

无序电阻网络中的最大电流研究

包 科 达

北京大学物理系, 北京, 100871

熊 家 炯

清华大学现代应用物理系, 北京, 100084

1989年9月12日收到

本文证明, 一个无序电阻网络中的平均最大电流可标度为 $(\ln L)^\alpha$, 这里 L 为网络的线度, 而幂指数 α 不仅与维数和电导率之比有关, 而且还与缺陷的端角 β 有关. 这个结论是从分析含通道的漏斗形缺陷中的电位和电流分布得到的. 文中还对 Machta 等人^[1]和 DBL^[2,3] 理论预言过的, 当 $\sigma_2 \rightarrow 0$ 时幂指数 α 的差异, 提出一个定性的解释.

PACC: 7215

一、引 言

本文研究无序电阻网络中影响电流平均值的物理因素. 推动人们作这类研究的考虑在于解释各类复合材料中发生的电猝灭或机械猝断现象的本质. 电的或者机械的猝断是限制现代陶瓷、薄膜、绝缘体和其它结构的复合材料实际应用的主要因素. 尽管已经作了大量观测, 积累了不少实验数据, 但对导致猝断的微观过程的了解仍然很少. 然而, 有一点是清楚的, 系统中的缺陷对猝断的发生, 起十分重要的作用, 常常由于少量的临界缺陷的存在, 确定了整个系统的猝断的强度.

Arcangelis 等人^[4]引进、并为 Duxbury, Beale 和 Leath (下面简称 DBL)^[2,3] 仔细研究过的无序熔丝网络, 就是一种研究猝断现象较为有效的模型. 引起了广泛的关注和兴趣.

设有线度为 L 的正方或立方“棒”结构电阻网络, 每根棒的电导为 σ , 可分别以概率 p 和 $(1-p)$, 统计独立地取 σ_1 和 σ_2 两种数值:

$$p(\sigma) = p\delta(\sigma - \sigma_1) + (1-p)\delta(\sigma - \sigma_2),$$

式中电导率之比 $0 \leq \sigma_2/\sigma_1 \leq 1$. 网络的两端面接上蓄电池, 流过单位长度的平均电流密度为 $\bar{j}$. 设 i_m 为流过 d 维网络的最大电流, 而用 $\langle i_m \rangle$ 表示它对网络中电导分布位形的平均值. 要回答的问题是, $\langle i_m \rangle$ 是如何依赖于网络线度 L 的? 本文对含通道的漏斗形缺陷的分析和研究后得到的结论是, 当 L 相当大时,

$$\langle i_m \rangle \sim \bar{j}(\ln L)^\alpha. \quad (1)$$

这里幂指数 α 不仅和电导率之比 $s^2 = (\sigma_1/\sigma_2)$ 有关, 还与形成最大电流处的缺陷的端角

β 有显著关系. 对于一个 d 维网络,

$$\alpha = (1 - \lambda_{\min})/d. \quad (2)$$

这里 $\lambda_{\min}(s^2, \beta)$ 为最小本征值. 和端角

$$\beta = (\pi^2/8) \left\{ \arcsin \left[\left(\frac{s-1}{s+1} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right\}^{-1} \quad (3)$$

相应的最小本征值为

$$\lambda_{\min} = (2/\pi) \arcsin \left[\left(\frac{s-1}{s+1} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2}. \quad (4)$$

这个结果与 Machta 和 Guyer^[1] 从无通道 ($\delta = 0$) 漏斗形缺陷得到的结论有明显的差别. DBL 讨论了 $\sigma_2 = 0$ 的置向与平均电流相垂直的细长绝缘线 ($d = 2$) 和圆盘 ($d = 3$) 型缺陷的最大电流问题, 得到的幂指数 $\alpha \sim (1/(d-1))$, 这与 Machta 等人得到的 $\alpha \sim (1/d)$ 不同. 应用本文的结果, 可对两者的差异作出定性的解释.

