

# 几何尺寸对圆对称环域 Josephson 结的 准通量子激发的影响

徐 昆 明      沈 亚 菲  
(浙江大学物理系)      (东南大学计算科学与工程系)

姚 希 贤  
(南京大学物理系)

1988年9月5日收到

本文研究几何尺寸对圆对称环域 Josephson 结的扰动 SGE 的环形准孤子波解的影响。数值计算结果表明,当圆对称环域结的内半径  $r_0 = 7.5\lambda_J$  时,已出现对应于环域结准通量子激发的环形准孤子波解,同时在  $I-V$  特性曲线上出现第一零场台阶。零场台阶的范围剧烈地依赖于环域结的内半径  $r_0$  和结宽度 ( $a r_0 - r_0$ ); 然而几何尺寸对环形准孤子波解特性的影响则比较复杂。

## 一、引 言

近来,人们对旋转对称的 Sine-Gordon 方程(简称 SGE)发生浓厚的兴趣。许多研究表明<sup>[1-3]</sup>,二维圆域和三维球域的 SGE 存在着类孤子波解。这些环形的和球形的类孤子波在向中心处收缩时,发生能量的弥散以及随之而引起的陷塌。同时还发现前者的寿命比后者的大几个数量级,因此有人企图用它来研究大面积的 Josephson 结<sup>[4,5]</sup>。作者等人<sup>[6,7]</sup>研究了圆对称 Josephson 结。在有耗损存在的情况下,结的行为由附加一准粒子电流项的扰动 SGE 来描述,并获得与上述文献大致类同的结果。Christiansen 等人<sup>[8]</sup>提出不均匀分布的 Josephson 电流密度的模型以摆脱上述困境。它可使正在向内收缩的环形准孤子波在远离中心轴处(更确切地说,在 Josephson 电流密度的峰值处)产生反射,从而获得稳定的环形准孤子波解。并利用有耗散存在的大面积 Josephson 结中这种环形准孤子波的振荡,设计出兆赫波段的可调振荡器。但是人们对该模型客观存在的可能性提出疑问。诚然,在静态下象一维结那样存在着一个不均匀分布的最大 Josephson 电流密度,但其峰值在靠近结的边缘处<sup>[6]</sup>;再者,在静态情况下的分布不能就认为也可能存在于有耗散存在的动态情况中,况且在我们的结果中也没有表明有这种可能性的任何迹象<sup>[7]</sup>。本文作者<sup>[9]</sup>采用圆对称环域结的几何位形来消除这种在中心轴附近的陷塌。设环域结的内外半径分别为  $r_0 = 50\lambda_J$  和  $55\lambda_J$ ,用数值计算法研究在此几何条件下,无外磁场存在时的扰动 SGE。结果表明,这时有相应于准通量子激发的稳定环形准孤子波解存在,并出现与此相关的第一零场台阶。但是,这种几何尺寸的圆对称环域结多少还残留着一维 inline 结痕迹的疑惑。因此,进一步研究下面一些问题就显得十分重要:首先,当

环域结的内半径减少到几个  $\lambda_J$  值时,是否还能出现这种环形准孤子波解,也就是说,要研究圆域结中心轴附近因能量弥散而陷塌的有效面积;其次,讨论增加结的宽度时,这种环形准孤子波解将会发生何种变化;最后,讨论结的几何尺寸对第一零场合阶产生什么影响。

圆对称环域 Josephson 结的形状如图 1 所示。若把环域结等分成厚度为  $0.05\lambda_J$  的若干个同轴薄壳圆筒,并采用文献[7]的分路模型,则在无外磁场条件下,受到恒流源  $I$  驱动时,每个薄壳圆筒的电动力学行为由无量纲的扰动 SGE<sup>[7]</sup>

$$\varphi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \varphi_{\rho} - \varphi_{\tau\tau} = \sin \varphi + \alpha \varphi_{\tau} \quad (1)$$

来描述,式中  $\varphi$  为结两侧超导体序参数的位相差,其它参数如  $\rho$ ,  $\tau$ ,  $\alpha$  和  $\lambda_J$  等的定义与文献[7]同。

