

Riemann 面上多极点亚纯向量场的代数 及其在亚纯 λ -微分的实现 (II)

王 世 坤

中国科学院应用数学研究所, 北京, 100080

沈 建 民 郭 汉 英

中国科学院理论物理研究所, 北京, 100080

1989 年 9 月 26 日收到

本文构造了高亏格紧 Riemann 面上多极点亚纯 λ -微分基的一般表达式, 并给出了一般方格上亚纯向量场的代数关系.

PACC: 0210; 0240

一、引 言

在文献[1]中我们给出了球面上多极点亚纯向量场代数 $\mathcal{H}_{-1}$ 及其扩张形式 $\mathcal{H}_{-1}$, 构造了球面上亚纯 λ -微分的基, 并指出由其张成的空间 $\mathcal{H}_1$ 就是 $\mathcal{H}_{-1}$ 的表示. 显然, 当 $\lambda = -1$ 时, 自然得到代数 $\mathcal{H}_{-1}$ 的伴随表示. 当构造 $\mathcal{H}_{-1}$ 的半无限形式表示时, 该伴随表示将起到十分重要的作用. 关于这一点, 我们将另文讨论.

近来 Krichever 和 Novikov 给出了 Virasoro 代数在高亏格紧 Riemann 面上的推广形式^[2], 也就是任意亏格紧 Riemann 面上有两个极点的亚纯向量场代数的扩张代数. 我们简称这种推广形式的代数为 K-N 代数. 高亏格紧 Riemann 面上两极点亚纯 λ -微分张成的空间就是 K-N 代数的表示空间. 由 Krichever 和 Novikov 所构造的这些表示空间的基称为 K-N 基. 本文将 K-N 基和未作扩张的 K-N 代数推广到多极点情况. 为方便起见, 文中称这种新推广的代数及 λ -微分基为 K-N 型代数和 K-N 型基. 本文将给出高亏格紧 Riemann 面上这种 K-N 型基的整体表达式以及具体的 K-N 型的代数关系.

我们已经知道 K-N 基和 K-N 代数对于建立高亏格紧 Riemann 面上的共形场论和研究包含相互作用的闭弦理论起着十分重要的作用^[3-6]. 另外, K-N 代数和 K-N 基为研究紧 Riemann 面上整体 Laurent 展开以及无限维代数及其表示提供了一些新的手段^[7,8]. 这就是我们为什么要进一步探讨 K-N 型代数和 K-N 型基的理由.

二、高亏格紧 Riemann 面上亚纯 λ -微分基的一般表达形式

设 M 是亏格为 g 的紧 Riemann 面, $P_i, i = 1, 2, \dots, N$, 是 M 上 N 个不同的一般点, 即非 Weierstrass 点. M 上只可能在点 P_i 有极性, 而在 $M \setminus \{P_i\}$ 上全纯的亚纯 λ -微分(暂时取 λ 为整数)所张成的空间为 $\mathcal{H}(\lambda, g)$. 由 Riemann-Roch 定理^[9]可以构造 $\mathcal{H}(\lambda, g)$ 的一组基:

$$\mathcal{H}(\lambda, g) = \{\phi_{nm}^{iN}(\lambda, g), i = 1, 2, \dots, N-1; \\ n - m = (2\lambda - 1)g - 2\lambda = M(\lambda)\}, \quad (1)$$

这里若 $i = 1$, 则 $n \in \mathbb{Z}$, 若 $i = 2, 3, \dots, N-1$, 则 $n \leq -1$. $\phi_{nm}^{iN}(\lambda, g)$ 满足:

$$\begin{aligned} \text{ord}_{P_i} \phi_{nm}^{iN}(\lambda, g) &= n, \\ \text{ord}_{P_N} \phi_{nm}^{iN}(\lambda, g) &= m, \\ \text{ord}_{P_j} \phi_{nm}^{iN}(\lambda, g) &= 0, j \neq i, N, P_j \in \{P_i\}, \\ n + m &= M(\lambda). \end{aligned} \quad (2)$$