二、含通道漏斗形缺陷中的最大电流

方格点阵“棒”无序网络中的“漏斗”形缺陷, 是研究最大电流的典型位型. 它能迫使电流沿高电导介质汇聚到端角附近, 达到最大值. 当缺陷的特征线度 l 足够大 ($l \gg a$, 这里 a 为点阵间距) 时, 缺陷可近似处理为连续介质, 但在端角附近至少存在宽为 a 数量级的通道. 为了改善 Machta 等人的工作, 下面讨论通道宽度为 δ 的漏斗形缺陷中的最大电流问题.

设有如图 1 所示的线度为

$$l = (l_1 l_2)^{1/2}$$

的含通道的漏斗形缺陷. 四分形部分的电导率分别为 σ_1 和 σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2$), 外加电场 E 沿 X 轴方向. 设 $U(r, \theta)$ 为位置 (r, θ) 处的电位, 则电流密度 $j(r, \theta)$ 满足连续方程

$$\nabla \cdot j = 0, \quad (5)$$

和欧姆定律

$$j(r, \theta) = -\sigma(r, \theta) \nabla U(r, \theta). \quad (6)$$

由于对称性, 只讨论缺陷的上半部, 应用分离变量法: $U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. 径向变量方程的解为 $R(r) = r^\lambda$, $\lambda \geq 0$, 以保证端点 O' 处的电位有限. 辐角方程为

$$\left[\frac{d}{d\theta} \sigma(\theta) \frac{d}{d\theta} + \lambda^2 \sigma(\theta) \right] \Theta(\theta) = 0,$$

其中电导率 $\sigma(\theta)$ 只是 θ 的函数, 满足以下分布:

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{当 } -(\pi/2) < \theta < \beta \text{ 或 } \pi - \beta < \theta < (3\pi/2); \\ \sigma_2 & \text{当 } \beta < \theta < \pi - \beta. \end{cases}$$

电位分布必须满足对称性条件, 故不存在穿过 X 轴的电流, 而 Y 轴是 $U = 0$ 的等位线. 经过 σ 的间断面时, 电流密度的法向分量和电场的切向分量连续,

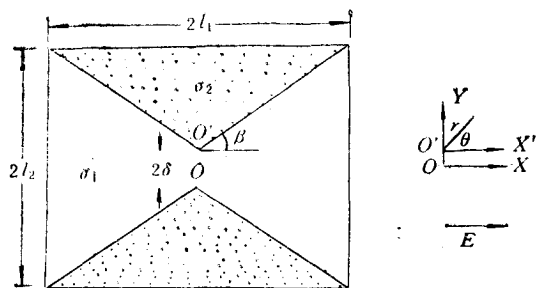


图 1 含通道的漏斗形缺陷

$$U_1(\beta) = U_2(\beta) \quad \text{和} \quad \sigma_1 dU_1(\beta)/d\theta = \sigma_2 dU_2(\beta)/d\theta. \quad (7)$$

可得到以下电位分布:

$$\begin{aligned} U_1(\rho, \theta) &= [H/\sin(\lambda\pi/2)]\rho^\lambda \{ \sin \lambda(\pi/2 + \theta) + [\cos^2 \theta + (\sin \theta + 2\delta^*/\rho)^2]^{\lambda/2} \\ &\quad \cdot \sin \lambda(\pi/2 - \arctan[(\sin \theta + 2\delta^*/\rho)/\cos \theta]) \} \quad -(\pi/2) < \theta < \beta, \\ U_2(\rho, \theta) &= [H/\sin(\lambda\pi/2)]\rho^\lambda \sin \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad \beta < \theta < (\pi - \beta), \\ U_3(\rho, \theta) &= -U_1(\rho, \pi - \theta) \quad (\pi - \beta) < \theta < (3\pi/2), \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\delta^* = \delta/l$, $\rho = r/l$, $l = (l_1 l_2)^{1/2}$.