下面的边界条件<sup>[7,10]</sup>:

$$\varphi_{\rho}|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad (2a)$$

$$\varphi_{\rho}|_{\rho=a\rho_0} = I/2\pi a\rho_0 \quad (2b)$$

必须被方程(1)所满足,式中  $\rho_0$  和  $a\rho_0$  分别为已归一化的环域结的内外半径。

在给定的驱动电流  $I$  下,结中自场分布和总电流密度分布由下列关系给出:

$$H(\rho, \tau) = \varphi_{\rho}(\rho, \tau), \quad (3a)$$

$$\nabla^2 \varphi(\rho, \tau) = \varphi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \varphi_{\rho}. \quad (3b)$$

在计算不同几何尺寸的圆对称环域结时,  $\alpha$  均取为 0.01。并采用文献[7]的方法进行计算,时间步长  $\Delta\tau =$

0.01, 空间步长  $\Delta\rho = 0.05$ 。

取下式作为计算常微分方程组的初值:

$$\varphi(\rho, 0) = 4 \tan^{-1} \cdot \exp \frac{\rho - \rho_c}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (4a)$$

$$\varphi_{\tau}(\rho, 0) = \frac{-2u}{\sqrt{1 - u^2}} \operatorname{sech} \frac{\rho - \rho_c}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (4b)$$

式中  $\rho_c$  为孤子波峰值的初始位置,  $u$  为其初速度,在开始计算时赋以适当的数值。

在计算过程中,当下列各项指标同时达到时,就认为已获得稳定的环形准孤子波解: 结径向上任一点的  $\varphi_i$  值,在两个相继周期的对应时刻都增加  $4\pi$  时,其误差小于 0.02; 结径向上任一点的电流密度  $\nabla^2 \varphi$ , 自场  $\varphi_{\rho}$  和电压  $\varphi_{\tau}$ , 在两个相继周期的对应时刻的瞬时值相等,其误差不大于 0.01。

## 二、几何尺寸对准通量子激发的影响

### 1. $\rho_0 = 5$ , $a\rho_0 = 10$ 的环域结

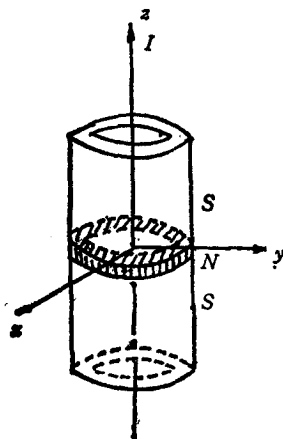


图 1 环域结

计算表明,这时不存在对应于准通量子激发的稳定环形准孤子波解。相应的  $\varphi_\rho$ - $\rho$  曲线如图 2 所示,其特点是周期不稳,不符合上节所规定的稳定环形准孤子波解应满足的条件,这种波形经若干次反射后将趋向于零电压态。若增大驱动电流  $I$ ,则这种状态将最终趋向于旋转周期解<sup>[7]</sup>。

