

研究简报

四能级原子与双模腔场相互作用中的非线性效应

刘 正 东

(江西师范大学物理系)

1988 年 5 月 14 日收到

本文研究了一串级型四能级原子与双模腔场的相互作用,其中位于下方的模 2 腔场初始时刻不存在. 计算表明,在一定的条件下,模 2 腔场的动力学行为中存在着长时间的深压缩现象或场复振幅算符两个正交分量的交替压缩现象,存在着强烈的反聚束效应以及强烈的超聚束效应,而且压缩与超聚束效应之间有一定的对应关系,非经典的压缩态和反聚束效应能够同时出现. 模 2 腔场的这些非线性效应与复杂的叠加态有关.

压缩态等场的非经典特性正日益为人们所关注^[1-5]. 文献[6, 7]讨论了初始处于相干态的腔场与三能级原子相互作用中的压缩现象和反聚束效应,文献[8]提出了叠加态产生非经典效应的原理;显然这二者的物理机制是不同的. 前者本质是原子与场的相互作用对初始激发场的扰动影响,后者则依赖于真空态与单(双)光子态在场中所占的比例、位相等所形成的某种缺损效应.

文献[7]对辐射场的动力学行为讨论中,压缩仅在初期的一处或几处发生,其后场的复振幅算符分量的均方涨落迅速向远大于 1/4 的值偏离,即压缩的时间短、重现机会少. 文献[8]讨论的是简化的叠加态原理,在场的动力学行为中仅涉及到如 $\cos Q_1 t = -1$ 这样的点,并且强烈地依赖于某些特殊条件,以期实现瞬时的纯粹的单(双)光子态与真空态的叠加,故属准静态讨论.

本文将讨论四能级双模运转中的复杂的态叠加现象和非线性效应.

考虑一串级型四能级原子在光学腔中,其能级由上至下分别为 $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, |d\rangle$. 它们的能量本征值(自由情况时)分别为 $\hbar\omega_a, \hbar\omega_b, \hbar\omega_c$ 和 $\hbar\omega_d$, $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 之间的跃迁与频率为 Ω_1 的腔模 1 相对应, $|b\rangle$ 和 $|c\rangle, |c\rangle$ 和 $|d\rangle$ 之间的跃迁与频率为 Ω_2 的腔模 2 相对应. 在相互作用绘景中,该系统在 RWA 近似下的相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned} \hat{H}^I = & g_1 \hat{A}_1 \hat{A}_a^\dagger \hat{A}_b e^{-i\Delta_1 t} + g_2 \hat{A}_2 \hat{A}_b^\dagger \hat{A}_c e^{-i\Delta_2 t} \\ & + g_3 \hat{A}_2 \hat{A}_c^\dagger \hat{A}_d e^{-i\Delta_2 t} + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\hat{A}_i^\dagger$ 和 $\hat{A}_i$ 分别为能态 $|\eta\rangle (\eta = a, b, c, d)$ 的产生和湮没算符, $\hat{a}_i^\dagger$ 和 $\hat{a}_i$ 分别为模 i 腔场 ($i = 1, 2$) 的产生和湮没算符, g_i 为场与原子的耦合系数. 这里采用了自然单位,且

$$\Delta_1 = \Omega_1 - (\omega_a - \omega_b); \Delta_2 = \Omega_2 - (\omega_b - \omega_c); \Delta_3 = \Omega_2 - (\omega_c - \omega_d), \quad (2)$$

设原子初始处于 $|a\rangle$ 能级, 模 1 腔场存在而模 2 腔场是空的. 则该系统的态矢量为

$$|\phi(0)\rangle = \sum_{n_1} F(n_1) |a, n_1, 0\rangle. \quad (3)$$

其中 $F(n_1) = \langle n_1 | \phi_f(0) \rangle$, 当模 1 腔场初始处于相干态, 则

$$F(n_1) = \alpha^{n_1} (n_1!)^{-\frac{1}{2}} e^{-|\alpha|^2}. \quad (4)$$

其中

$$\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}, \quad \alpha^* \alpha = \bar{n}_1, \quad (5)$$

$\bar{n}_1$ 为模 1 腔场初始时刻的平均光子数, φ 为 α 的相角, 在下面的讨论中, 取 $\varphi = 0$ ^[5].

