。对于一些边缘效应比较弱的声源,则高斯函数数目还可取得更少。从方程(8)式可知,与二次谐波对应的方程,其非齐次项可以表示成一系列基频成份高斯函数乘积的叠加,而这些逐个的乘积项仍然是对坐标 ξ 的高斯函数。因此就可用有限项高斯型声场解的代数和来近似描述活塞型声场的非线性畸变。这方面的详细讨论将于另文进行。

[1] S. I. Aanonsen, T. Barkve, J. N. Tjøtta and S. J. Tjøtta, *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(1984), 749.

[2] Gonghuan Du and M. A. Breazeale, *J. Acoust. Soc. Am.*, 80(1986), 212.

[3] M. F. Hamilton and F. H. Fenlon, *J. Acoust. Soc. Am.*, 76(1984), 1474.

[4] D. T. Blackstock, *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(1985), 2050.

[5] M. O'Donnell, E. T. Jaynes and J. G. Miller, *J. Acoust. Soc. Am.*, 69(1981), 696.

- [6] J. J. Wen and M. A. Breazeale, IEEE, (1987), Ultrasonics symposium, Denver, C-4, *J. Aconst. Soc. Am.*, 83(1988), 1752.
- [7] A. L. Polyakova, S. I. Soluyan and R. V. Khokhlov, *Sov. Phys. Acoust.*, 8(1962), 78.
- [8] Gonghuan Du, *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(1985), 924.
- [9] V. P. Kuznetsov, *Sov. Phys. Acoust.*, 16(1971), 467.

NONLINEAR THEORY OF DISTORTION OF BOUNDED ULTRASONIC BEAM IN RELAXATING MEDIA

DU GONG-HUAN

(Institute of Aconstics, Nanjing University)

ABSTRACT

In this article, a nonlinear wave equation of bounded acoustic beam in relaxating media is presented and a general solution of higher harmonics resulting from the nonlinear distortion of propagation is found by using the pertubation approach. Investigation shows that for the Gaussian ultrasonic field, the solution of higher harmonics can be given analytically, moreover their corresponding radical distributions of amplitude always maintain the Gaussian profiles. Although the dispersion may affect the amplitude of various harmonics, the variation of phase velocity of those keep the same law as the small amplitude waves of corresponding frequencies do.

We also show that by means of Blackstock' operator the obtained results can be applied to the case of media with arbitrary dissipation and dispersion, including some biomedica in which the relationship between the absorption and frequency may be obtained only empirically.