(2)式说明, 对某固定的 i , $\phi_{nm}^{iN}(\lambda, g)$ 在 P_i 点有 n 重极性, 在 P_N 点有 $m = M(\lambda) - n$ 重极性, 而在 $M \setminus \{P_i, P_N\}$ 上处处全纯的 λ -微分. 当亏格 $g = 0$ 时, $\phi_{nm}^{iN}(\lambda, g)$ 的形式在文献[1]中已给出, 即

$$\begin{aligned} \phi_{nm}^{iN}(\lambda, 0) &= z^n (dz)^\lambda, n \in \mathbb{Z}, \\ \phi_{nm}^{iN}(\lambda, 0) &= (z - z_i)^n (dz)^\lambda, n \leq -1. \end{aligned} \quad (3)$$

当 $g = 1$ 时, $\mathcal{H}(\lambda, 1)$ 和 $\mathcal{H}(0, 1)$ 同构^[9]. 注意到环面 T^1 上任何椭圆函数 $f(z)$ 都可以用 $\sigma(z)$ 函数的乘积表示^[10]:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\prod_i \sigma(z - a_i)}{\prod_i \sigma(z - b_i)}, \\ \sum_i a_i &= \sum_i b_i. \end{aligned} \quad (4)$$

则

$$\begin{aligned} \phi_{nm}^{iN}(\lambda, 1) &= \sigma^n(z - 2z_i) \sigma^m(z) \sigma(z - 2nz_i) a_n^i (dz)^\lambda, \\ \phi_{nm}^{1N}(\lambda, 1) &= \sigma^{-1}(z - 2z_i) \sigma^{-1}(z) \sigma^2(z - z_i) a_{-1}^1 (dz)^\lambda, \\ \phi_0(\lambda, 1) &= (dz)^\lambda. \end{aligned} \quad (5)$$

这里

$$\begin{aligned} n + m &= -1, \\ a_n^i &= \sigma(2z_i) \sigma^{-2}(z_i), \\ a_{-1}^1 &= \sigma(2z_i) \sigma^{-2}(z_i), \\ n \in \mathbb{Z} - \{0, -1\}, &\text{如果 } i = 1, \\ n \leq -2, &\text{如果 } i = 2, 3, \dots, N-1. \end{aligned}$$

$\sigma(z)$ 函数定义为

$$\sigma(z) = M \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \exp(\pi i n(n+1)\tau + 2\pi i n z),$$

并选取 M , 使得 $\sigma'(0) = 1$.

当 $g \geq 2$ 时, 我们用 Prime 形式^[10] 和 theta 函数构造亚纯 λ -微分基:

$$\begin{aligned} \phi_{nm}^{iN}(\lambda, g) &= a_n^i(\lambda, g) E(P, P_i)^n E(P, P_N)^{m+(1-2\lambda)g} \\ &\quad \cdot E^{2\lambda-1}(P - gP_N + \Delta) \cdot E(P + mP_N - nP_i + (1-2\lambda)\Delta), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\lambda \approx 0, 1.$$

这里 Δ 是 Riemann 常向量,

$$\begin{aligned} a_n^i(\lambda, g) &= E(P, P_i)^{-m+(2\lambda-1)g} \cdot E^{1-2\lambda}(P_i - gP_N + \Delta) \\ &\quad \cdot E^{-1}(P_i + mP_N + nP_i + (1-2\lambda)\Delta), \end{aligned}$$

当 $i = 1, n \in \mathbb{Z}$. 当 $i = 2, 3, 4, \dots, N-1, n \leq -1$, 并且 $n + m = M(\lambda)$.

Prime 形式和 theta 函数分别定义为^[10]

$$\begin{aligned} E(P, Q) &= \frac{\theta \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right] (I(P) - I(Q))}{h(P)h(Q)} \\ &= -E(Q, P). \end{aligned} \quad (7)$$

$E(P, Q)$ 是个全纯多值 $(-1/2, -1/2)$ 微分, 它在 $P = Q$ 处有一阶零点.