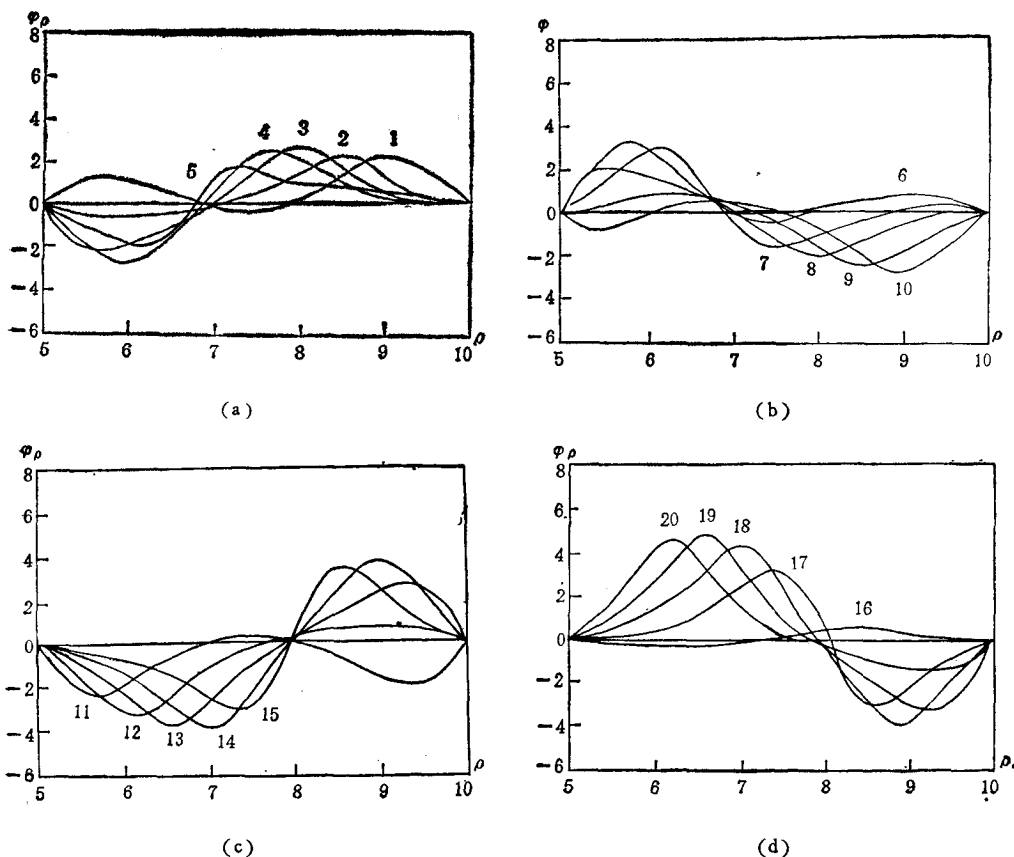


图 2  $\rho_0 = 5$ ,  $a\rho_0 = 10$ ,  $I = 31.98$  (任意单位)时  $\varphi_\rho$ - $\rho$  曲线 每条曲线相隔  $50\Delta\tau$

## 2. $\rho_0 = 7.5$ , $a\rho_0 = 12.5$ 的环域结

计算表明,这时存在着对应于准通量子激发的稳定环形准孤子波解。图 3(a) 所示的是在驱动电流  $I = 48.26$  (任意单位, 以下同)的条件下  $\varphi_\rho$ - $\rho$ - $\tau$  曲线,其中准通量子沿径向传播时的情景与文献[8]中无耗散存在时的相似。

研究环形准孤子波的能量变化是有意义的。环域结上环形准孤子波的能量可用

$$E(\tau) = 2\pi \int_{\rho_0}^{a\rho_0} \left( \frac{1}{2} \varphi_\rho^2 + \frac{1}{2} \varphi_\tau^2 + 1 - \cos \varphi \right) \rho d\rho \quad (5)$$

来计算<sup>[7]</sup>。图 3(b) 是用上式算得的  $E(\tau)$ - $\tau$  曲线。结果表明,在两个相继周期的对应时刻,环形准孤子波的能量相对误差不超过 0.1%。同时在一个周期  $T$  内,环形准孤子波具有两个能量峰值,其间隔恰等于  $T/2$ 。这个结果可能是由于外源可以通过多种途径给系统提供能量所造成的。并且还可看到,环形准孤子波在向内收缩和向外扩张的传播

过程中,能量的变化是相当不同的,虽然它们所经历的时间却是一样。

图 3(c) 和 (d) 分别表示与图 3(b) 具有相同起始时刻的  $\langle \varphi_r \rangle_\rho - \tau$  和  $\varphi_r(a\rho_0) - \tau$  曲线。在图 3(c) 中,两个高峰的中间有一低峰存在,其位置(图中用点划线表示)恰等分一个周期。结端电压  $\varphi_r(a\rho_0)$  的周期与电压空间平均值  $\langle \varphi_r \rangle_\rho$  的周期相等,所以这种环形准孤子波解具有  $2\pi$ -kink 的特性<sup>[11]</sup>。