在 $t > 0$ 后, 由于原子和场的相互作用, 上述态矢量便演变成

$$|\phi(t)\rangle = \sum_{n_1} F(n_1) \{ A_{n_1} |a, n_1, 0\rangle + B_{n_1+1} |b, n_1+1, 0\rangle \\ + C_{n_1+1} |c, n_1+1, 1\rangle + D_{n_1+1} |d, n_1+1, 2\rangle \}. \quad (6)$$

该态矢量满足薛定谔方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = \hat{H} |\phi(t)\rangle. \quad (7)$$

利用 (1) 式及态矢量的正交性可求得如下方程组:

$$i \frac{\partial}{\partial t} A_{n_1} = V_1 e^{-i\Delta_1 t} B_{n_1+1}, \quad (8)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} B_{n_1+1} = V_1^* e^{i\Delta_1 t} A_{n_1} + V_2 e^{-i\Delta_2 t} C_{n_1+1}, \quad (9)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} C_{n_1+1} = V_2^* e^{i\Delta_2 t} B_{n_1+1} + V_3 e^{-i\Delta_3 t} D_{n_1+1}, \quad (10)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} D_{n_1+1} = V_3^* e^{i\Delta_3 t} C_{n_1+1}. \quad (11)$$

其中

$$V_1 = g_1 \sqrt{n_1 + 1}, \quad V_2 = g_2, \quad V_3 = g_3 \sqrt{2}. \quad (12)$$

利用初始条件

$$A_{n_1}(0) = 1, \quad B_{n_1+1}(0) = C_{n_1+1}(0) = D_{n_1+1}(0) = 0, \quad (13)$$

不难用计算机求出其解, 而在共振条件下, 该解有一简单形式

$$A_{n_1} = H \exp(i\mu_1 t) + K \exp(i\mu_2 t) + M \exp(i\mu_3 t) + N \exp(i\mu_4 t), \quad (14)$$

$$B_{n_1+1} = -[H\mu_1 \exp(i\mu_1 t) + K\mu_2 \exp(i\mu_2 t) \\ + M\mu_3 \exp(i\mu_3 t) + N\mu_4 \exp(i\mu_4 t)] / V_1, \quad (15)$$

$$C_{n_1+1} = [(\mu_1^2 - V_1^2)H \exp(i\mu_1 t) + (\mu_2^2 - V_1^2)K \exp(i\mu_2 t) \\ + (\mu_3^2 - V_1^2)M \exp(i\mu_3 t) + (\mu_4^2 - V_1^2)N \exp(i\mu_4 t)] / (V_1 g_2), \quad (16)$$

$$D_{n_1+1} = -[(\mu_1^2 - V_1^2 - g_2^2)H\mu_1 \exp(i\mu_1 t) + (\mu_2^2 - V_1^2 - g_2^2)K\mu_2 \exp(i\mu_2 t) \\ + (\mu_3^2 - V_1^2 - g_2^2)M\mu_3 \exp(i\mu_3 t) + (\mu_4^2 - V_1^2 - g_2^2)N\mu_4 \exp(i\mu_4 t)] \\ / (\sqrt{2} V_1 g_2 g_3). \quad (17)$$

其中

$$\mu_{1,3} = -\mu_{2,4} = \{V_1^2 + g_2^2 + 2g_3^2 \pm [(V_1^2 + g_2^2 + 2g_3^2)^2 - 8V_1^2g_3^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}/\sqrt{2}, \quad (18)$$

$$H = K = (V_1^2 - \mu_2^2)/[(V_1^2 + g_2^2 + 2g_3^2)^2 - 8V_1^2g_3^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

$$M = N = (\mu_1^2 - V_1^2)/[(V_1^2 + g_2^2 + 2g_3^2)^2 - 8V_1^2g_3^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