$$\theta \left(P - \sum_{i=1}^k P_i + \Delta \right) = \theta \left(I(P) - \sum_{i=1}^k I(P_i) + I(\Delta) \right), \quad (8)$$

theta 函数[(8)式] 在 $P_i, i = 1, 2, \dots, k$ 有一阶零点, $I(P)$ 是 Jacobian 映射. 当 $\lambda = 0$ 时,

$$\begin{aligned} \phi(0, g) &= 1. \\ \phi_{nm}^{iN}(0, g) &= a_n^i(0, g) E(P, P_i)^{n-1} E(P, P_N)^n \\ &\quad \cdot E(P, R) \sigma^{-1}(P) \cdot \theta(P + mP_i \\ &\quad - (n-1)P_i + R + \Delta), \end{aligned} \quad (9)$$

这里 $R \in M, R \approx P_N, P_i, i = 1, 2, \dots, N-1$. $\sigma(P)$ 是全纯多值具无零点的 $g/2$ 微分.

当 $\lambda = 1$ 时, 存在三种类型的一次微分^[12], 第一类 Abelian 微分:

$$\begin{aligned} \phi_{nm}^{iN}(1, g) &= a_n^i(1, g) E(P, P_i)^n E(P, P_N)^{m-g} E(P, R)^{-1} \\ &\quad \cdot E(P - gP_N + \Delta) \cdot \theta(P - nP_i + mP_N - R - \Delta), \end{aligned} \quad (10)$$

$$n + m = g - 1, n, m \geq 0, g \geq 2.$$

第二类 Abelian 微分:

$$\begin{aligned} \phi_{nm}^{iN}(1, g) &= a_n^i(1, g) E(P, P_i)^n E(P, P_N)^{m-g} \\ &\quad \cdot E(P - gP_i + \Delta) \cdot \theta(P - nP_i + mP_N - \Delta), \end{aligned} \quad (11)$$

$$n + m = g - 2, n, m \neq -1, \text{ 且 } n, m \text{ 中至少有一个小于等于 } (-2), \text{ 当 } g \geq$$

2 时.

第三类 Abelian 微分:

$$\begin{aligned} \phi_{nm}^{iN}(1, g) &= a_n^i(1, g) \left\{ \frac{E(P_i, R)}{E(P, P_i) \cdot E(P, R)} \cdot \frac{\theta(P + (g-1)P_i - R + \Delta)}{\theta(gP_i - P_i + \Delta)} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\theta(P - gP_i - \Delta)}{\theta(R + gP_N - \Delta)} - \frac{E(P_N, R)}{E(P, P_N) \cdot E(P, R)} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\theta(P + gP_i - P_N - R + \Delta)\theta(P - gP_i - \Delta)}{\theta(gP_i - P_N + \Delta)\theta(R + gP_i - \Delta)}. \quad (12)$$

三、高亏格紧 Riemann 面上多极点亚纯向量场的代数关系

亏格 $g = 0$ 的情况已在文献[1]中给出. 记 $\phi_{nm}^I(-1, 0)$ 和 $\phi_{nm}^N(-1, 0)$ 为 H_n^I 和 H_n^N , 则有

$$\begin{aligned} H_n^I &= (z - z_1)^{1-n} \partial / \partial z, \quad z_1 = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ H_n^I &= (z - z_i)^{1-n} \partial / \partial z, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad n \geq 2, \\ [H_n^I, H_m^I] &= (n - m) H_{n+m}^I, \\ [H_n^I, H_m^I] &= \sum_{\alpha=2}^{n+1} (2n - \alpha) X_{nm}^I(\alpha) H_\alpha^I \\ &\quad - \sum_{\alpha=2}^{m+1} (2m - \alpha) X_{nm}^I(\alpha) H_\alpha^I, \end{aligned} \quad (13)$$

$$i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1.$$

当亏格 $g = 1$ 时, 我们用 H_n^i 标记(5)式中的 $\phi_0(-1, 1)$, $\phi_{nm}^I(-1, 1)$ 和 $\phi_{nm}^N(-1, 1)$, 则有

$$\begin{aligned} (1) \quad [H_\alpha^i, H_\beta^i] &= \sum_{r=1}^i C_{\alpha,\beta}^i(z_i) H_{\alpha+\beta+r}^i + (\alpha - \beta) \delta_{i+\beta,-3} \cdot N_\alpha^i N_\beta^i H_0^i, \\ &\quad \alpha \neq -1, \quad \beta \neq -1. \end{aligned} \quad (14)$$