再应用条件(7)式得到本征值方程为

$$\begin{aligned} s^2 \{ \cos \lambda(\pi/2 + \beta) - (\cos \beta / \cos \eta)^{\lambda-1} \cos [(\lambda-1)\eta + \beta - \lambda\pi/2] \} \\ + \cot \lambda(\pi/2 - \beta) \{ \sin \lambda(\pi/2 + \beta) + (\cos \beta / \cos \eta)^\lambda \sin \lambda(\pi/2 - \eta) \} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

式中

$$\eta = \arctan[(\sin \beta + 2\delta^*/\rho)/\cos \beta]. \quad (10)$$

注意到本征值方程(9)中出现变量 ρ . 但是当 $\delta^* = 0$ 时, 回复到无通道时的本征值方程 $s^2 \tan \lambda\beta - \cot \lambda(\pi/2 - \beta) = 0$. 这就是 Machta 等人得到的结果. 事实上, 最大电流发生在端角附近, 因此可以设(9)式中的 $(\delta^*/\rho) \rightarrow \infty$, 得到有通道时的本征值方程为

$$s^2 \cot \lambda(\pi/2 + \beta) + \cot \lambda(\pi/2 - \beta) = 0. \quad (11)$$

这说明, 电位 U 的全解为由(11)式得出的一组本征值相应的本征函数之和, 但在靠近端点 O' 处的电位的行为主要由对 ρ 变量奇异性最强的本征函数决定, 即由最小本征值决定, 而且 $0 < \lambda_{\min} < 1$. 不难由(11)式求得, $\lambda_{\min}$ 值出现在

$$\beta = (\pi^2/8) \left\{ \arcsin \left[\left(\frac{s-1}{s+1} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right\}^{-1}$$

处, 它的数值为

$$\lambda_{\min} = (2/\pi) \arcsin \left[\left(\frac{s-1}{s+1} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2}.$$

上列结果说明, 含通道漏斗形缺陷的最小本征值, 不同于 Machta 等人的结果, 不仅与电导率比 s^2 有关, 而且明显地与端角 β 值有关. 当 s^2 从 1 改变到无穷时, β 角从 $(\pi/4)$ 变化到 $(\pi/2)$.

电流密度与电位梯度成正比, 因此可以求得宽为 2δ 通道内的平均电流密度为

$$|j| = [\lambda_{\min} H / \sin(\lambda_{\min} \pi/2)] (\delta/l)^{\lambda_{\min}-1}. \quad (12)$$

当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 端点处的电流密度趋向无穷大. 有限宽通道中, 平均电流密度可以很大, 但仍取有限值, 它与缺陷线度之间关系为 $(\sim l^{1-\lambda_{\min}})$.

在线度为 L 的两维网络中找到尺寸 l 的缺陷的概率 $P(l)$ 为

$$P(l) = 1 - \exp(-KL^2). \quad (13)$$

这里 $K(l)$ 是一个线度为 l 的方阵形成如图 1 所示漏斗形位形的概率, 通道半宽度 δ 是与点阵间距 a 同数量级的量, 因此, 当缺陷线度足够大时, 条件 $a \ll l \ll L$ 满足, 可相当正确地认为

$$K(l) = [p(1-p)]^{2l}. \quad (14)$$

若设 $a = 1$, $4l^2 = 4l_1l_2$ 表示组成漏斗形位形的格点数. 当 l 相当大时, $K(l)$ 很小, 即缺陷稀疏地分布在网络之中. $K(l)$ 就是分布的密度, 而 KL^2 表示网络中总的缺陷的数目. 当这个数很大时, $P(l) \approx 1$, 容易在网络中找到线度为 l 的缺陷; 当此数小时,

$$P(l) \approx 0,$$

缺陷难于找到.