则任意 t 时刻系统的态矢量即已求得,而原子-场系统的密度算符便可表为

$$\hat{\rho}(t) = |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)|. \quad (21)$$

运用密度算符可求得

$$\langle\hat{n}_2\rangle = \sum_{n_1} F^*(n_1)F(n_1)[C_{n_1+1}^*C_{n_1+1} + 2D_{n_1+1}^*D_{n_1+1}]. \quad (22)$$

尽管模 2 初始为一空场,但在位于其上的模 1 腔场的驱动下,有单光子及同模式双光子过程发生;又由于双模通过原子而耦合 [(18), (22) 式], 故该过程受模 1 腔场的场强及统计性质所影响。虽然在不同的跃迁结构中,容易简单地看出相邻腔模之间有支持、竞争等不同的相互影响,但这其实存在于初始时刻以后一段短暂的过程中,多模一进入稳定运转,必定存在着模式竞争^[7];本文之级联型模型亦然,尽管模 1 腔场的存在开始有利于原子由 $|a\rangle$ 能态跃迁到 $|b\rangle$ 能态才使下面的模 2 腔场具有了开始运转的条件。当模 1 腔场的 $\bar{n}_1$ 逐渐减弱时,模 2 腔场的平均光子数曲线 $\langle\hat{n}_2\rangle$ 的振幅逐渐增大;当 $\bar{n}_1 < 1$ 以后,双模间的竞争作用趋于平衡, $\langle\hat{n}_2\rangle$ 曲线亦趋于稳定(见图 1 (a), 图 2 (a))。

模 2 腔场的二阶相干度为

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle n_2^2 \rangle - \langle n_2 \rangle^2}{\langle n_2 \rangle^2}, \quad (23)$$

$$\text{其中} \quad \langle n_2^2 \rangle = \sum_{n_1} F^*(n_1)F(n_1)[C_{n_1+1}^*C_{n_1+1} + 4D_{n_1+1}^*D_{n_1+1}], \quad (24)$$

随着 $\langle n_2 \rangle$ 曲线振幅的逐渐增大,对应的 $g^{(2)}$ 曲线的振幅亦逐渐增大。

当 $\bar{n}_1 < 1$ 以后, $\langle n_2 \rangle$ 曲线随 $\bar{n}_1$ 减小而增大的变化甚微,但对应的 $g^{(2)}$ 曲线振幅继续增大却是明显的,而且二曲线之间始终有近似的反相关系(见图 1 (b), 图 2 (a))。如当 $\bar{n}_1$ 分别取为 0.5, 0.1, 0.01 时,模 2 腔场的 $g_{\min}^{(2)}$ 分别为 0.3, 0.1, 0.01, 其 $g_{\max}^{(2)}$ 则分别为 12, 16, 33, 表现出强烈的反聚束效应 ($g^{(2)} < 1$) 和强烈的超聚束效应 ($g^{(2)} > 2$) 以及模 2 腔场在这两种状态之间振荡的有趣的新现象。同时可看到,模 2 腔场处于这两种状态的时间亦逐渐增长。

(23) 式利用 (22), (24) 式又可写成

$$g^{(2)}(0) = \frac{1}{\langle n_2 \rangle + 2 \sum_{n_1} F^*(n_1)F(n_1)|C_{n_1+1}|^2(1 + |C_{n_1+1}/2D_{n_1+1}|^2)}. \quad (25)$$

即模 2 腔场的二阶相干度不仅与 $\langle n_2 \rangle^{-1}$ 有关,而且与单、双光子态的权重及相互比例有关。又由于 $\langle n_2 \rangle \propto \{|C_{n_1+1}|^2, |D_{n_1+1}|^2\}$, 故模 2 腔场出现超聚束效应时, $\langle n_2 \rangle$ 一般均处于较小的值。特别是模 2 腔场刚刚进入运转时,总伴随着强烈的超聚束效应,表现出空场对于光子具有强烈的“亲和性”。