这里

$$\begin{aligned} C_{\alpha,\beta}^{-1}(z_i) &= \beta - \alpha, \\ C_{\alpha,\beta}^0(z_i) &= \Phi + 3(\alpha - \beta) \ln' \sigma(2z_i) + (\alpha - \beta) \ln' \sigma(2(\alpha + \beta)z_i), \\ &\quad \alpha + \beta \neq 0, \\ \bar{C}_{\alpha,\beta}^0(z_i) &= \Phi + 2(\alpha - \beta) (\ln' \sigma(2z_i) \cdot \sigma(z_i)), \quad \alpha + \beta = 0, \\ \Phi &= (\beta - \alpha) \sigma''(0) + (1 - \delta_{\beta,-1}) (\beta - \alpha + 1) \ln' \sigma(2(\beta + 1)z_i) \\ &\quad + (1 - \delta_{\alpha,-1}) (\beta - \alpha - 1) \ln' \sigma(2(\alpha + 1)z_i) \\ &\quad + (\delta_{\alpha,-1} \cdot \beta - \delta_{\beta,-1} \cdot \alpha) \ln' [\sigma(z_i)^2 / \sigma(2z_i)], \\ C_{\alpha,\beta}^1(z_i) &= \alpha(\beta - \alpha) \sigma^{-1}(-z_i) \sigma^{-2}(2z_i) \sigma(3z_i) + \delta_{\alpha,0} \cdot \delta_{\beta,0} \cdot \sigma^{-2}(z_i) \\ &\quad \cdot \sigma(2z_i) \sigma^{-1}((\alpha - \beta - 1)z_i) \sigma^{-1}((\alpha - \beta + 1)z_i) \sigma^2((\alpha - \beta)z_i) \\ &\quad \cdot [\ln' [\sigma((\alpha - \beta)z_i) / \sigma^{\alpha-\beta}(z_i)] + (\beta - \alpha + 1) 2\pi i], \\ &\quad \alpha + \beta + 1 = 0, \\ C_{\alpha,\beta}^1(z_i) &= (\alpha - \beta) N_\alpha^i N_\beta^i / N_{\alpha+\beta+1}^i, \quad \alpha + \beta + 2 = 0, \\ C_{\alpha,\beta}^1(z_i) &= C_{-\alpha-1,-\beta-1}^0(-z_i) N_\alpha^i N_\beta^i / N_{\alpha+\beta+1}^i, \\ C_{\alpha,\beta}^2(z_i) &= \begin{cases} \bar{C}_{-\alpha-1,-\beta-1}^0(-z_i) N_\alpha^i N_\beta^i / N_{\alpha+\beta+2}^i, & \alpha + \beta + 2 = 0, \\ (1 - \delta_{\alpha+\beta,-3}) (\alpha - \beta) N_\alpha^i N_\beta^i / N_{\alpha+\beta+2}^i, & \alpha + \beta + 2 \neq 0, \end{cases} \\ N_\alpha^i &= \sigma^\alpha(-2z_i) \sigma(2\alpha z_i) \sigma^{\alpha+1}(2z_i) \sigma^{-1}(2(\alpha + 1)z_i), \end{aligned}$$

$$N_{-1}^i = -1,$$

$$N_0^i = 1.$$

$$(2) \quad [H_{-1}^i, H_\beta^i] = \sum_{r=-1}^3 D_{-1,\beta}^r(z_i) H_{\alpha+\beta+r}^i + \delta_{\beta,-3}(\alpha - \beta) N_{-1}^i N_\beta^i H_0^i, \quad (15)$$