应用 (13) 式, 可以计算平均电流密度如下:

$$\langle i_m \rangle \sim j \int_0^\infty dl l^{1-\lambda_{\min}} P(l) \int_0^l dx P(x) / \int_0^\infty dx P(x). \quad (15)$$

这个积分的主要贡献来自 $K(l)L^2$ 的数量级为 1 时的 l 值, 故此 l 值正比于 $(\ln L)^{1/2}$. 因此

$$\langle i_m \rangle \sim j (\ln L)^\alpha,$$

式中幂指数

$$\alpha = (1/2)(1 - \lambda_{\min}).$$

即得到 (1) 式和 $d = 2$ 时的 (2) 式. 现在再应用前面得到的 (3) 和 (4) 式, 可得

$$\alpha = (1/2) \left\{ 1 - (2/\pi) \arcsin \left[\left(\frac{s-1}{s+1} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right\}. \quad (16)$$

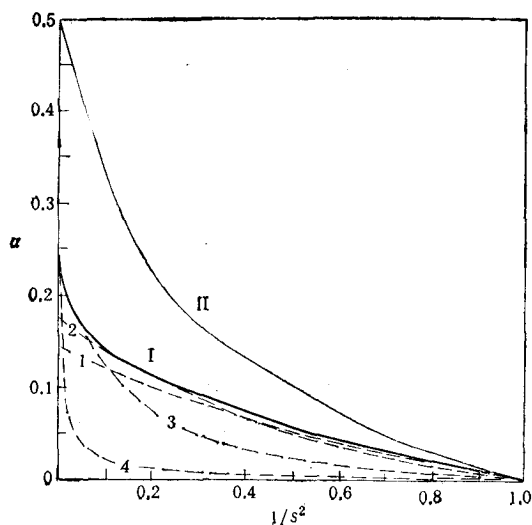


图 2 当 $d = 2$ 时, 本文所得幂指数 α 与 Machta 等人所得结果的比较 I 为本文结果; II 为 Machta 等人结果

与此幂指数相应的端角 β 的数值, 可由 (3) 式计算得到. 在图 2 中画出幂指数 α 随电导率比 s^{-2} 和端角 β 值的变化情况. 其中曲线 1, 2, 3 和 4 分别对应于端角 $\beta = \pi/4, \pi/3, 4\pi/9$ 和 $89\pi/180$. 为了比较, 在图 2 中还给出 Machta 等人的结果. 本结果表明, 当 $s^2 \rightarrow \infty$ 时, 最易出现最大电流的端角, 并非文献 [1] 中预言的 45° , 而是接近 90° ; 只当 $s^2 \simeq 1$ 时, 这个角度才为 45° . 当两种介质的电导率差别很大时, 大端角的漏斗形缺陷将迫使电流沿高电导的介质汇集到端角附近, 使之达到较小端角时更大的电流密度, 这在物理上是可以理解的. 端角 β 严格等于 90° 时, 漏斗形缺陷转变为线缺陷, 导致 $s^2 = \infty$ 处的幂指数间断性改变, 将在第四节中讨论.

三、三维网络中的最大电流

计算三维 ($d = 3$) 网络中的最大电流和上面二维 ($d = 2$) 时的计算十分相似. 为简单起见, 设在三维网络中存在如图 3 所示的立体漏斗形缺陷. 选取柱坐标系 (r, θ, Z) ,

并分离变量,可得到以下形式的电位分布:

$$\begin{aligned} U_1(\rho, \theta, z) &= \sum_n \sum_m H_{nm} J_{\lambda_n}(\nu_m \rho) \cos \nu_m(1-z) \Theta_{n1}(\theta) \quad -(\pi/2) < \theta < \beta, \\ U_2(\rho, \theta, z) &= \sum_n \sum_m H_{nm} J_{\lambda_n}(\nu_m \rho) \cos \nu_m(1-z) \Theta_{n2}(\theta) \quad \beta < \theta < (\pi - \beta), \quad (17) \\ U_3(\rho, \theta, z) &= -U_1(\rho, \pi - \theta, z) \quad (\pi - \beta) < \theta < (3\pi/2), \end{aligned}$$