考虑模 2 腔场的无量纲电场算符和磁场算符的均方涨落

$$(\Delta d_{1,2})^2 = \frac{1}{4} (2\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \rangle + 1 \pm \langle \hat{a}_2^2 \rangle \pm \langle \hat{a}_1^{\pm 2} \rangle) - \frac{1}{4} \langle \hat{a}_2 \pm \hat{a}_1^+ \rangle^2, \quad (26)$$

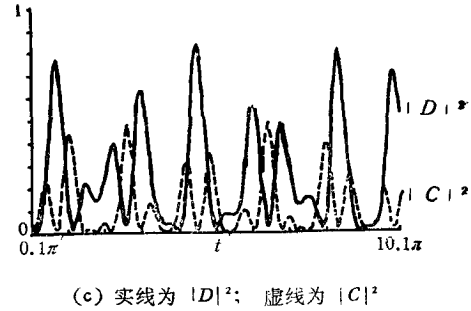
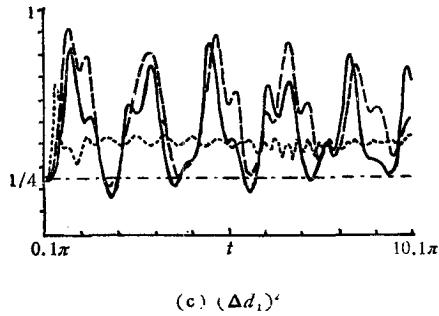
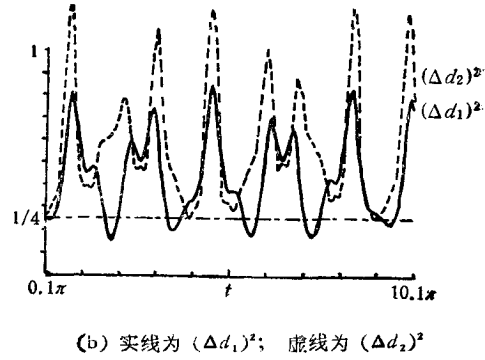
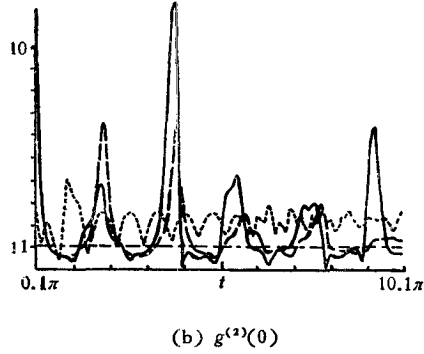
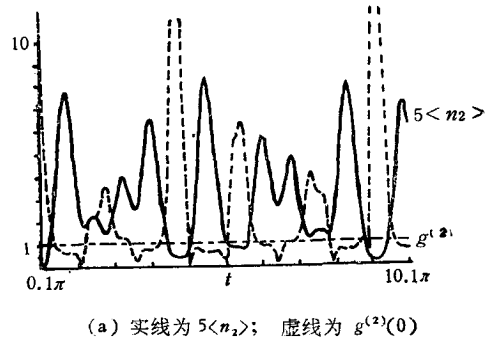
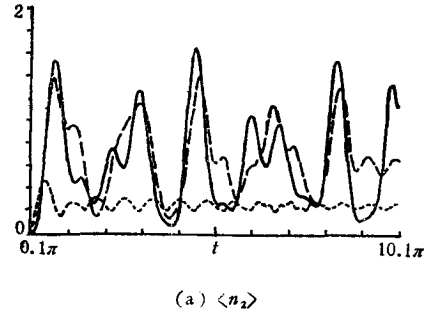


图1 $g_1 = g_2 = g_3 = 1$, 模2腔场的 $\langle n_2 \rangle$, $g^{(2)}$, $\langle \Delta d_1 \rangle^2$
——为 $\bar{n}_1 = 0.1$; - - - 为 $\bar{n}_1 = 1$;
-----为 $\bar{n}_1 = 10$