图 4 表示这种几何尺寸环域结的  $I-\langle V \rangle$  特性曲线的第一零场台阶部分<sup>[9,11]</sup>。

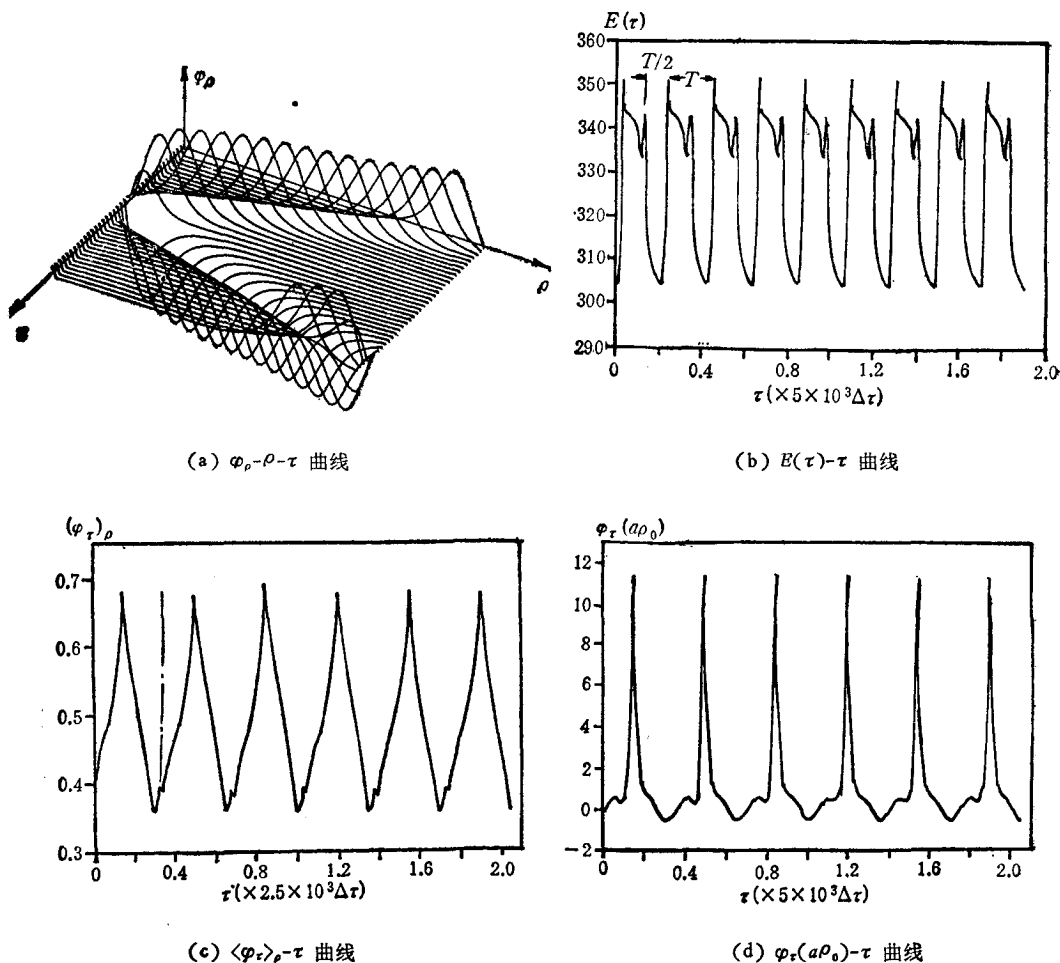


图 3  $\rho_0 = 7.5$ ,  $a\rho_0 = 12.5$ ,  $I = 48.26$  所有曲线的纵坐标均为任意单位

### 3. $\rho_0 = 7.5$ , $a\rho_0 = 17.5$ 的环域结

方程 (1) 存在对应于准通量子激发的稳定环形准孤子波解。图 5 和图 6 分别与图 3 和图 4 相对应。对比这些图,可以看到它们之间存在着某些差别: 首先, 图 5(a) 所示的环形准孤子波的形态具有明显的圆对称 SGE 的环形类孤子波的特性<sup>[2,3]</sup>, 即波的峰值随  $\rho$  的增大而降低, 波的半宽度随  $\rho$  的增大而加宽; 其次, 在与外部边界因碰撞而交换能量的时间较长, 取上升到二分之一处为发生碰撞而引起通量子翻转的时刻; 再次, 随着结宽度的增大,  $\langle \varphi_r \rangle_\rho - \tau$  图形的细节发生了某种微妙的变化, 即在两个高峰的中间处没有小

峰存在,取而代之的却是它的最低值(这也是一个极值),且在其两旁存在两个不等距的较低峰值;最后,第一零场台阶的范围随结宽度的增加而增大。

#### 4. $\rho_0 = 10$ , $a\rho_0 = 15$ 的环域结

在这里也存在准通量子的激发。图 7 和图 8 分别与图 3 和图 4 相对应。它们之间没有多大的差别,仅仅这里的第一零场台阶范围比较大些。这是由于当环域结的宽度相同时,其面积随内半径  $\rho_0$  的平方而增加,所以在达到最大 Josephson 超流密度之前,驱动电流  $I$  可作较大的变动。