式中 $J_\lambda(x)$ 为贝塞耳函数,它在 $x \rightarrow 0$ 时的行为和 x^λ 相同^[1]. 本征值

$$\nu_m = m\pi (m = 0, 1, 2, \dots),$$

以保证与 Z 轴相垂直的端面上,不存在法向电流,式中的无量纲变量 $\rho = r/l$, $z = Z/l$, $l = (l_1 l_2)^{1/2}$. 确定本征函数 $\Theta(\theta)$ 的微分方程与二维时相同,若再考虑到相对角变量 θ 的边值条件也与二维时一样,因此由 $\theta = \beta$ 处电流的法向分量和电场的切向分量连续条件得出的

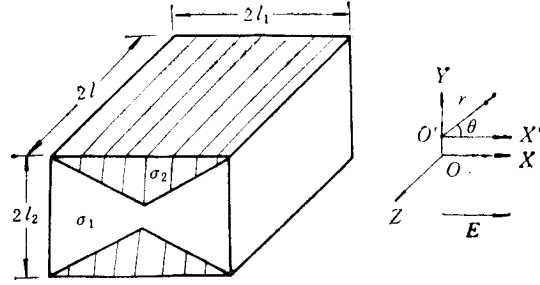


图3 三维含通道的漏斗形缺陷

本征值 λ_n 的方程仍为(9)式,因此,确定最小本征值 $\lambda_{\min}$ 的(3)和(4)式对三维问题仍

旧有效. 但确定幂指数的(2)式中的维数 $d = 3$, 这是因为在三维的情况下,形成一个线度为 l 的立体漏斗形缺陷的概率 $K(l)$ 应为 $[p(1-p)]^{4/3}$. 现在可以写出带通道立体漏斗形缺陷的幂指数为

$$\alpha = (1/3) \left\{ 1 - (2/\pi) \arcsin \left[\left(\frac{s-1}{s+1} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right\}, \quad (18)$$

相应的端角 β 取以下数值:

$$\beta = (\pi^2/8) \cdot \left\{ \arcsin \left[\left(\frac{s-1}{s+1} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right\}. \quad (19)$$

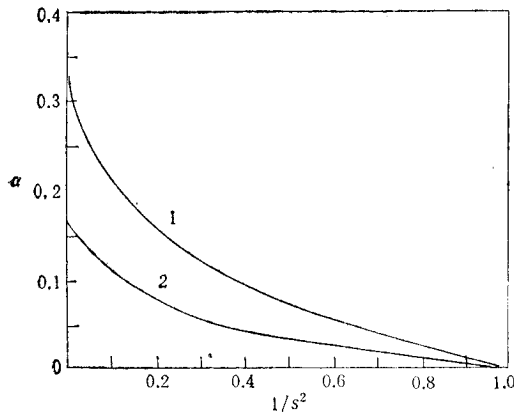


图4 当 $d = 3$ 时, 本文所得幂指数 α 与 Machta 等人所得结果的比较 1 为 Machta 等人结果; 2 为本文结果

图4中画出三维时,按(18)式计算的结果,为了比较同时画出 Machta 等人所得的结果.