图2 $\bar{n}_1 = 0.01$, $g_1 = g_2 = g_3 = 1$, 模2腔场的 $\langle n_2 \rangle$, $g^{(2)}$, $\langle \Delta d_1 \rangle^2$, $\langle \Delta d_2 \rangle^2$, $|D_{n_1+1}|^2$, $|C_{n_1+1}|^2$

其中

$$\hat{d}_1 = \frac{1}{2} (a_2 + a_2^\dagger), \quad \hat{d}_2 = \frac{1}{2i} (a_2 - a_2^\dagger), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{d}_2 \rangle &= \sum_{n_1} F^*(n_1) F(n_1) \left[\frac{\alpha}{\sqrt{n_1 + 1}} \right. \\ &\quad \left. \times A_{n_1+1} C_{n_1+1}^* + B_{n_1+1} C_{n_1+1}^* + \sqrt{2} C_{n_1+1} D_{n_1+1}^* \right], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\langle \hat{d}_2^2 \rangle = \sum_{n_1} F^*(n_1) F(n_1) \sqrt{2} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{n_1 + 1}} A_{n_1+1} D_{n_1+1}^* + B_{n_1+1} D_{n_1+1}^* \right]. \quad (29)$$

当 $\bar{n}_1$ 逐渐减小时, 模2腔场的 d_1 算符逐渐出现压缩, 次数增多, 程度加深(见图1(c)).

图 2(b)). 在 $\bar{n}_1 = 0.01$ 时, 压缩长时期地周期性地无衰减地出现, 深度可达 0.150, 时间可占 22%. 这是与文献 [7] 不同的现象. 由 (28), (29), (14)–(17) 等式可见这也是远较文献 [8] 复杂的叠加态所致的压缩现象, 但其初始条件等对模型的要求却又比文献 [8] 简单和普遍得多.

注意到压缩较深时对应的 $|D_{n+1}|^2$ 的值约为 0.8–0.15, 此时的 $|C_{n+1}|^2$ 值一般较小, 即压缩效应主要是双光子态与真空态的叠加所致. 在纯粹的双光子叠加态 $|\phi_2\rangle = \gamma|0\rangle + \beta|2\rangle$ 中, 当 $|\beta|^2 \approx 0.092$ 时可取得最深压缩 0.138^[8]. 故如能将该振幅达 0.8 的 $|D_{n+1}|^2$ 曲线降低到 0.2 以下, 同时又加大 $|D_{n+1}|^2/|C_{n+1}|^2$ 之比值, 可望能得到更长时间、更深程度的压缩.

$g_2 \approx g_3$ 是使模 2 腔场偏离同模式双光子过程的一种简单手段^[7], 且 $g_3 > g_2$ 有利于 $|D_{n+1}|^2/|C_{n+1}|^2$ 之比值加大. 当保持 g_2 为 1 而逐渐加大 g_3 时, $\langle n_2 \rangle$ 曲线幅度逐渐下降, 压缩变化如上预期. 图 3 显示了 $g_2 = 1, g_3 = 2$ 的影响, $(\Delta d_1)^2$ 在绝大多数时间都取得小于 1/4 的非经典值, 最小值达 0.141. $g_3 = 3$ 时最深压缩为 0.140, 场几乎完全处于压缩态, 不过此时模 2 腔场强度将更小. g_3 的再增大将使场偏离压缩的极值点而使 $(\Delta d_1)^2$ 值回升.

模 2 腔场的二阶相干度曲线随 g_3 的增大而逐渐升高. 由图 3 可见, 当该场处于压缩态时, 它也必处于超聚束状态, 其 $g^{(2)}$ 下限约为 2.2, 当 $g_3 = 3$ 时, 该下限约为 5, $g_3 = 4$ 时, 该下限为 12. 纵观各种条件下的计算图形, 无不存在着 $(\Delta d_1)^2$ 曲线的压缩波谷必定与 $g^{(2)}$ 曲线的超聚束波峰相映成趣的现象, 即在本模型中超聚束状态可作为场压缩的一个必要而非充分的判据.