#### 5. $\rho_0 = 10$ , $a\rho_0 = 20$ 的环域结

与前面一样,图 9 和图 10 分别与图 3 和

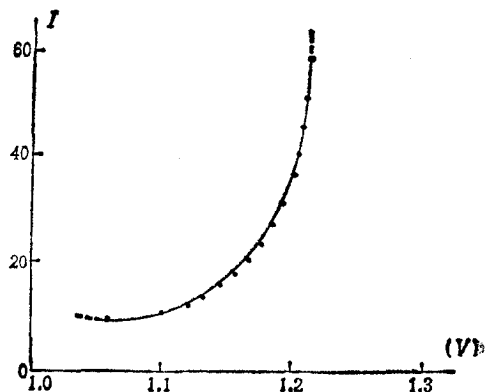
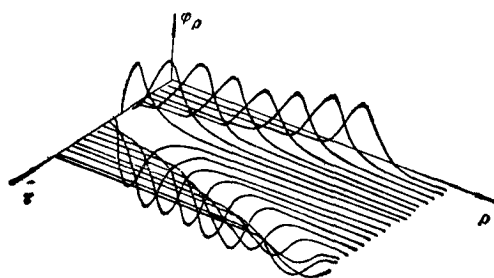
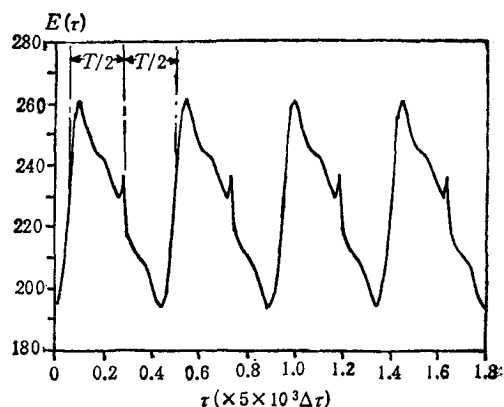