四、讨 论

本文为了克服 Machta 等人应用无通道漏斗形缺陷讨论方格点阵中最大电流时存在的问题,分析了含通道漏斗形缺陷中的电位和电流分布情况. 研究表明,即使在通道宽度 2δ 很小的情况下,平均的最大电流密度,不仅与两介质的电导率比 s^2 有关,而且还显著地与端角 β 有关. 只当 $s^2 \approx 1$ 时,才能得到与文献[1]中给出的相同结果,即最小本征值

$\lambda_{\min}$ 出现在 $\beta = \pi/4$ 处. 当 $s^2 \rightarrow \infty$ 时, 端角 β 接近 90° 的缺陷才给出最小本征值 ($\lambda_{\min} = 0.5$). 在 s^{-2} 从 1 变化至 ∞ 的范围内, 表征网络中平均最大电流与其线度关系的幂指数 α 的变化, 由 (4) 式确定, 可用图 2 上的包络线 I 表示. 相应端角 β 的数值可由 (3) 式计算得到, 文中也证明了, 无通道 ($\delta = 0$) 时, 由本文的 (9) 式, 可以得出 Machta 等人的结果. 本文计算表明, 轻易地忽略通道的存在是不可取的, 因为当两种介质的电导率差别很大时, 大端角的缺陷将较有效地迫使电流沿高电导的介质流动, 汇集到端角附近, 使之达到比小端角时更大的电流密度,

其次, 本文与 Machta 等人都得到, 当 $s^2 \rightarrow \infty$ 时, 幂指数 $\alpha \sim 1/d$, 但 DBL 求得, 当 $\sigma_2 = 0$ 时, 幂指数 $\alpha \sim 1/(d-1)$. 事实上, DBL 理论中研究的缺陷, 是置于与平均电流相垂直的一根绝缘线 ($d=2$) 或一个绝缘圆盘 ($d=3$), 最大电流发生在这些绝缘介质的边缘处. 倘若把 DBL 理论中的绝缘线看作本文前面引进的带通道漏斗形缺陷的一个特殊情况, 此时的端角 $\beta = \pi/2$, 则相应的形成线度为 l 的绝缘线的概率应正比于 $[p(1-p)]^l$, 所以得到 $\langle i_m \rangle \approx (\ln L)^\alpha$, 这里 $\alpha = 1 - \lambda_{\min}$, 或者 $(1 - \lambda_{\min})/(d-1)$. 这就是 DBL 得到的结果. 因此, 对于绝缘线 ($\beta = \pi/2$), $\alpha = 0.5$. 注意到这种从 β 角非常接近 90° 到它严格等于 90° 的变化, 引起的幂指数 α 数值的变化, 是跳跃式的, 因为只要端角 β 不严格地等于 90° , 漏斗形位形中四分之一所含的格点数目, 总等于 $P \approx (l_1 l_2)$, 与 β 角无关. 只当 β 严格等于 90° 时, 才会发生跳跃性的变化. 这在图 2 中画出了这种间断性的改变.

- [1] J. Machta and R. A. Guyer, *Phys. Rev.*, **B 36** (1987), 2142.
- [2] P. M. Duxbury, P. L. Leath and P. D. Beale, *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1987), 367.
- [3] P. M. Duxbury, P. D. Beale and P. L. Leath, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, (1986), 1052.
- [4] L. de Arcangelis, S. Redner and H. J. Herrmann, *J. Phys. (Paris) Lett.*, **46**(1985), L585.
- [5] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数论, 科学出版社, (1979), 384 页.

INVESTIGATION OF THE LARGEST CURRENT IN A RANDOM RESISTOR NETWORK

BAO KE-DA

Department of Physics, Peking University, Beijing, 100871

XIONG JIA-JIONG

Department of Modern Applied Physics, Tsinghua University, Beijing, 100084

(Received 12 September 1989)

ABSTRACT

In this paper it is shown that the expected largest current in a random resistor network can be scaled as $(\ln L)^\alpha$, where L is the size of the network and the exponent α not only depends on dimension and the ratio of two conductances in the network, but also depends on the value of vertex angle β of the defects remarkably. This result follows from an analysis of the funnel configuration with a channel in it. Here we have also suggested a qualitative explanation concerning the difference in the values of exponent α when $\sigma_2 \rightarrow 0$ of Machta *et al.*^[1] and DBL theory^[2,3].

PACC: 7215