模 1 腔场作为驱动场自然也是一个调节因素, 图 1 已显示了场强的影响; 原子与模 1 腔场的耦合系数 g_1 在公式中作为权重因子影响应更大及不同, 图 4 显示了当取 $g_1 = 2$ 其他条件与图 2 相同时模 2 腔场的复振幅算符的两个正交分量交替出现压缩的有趣现象, d_1, d_2 的压缩深度分别可达 0.156 及 0.188, 比较图 3(b), (c), 可以看到 d_2 出现压缩主要与单光子叠加态有关. 在 g_1 增大为 3 时, 则出现 d_1 压缩一次 d_2 压缩二次的周而复始的有趣现象, 当然这都与复杂的单、双光子叠加态的组合变化有关.

若模 1 腔场初始处于混沌态, 则 (22), (24), (28), (29) 式应改写成

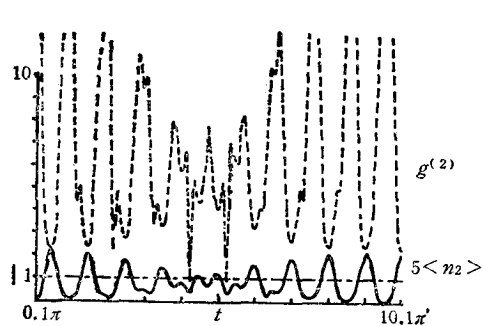
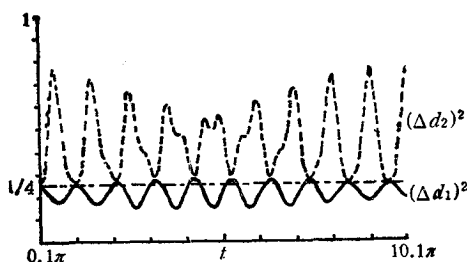
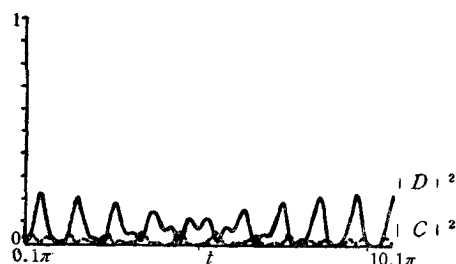
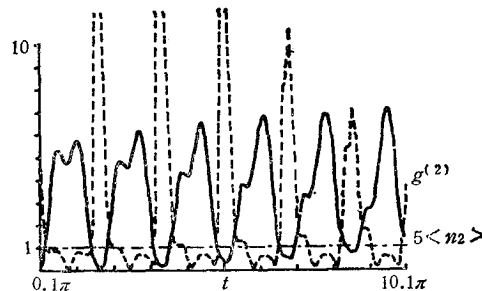
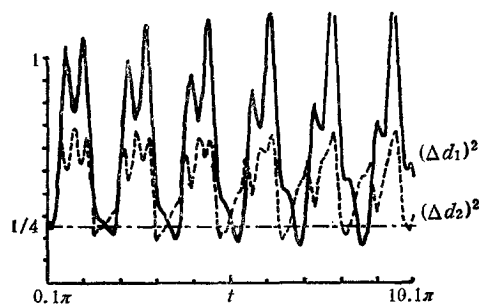
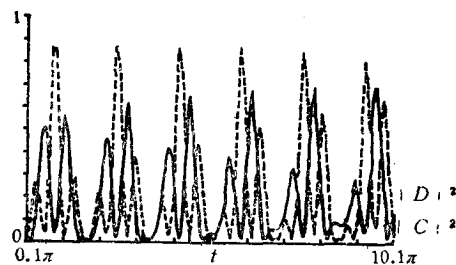
$$\langle n_2 \rangle = \sum_{n_1} \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{(\bar{n}_1 + 1)^{n_1+1}} [C_{n_1+1}^* C_{n_1+1} + 2D_{n_1+1}^* D_{n_1+1}], \quad (30)$$