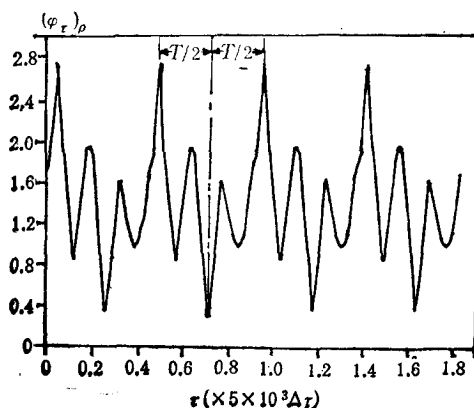
图 4  $I-\langle V \rangle$  曲线



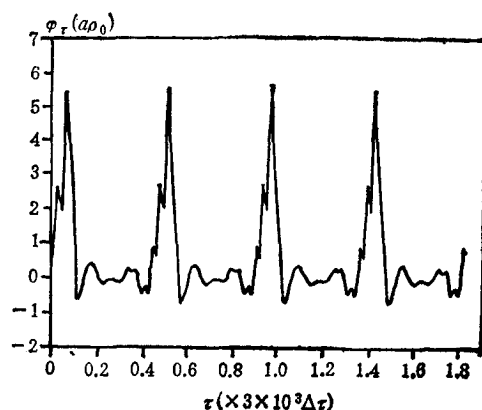
(a)  $\varphi_\rho-\rho-\tau$  曲线



(b)  $E(\tau)-\tau$  曲线



(c)  $\langle \varphi_\tau \rangle_\rho-\tau$  曲线



(d)  $\varphi_\tau(a\rho_0)-\tau$  曲线

图 5  $\rho_0 = 7.5$ ,  $a\rho_0 = 17.5$ ,  $I = 38.56$  所有曲线的纵坐标均为任意单位

图 4 相对应。图 9 具有图 5 中所有那些特点,图 10 具有图 8 的那个特点。

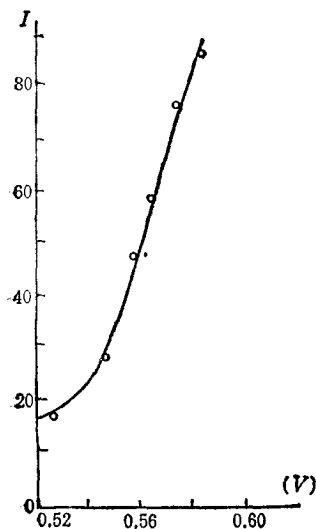


图 6  $I-\langle V \rangle$  曲线

### 三、讨 论

在  $\alpha = 0.01$  条件下,当  $\rho_0 \geq 7.5$  时,圆对称环域结的扰动 SGE 存在着对应于准通量子激发的环形准孤子波解,同时在  $I-\langle V \rangle$  曲线上出现第一零场台阶。这一结果清楚地表明在圆域结中心轴附近存在着一个有效面积为  $\pi \rho_0^2$  的能量弥散区域<sup>[7]</sup>,在此区域内,环形准孤子波的能量被迅速地弥散从而使它变得不稳。因此,圆对称环域结的几何位形是克服圆对称 SGE 的环形类孤子波解不稳定性理想模型。当然,临界  $\rho_0$  的可能值应在  $5 < \rho_0 < 7.5$  的区间内。要精确地测定  $\rho_0$  的临界值,必须以耗费巨大的计算工作量为代价。同时  $\rho_0$  的临界值必定与  $\alpha$  值有关,一般随  $\alpha$  的增加而增大。

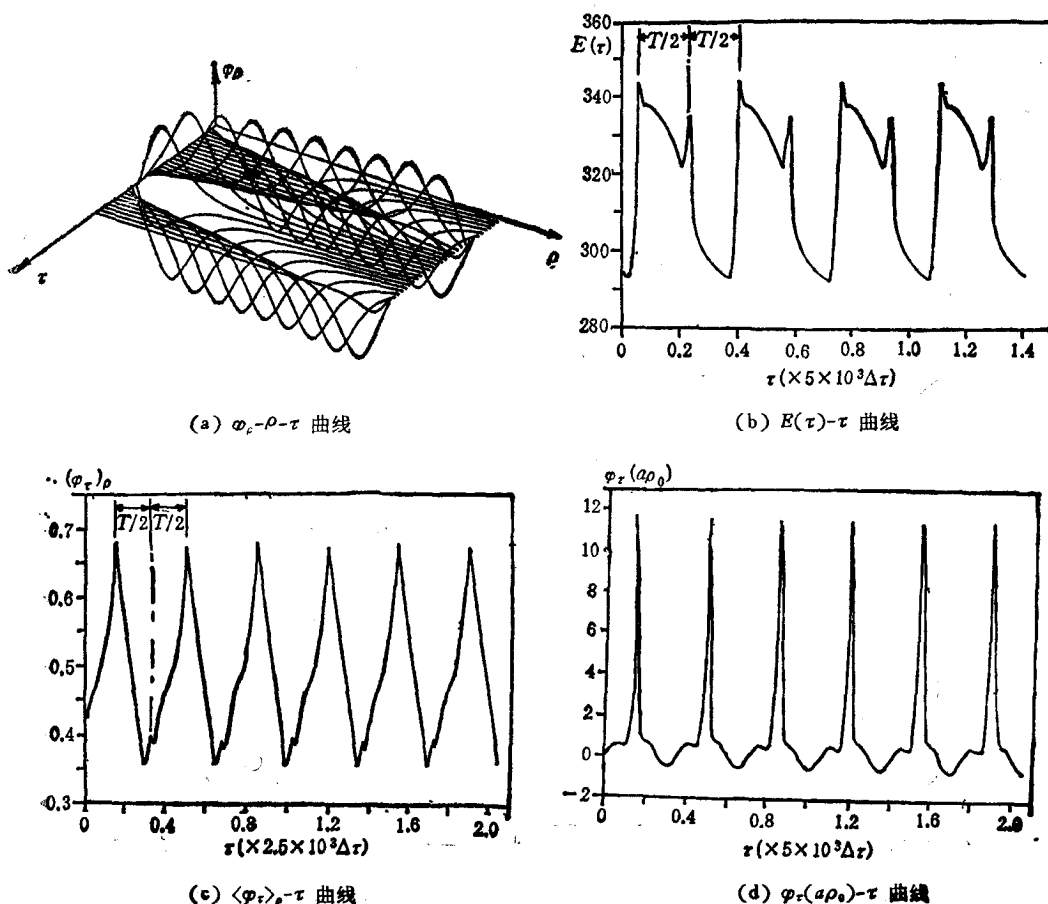
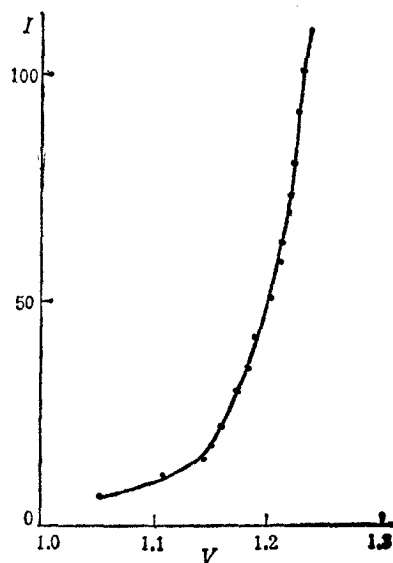
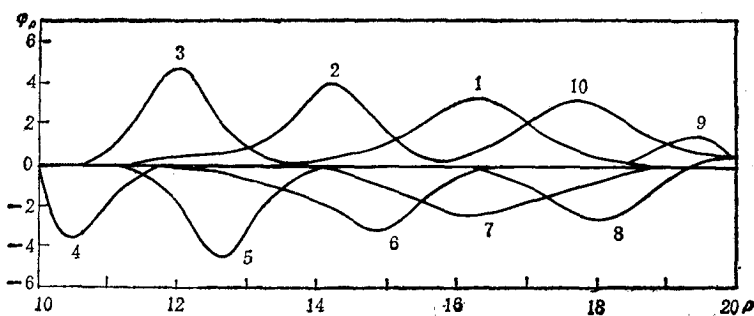
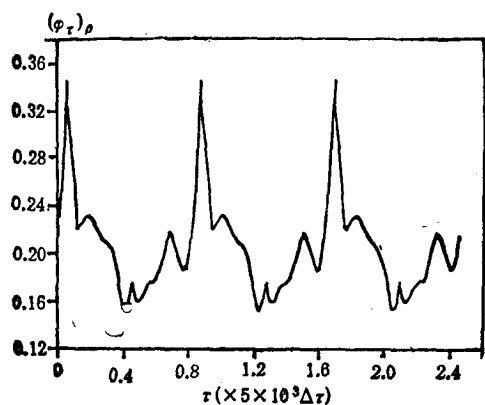
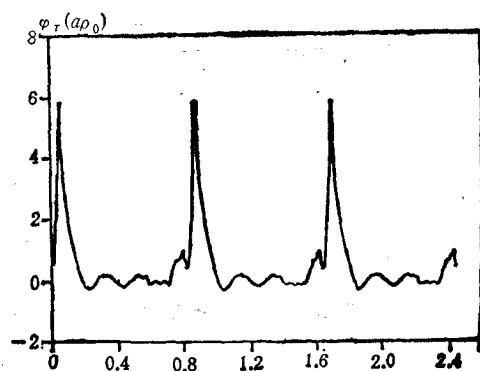