这里

$$D_{-1,\beta}^{-1}(z_i) = C_{-1,\beta}^{-1}(z_i),$$

$$D_{-1,\beta}^0(z_i) = C_{-1,\beta}^0(z_i),$$

$$D_{-1,\beta}^1(z_i) = D_{-1,-\beta-1}^0(-z_i) N_{-1}^i N_\beta^i / N_{\beta+1}^i, \quad \beta \neq -2,$$

$$D_{-1,\beta}^3(z_i) = D_{-1,-\beta-1}^{-1}(-z_i) N_{-1}^i N_\beta^i / N_{\beta+2}^i, \quad \beta \neq -2, -3.$$

$$(3) \quad [H_\alpha^i, H_\beta^i] = \sum_{r \leq 0}^{i-1} D_{\alpha,\beta}^{i,j}(r) H_r^i - \sum_{r \leq 0}^{\beta-1} D_{\beta,\alpha}^{i,i}(r) H_r^i, \\ i < j; \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1, \quad \alpha \leq 0, \\ \alpha = 0, \beta \neq 0, -1; \quad \alpha = -1, \beta \neq 0, -1, \quad (16)$$

这里

$$D_{\alpha,\beta}^{i,i}(\alpha - 1) = -\alpha H_\beta^i(z_i),$$

$$D_{\alpha,\beta}^{i,i}(\alpha) = [-\alpha \sigma''(0) + (3\alpha + \alpha\beta - \beta) \ln' \sigma(2z_i) \\ - (\alpha + 1) \ln' \sigma(2(\alpha + 1)z_i) + (1 - \alpha) \ln' \sigma(2z_i + 2\beta z_j) \\ + \alpha \ln' \sigma(2\alpha z_i)] H_\beta^i(z_i) + (1 - \alpha) \beta \ln' \sigma(2(z_i - z_j)).$$

$$(4) \quad [H_\alpha^i, H_\beta^i] = \sum_{r \geq -2}^2 D_{\alpha,\beta}^{i,i}(r) H_r^i - \sum_{r \geq -2}^{-1} D_{\beta,\alpha}^{i,i}(r) H_r^i, \\ \alpha = 0, \beta = 0, -1; \quad \alpha = -1, \beta = 0, -1, \quad (17)$$

$$(5) \quad [H_\alpha^i, H_\beta^i] = \sum_{1 \leq r \leq \alpha + \beta + 1} E_{\alpha\beta}^{ij}(r) H_r^i - \sum_{0 \leq r \leq \beta - 1} D_{\beta\alpha}^{ij}(r) H_r^i, \\ \alpha > 0, \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (18)$$

这里

$$E_{\alpha\beta}^{ij}(\alpha + \beta + 2) = C_{\alpha,\beta}^2(z_i),$$

$$E_{\alpha\beta}^{ij}(\alpha + \beta + 1) = C_{\alpha,\beta}^1(z_i).$$

以上代数关系(14)–(18)式中所有结构系数都可以用 $\sigma(z)$ 函数表示. 由于这些表达式都相当冗长, 我们略去了结构系数 $D_{-1,\beta}^1$, $D_{-1,-2}^2$, $D_{-1,-3}^3$, $D_{\alpha,\beta}^{i,j}(r)$ 和 $E_{\alpha\beta}^{ij}(r)$ 的具体表达式.

当亏格 $g \geq 2$ 时, 我们用符号 H_{nm}^{in} 和 a_n^i 分别标记(6)式中的 $\phi_{nm}^{in}(-1, g)$ 和 $a_n^i(-1, g)$, 则有代数关系:

$$(1) \quad [H_{nm}^{iN}, H_{lk}^{iN}] = \sum_{\alpha_0 \geq \alpha \geq n+l-1} A_{ni}^{ii}(\alpha) H_{\alpha\beta}^{iN} + \sum_{\alpha+l-1+3g \geq \alpha \geq \alpha_1} B_{ni}^{ii}(\alpha) H_{\alpha\beta}^{iN}, \quad (19)$$