$$\langle n_2^2 \rangle = \sum_{n_1} \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{(\bar{n}_1 + 1)^{n_1+1}} [C_{n_1+1}^* C_{n_1+1} + 4D_{n_1+1}^* D_{n_1+1}], \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \langle a_2 \rangle = \sum_{n_1} \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{(\bar{n}_1 + 1)^{n_1+1}} & \left[\sqrt{\frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_1 + 1}} A_{n_1+1} C_{n_1+1}^* \right. \\ & \left. + B_{n_1+1} C_{n_1+1}^* + \sqrt{2} C_{n_1+1} D_{n_1+1}^* \right], \end{aligned} \quad (32)$$

$$\langle a_2^2 \rangle = \sum_{n_1} \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{(\bar{n}_1 + 1)^{n_1+1}} \left[\sqrt{\frac{2\bar{n}_1}{\bar{n}_1 + 1}} A_{n_1+1} D_{n_1+1}^* + \sqrt{2} B_{n_1+1} D_{n_1+1}^* \right]. \quad (33)$$

在 $\bar{n}_1 < 1$ 以后, 模 1 腔场的初始统计分布相对相干态或混沌态已差别甚微, 故对模

(a) 实线为 $5\langle n_2 \rangle$; 虚线为 $g^{(2)}(0)$ (b) 实线为 $(\Delta d_1)^2$; 虚线为 $(\Delta d_2)^2$ (c) 实线为 $|D_{n+1}|^2$; 虚线为 $|C_{n+1}|^2$ 图3 $\bar{n}_1 = 0.01$, $g_1 = g_2 = 1$, $g_3 = 2$,
模2腔场的性质(a) 实线为 $5\langle n_2 \rangle$; 虚线为 $g^{(2)}(0)$ (b) 实线为 $(\Delta d_1)^2$; 虚线为 $(\Delta d_2)^2$ (c) 实线为 $|D_{n+1}|^2$; 虚线为 $|C_{n+1}|^2$ 图4 $\bar{n}_1 = 0.01$, $g_1 = 2$, $g_2 = g_3 = 1$,
模2腔场的性质

2 腔场的影响差别亦微。计算结果亦表明图 2 至图 4 对于模 1 腔场初始处于混沌态的相应图例几乎没有区别。这样,即使驱动场初始处于混沌态,所考虑的模 2 腔场仍然能够具有强烈的反聚束效应和深长的压缩现象。这亦是一个有趣的新现象。

在 $\bar{n}_1 > 1$ 以后,相干场与混沌场的统计分布随 $\bar{n}_1$ 的增大而差别愈甚,自然对 $\langle n_2 \rangle$ 的 Rabi 振荡频率、幅度等的影响亦不同;但数值计算表明它们对模 2 腔场的二阶相干度及压缩的影响的基本规律仍大致相同。

[1] C. M. Savage and D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 2164.[2] C. W. Gardiner, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 1917.[3] J. Janszky and Y. Y. Yushin, *Opt. Commun.*, **59**(1986), 151.[4] 谭维翰、李宇舫、张卫平, *物理学报*, **37**(1988), 396.[5] P. Meystre and M. S. Zubairy, *Phys. Lett.*, **89A**(1982), 390.

- [6] 刘正东, 物理学报, **36**(1987), 1645.
[7] 刘正东, 光学学报, **8**(1987), 7.
[8] K. Wodkiewicz *et al.*, *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 2567.

NONLINEAR PROPERTIES OF FOUR-LEVEL ATOM INTERACTING WITH TWO-MODE CAVITY FIELDS

LIU ZHENG-DONG

(Department of Physics, Jiangxi Normal University, Nanchang)

ABSTRACT

This paper studies the interaction of a four-level cascade atom with two-mode cavity fields in which the lower mode is initially empty. It is shown that there exist long time dipper squeezing and alternate squeezing, as well as strong antibunching and superbunching. The relation between the squeezing and superbunching is disclosed, the nonclassical squeezing and antibunching may occur at the same time. This nonlinear properties originate from the effect of complicated superposition states.