图 7  $\rho_0 = 10$ ,  $a\rho_0 = 15$ ,  $I = 34.68$  所有曲线的纵坐标均为任意单位

几何尺寸对环形准孤子波解性质的影响比较复杂。当结宽度 ( $a\rho_0 - \rho_0$ ) 一定时, 对不同内半径的结, 其环形准孤子波解性质基本上类同; 当内半径  $\rho_0$  一定时, 对不同的结宽度, 例如  $a\rho_0 - \rho_0 = 5$  和 10 这两种情形, 环形准孤子波解的性质有些不同。从上节的讨论可知, 对于  $a\rho_0 - \rho_0 = 5$  的狭结, 其  $\langle \varphi_r \rangle_\rho - \tau$  曲线的中间, 即  $T/2$  处是一个小峰值; 而对于  $a\rho_0 - \rho_0 = 10$  的宽结, 其  $\langle \varphi_r \rangle_\rho - \tau$  曲线的中间, 即  $T/2$  处既可能是一个小峰值 (图 9(b)), 也可能是一个最低值 (图 5(c))。具体结果视计算的初值而定, 因此这里也出现扰动 SGE 的多值解的稳定性问题<sup>[6,10]</sup>。

环形准孤子波的能量研究是颇有意思的。对于狭结, 其环形准孤子波从边界上反射时呈现出较大的“硬”度, 即从边界处获得能量所费的时间较短, 与边界碰撞时呈现较为明显的粒子性; 对于宽结, 其环形准孤子波与边界碰撞时, 表现出某种程度的“软”化。

图 8  $I-\langle V \rangle$  曲线(a)  $\varphi_\rho - \rho$  曲线 每条曲线相隔  $T/12$ (b)  $\langle \varphi_r \rangle_\rho - \tau$  曲线(c)  $\varphi_r(a\rho_0) - \tau$  曲线图 9  $\rho_0 = 10, a\rho_0 = 20, I = 27.43$  所有曲线的纵坐标均为任意单位

对于不同的结宽度, 准通量子在结径上传播的平均速度相等. 当结的宽度增大一倍时, 准通量子传播所费的时间也相应地增加一倍. 同时, 环形准孤子波在向内收缩和向外扩张的过程中, 所费的时间也是一样, 虽然在这两个过程中准通量子所具有的能量却是明显的不同.