这里

$$\alpha_0 = \min\{-1, n + l - 1 + 3g\},$$

$$\alpha_1 = \max\{0, n + l - 1\},$$

$$A_{ni}^{ii}(n + l - 1) = B_{ni}^{ii}(n + l - 1) = l - n,$$

$$\begin{aligned}
A_{nl}^{ij}(n+l-1+3g) &= (k-m) \frac{b_m^i b_k^j}{b_{m+k-1}^i}, \\
B_{nl}^{ij}(n+l-1+3g) &= (k-m) \frac{b_m^i b_k^j}{b_{m+k-1}^i}, \\
b_m^i &= E(P_N, P_i) \theta((m+1)P_N + nP_i + 3\Delta) a_n^i, \\
(2) \quad [H_{nm}^{in}, H_{lk}^{iN}] &= \sum_{-1 \geq \alpha \geq n-1} A_{nl}^{ij}(\alpha) H_{\alpha\beta}^{iN} - \sum_{-1 \geq \alpha \geq l-1} A_{ln}^{ij}(\alpha) H_{\alpha\beta}^{iN} \\
&\quad + \sum_{n+l-1+3g \geq \alpha \geq 0} B_{nl}^{ij}(\alpha) H_{\alpha\beta}^{iN}, \quad i \neq j, \quad (20)
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
A_{nl}^{ij}(n-1) &= -n H_{lk}^{iN} |_{P=P_i}, \\
A_{ln}^{ij}(l-1) &= -l H_{lk}^{iN} |_{P=P_i}, \\
A_{nl}^{ij}(-1) b_{-1}^i - A_{ln}^{ij}(-1) b_{-1}^i &= \delta_{n+l, -3g} (k-m) b_m^i b_k^j, \\
B_{nl}^{ij}(n+l-1+3g) &= (k-m) \frac{b_m^i b_k^j}{b_{m+k-1}^i}.
\end{aligned}$$

以上(19)和(20)各式中当 $i = j = 1$ 时, n, l 取整数, 当 $i, j = 2, 3, \dots, N-1$ 时, $n, l \leq -1$. 并且 $n+m = k+l = \alpha + \beta = -3g+2$.

当我们完成本文之后, 收到了预印本^[11-13]. 关于球面上多极点亚纯 λ -微分基和亚纯向量场的代数关系, 文献[11-13]中给出了和我们相似的结果.

- [1] 王世坤、沈建民、郭汉英, 物理学报, **39**(1990),
- [2] I. M. Krichever, S. P. Novikov, *Funk. Anal. i. Pril.*, **21**(4)(1987), 47; *ibid.*, **21**(2)(1987), 46.
- [3] L. Bonora, A. Lugo, M. Matone and J. Russo, *Comm. Math. Phys.*, **123**(1989), 329.
- [4] L. Bonora, M. Matone and M. Rinaldi, *Phys. Lett.*, **B216**(1989), 313.
- [5] L. Bonora, M. Rinaldi, J. Russo and K. Wu, *Phys. Lett.*, **B208**(1988), 440.
- [6] J. Albery, A. Taormina and P. Van Baal, *Comm. Math. Phys.*, **249**(1988), 1120.
- [7] L. Bonora, M. Matone, M. Rinaldi and J. Russo, *Phys. Lett.*, **444**(1988), 206.
- [8] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta*, Vol. I, II, Birkhauser, Boston, (1983).
- [9] R. Dick, *Holomorphic Differentials on Punctured Riemann Surfaces*, Talk presented at the workshop: Physics and Geometry, Lake Tahoe 3-8 July 1989. (to appear in the proceedings)
- [10] W. Schlichenmaier, *Krichever-Novikov Algebras for More than Two Points*, preprint KA-THEP-1989-6.
- [11] W. Schlichenmaier, *An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces*, Lecture Notes in Physics, Vol. 322, Springer, (1989).
- [12] W. Schlichenmaier, *Krichever-Novikov Algebras for More than Two Points: Explicit Generators*, preprint KA-THEP-1989-xx.
- [13] S. K. Wang and K. W. Xu, *Phys. Lett. B*, to be published.

THE ALGEBRAS OF MEROMORPHIC VECTOR FIELDS AND THE BASES OF MEROMORPHIC λ -DIFFERENTIALS ON RIEMANN SURFACES (II)

WANG SHI-KUN

Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing, 100080

SHEN JIAN-MIN GUO HAN-YING

Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080

(Received 26 September 1989)

ABSTRACT

The algebras of meromorphic vector fields and the bases of meromorphic λ -differentials with multipoles are constructed explicitly on general genus Riemann surfaces. For Riemann sphere the central extension of the algebra is also given.

PACC: 0210; 0240