几何尺寸对第一零场台阶范围的影响较大. 不论是结的内半径  $\rho_0$  还是结的宽度  $(a\rho_0 - \rho_0)$ , 零场台阶范围都随它们的增大而扩展.

综上所述, 圆对称环域结的几何位形, 完全可以消除环形准孤子波在圆域结中心轴附近区域的能量弥散, 以及由此所引起的陷塌. 而且, 这里的几何尺寸已把一维 inline 结的痕迹完全抹去. 因此, 得到的是一种崭新的模型以及由它带来的结果. 在 Christiansen 等人的模型中, 主要关键是不均匀的电流密度分布  $j(r) = 1 + a \operatorname{sech}^2(r - R_c)$ , 在调节  $j(r)$  时难度较大. 若改用一载流导线则比较容易实现, 这种情景相当于处于外磁场中的一个圆对称环域结. 我们将在另文中讨论这种情况.

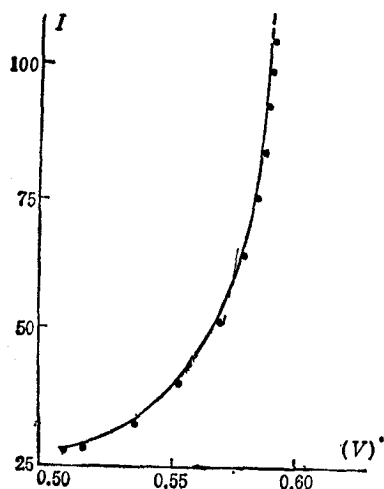


图 10  $I$ - $\langle V \rangle$  曲线

钱则比较容易实现, 这种情景相当于处于外磁场中的一个圆对称环域结. 我们将在另文中讨论这种情况.

- [1] I. L. Bogolyubskii and V. G. Makhankov, *JETP Lett.*, 24(1976), 12;  
I. L. Bogolyubskii, *JETP Lett.*, 24(1976), 535.
- [2] P. L. Christiansen and O. H. Olsen, *Phys. Scr.*, 20(1979), 531.
- [3] J. Geicke, *Phys. Lett.*, 82A(1981), 207; *Phys. Lett.*, 98A(1983), 147.
- [4] E. M. Moslov, *Physica*, 15D(1985), 433.
- [5] A. Malomed, *Physica*, 24D(1987), 155.
- [6] 孙元善、姚希贤, 低温物理, 7(1985), 99.
- [7] 徐昆明、孙元善、姚希贤, 低温物理学报, 8(1986), 27; 徐昆明、姚希贤, 低温物理学报, 9(1987), 27.
- [8] P. L. Christiansen, P. S. Lomdahl and J. Zabusky, *Appl. Phys. Lett.*, 39(1981), 170.
- [9] 徐昆明、沈亚非、姚希贤, 低温物理学报, 待发表.
- [10] 王伟、姚希贤, 物理学报, 37(1988), 705.
- [11] J. J. Chang, J. T. Chen, M. R. Scheuermann and D. J. Scalapino, *Phys. Rev.*, B31(1985), 1658.

## THE GEOMETRY SIZE EFFECTS OF THE QUASI-FLUXON OF EXCITATION IN THE CIRCULAR SYMMETRIC ANNULAR JOSEPHSON JUNCTION

XU KUN-MING

*(Department of Physics, Zhejiang University)*

SHEN YA-FEI

*(Department of Computer Science and Engineering, South-East University)*

YAO XI-XIAN

*(Department of Physics, Nanjing University)*

### ABSTRACT

In this paper, the geometry size effects of the ringshape quasi-soliton solutions in the perturbed Sine-Gordon equations (SGE) in the circular symmetric annular Josephson junction are investigated with numerical method. The perturbed SGE, when the inner radius  $r_0$  of the circular symmetric annular junctions is larger than or equal to  $7.5\lambda_J$ , there exists a kind of ring-shape quasi-soliton solutions, which correspond to the quasi-fluxon of excitation in the circular symmetric annular Josephson junction, and the first zero-field step also. The range of the first zero-field step depend strongly on the size of the inner radius  $r_0$  and widths ( $ar_0 - r_0$ ) of the circular symmetric annular junctions, but the geometry size effects of the nature of the ring-shape quasi-solitons are more complicated.