

交流 Josephson 效应中的有限波数影响*

吴 颖 姚 凯 伦

华中理工大学物理系, 武汉, 430074

1989 年 10 月 31 日收到

本文指出, 由于电磁波在 Josephson 结势垒中的波长远小于其真空波长并已达到典型 Josephson 结的线度量级, 应该考虑 $k \neq 0$ 的有限波数效应. 本文导出微波场辐照条件下计入了有限波数效应的 Josephson 结超电流公式, 它也适用于还存在静态磁场的情况. 对该公式的分析表明: 有限波数效应和数量级很小的静态磁场 (如 $\leq 0.1\text{G}$) 就可能对微波诱生的常电压电流台阶产生重要影响. 例如, 偏置电压 $V_0 = n\hbar f/2e$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处的台阶可能对某些 n 值不存在的缺级现象, 特别是可能出现所有偶 (奇) n 值对应的台阶不存在的偶 (奇) 缺级现象; $I-V$ 曲线不对称等等.

PACC: 7450

一、引 言

自从 Josephson 提出弱耦合超导体并讨论其隧道结的行为后^[1], 有关 Josephson 隧道结 (以下简称约结) 在静态磁场下的行为以及在外加微波场辐照下诱生常电压电流台阶 (以下简称台阶) 的交流效应, 在实验和理论上已作了不少研究^[2-8]. 可是交流效应的理论研究仅限于有限波数效应可忽略的情况, 即认为微波波长 λ 很大于约结的线度, 形式上可取 $k = 2\pi/\lambda = 0$. 即使对大面积约结 (典型尺度为 $1 \times 1\text{mm}^2$) 而言^[9], 其线度 ($\sim 1\text{mm}$) 仍远小于典型交流 Josephson 效应实验中的微波的真空波长 (例如 $f = 12\text{GHz}$ ^[9] 和 36GHz , 真空波长值分别为 2.5cm 和 0.83cm), 似乎没有必要考虑 $k \neq 0$ 的有限波数效应. 但是在约结势垒中传播的电磁波, 其波长并不是真空波长, 它必须根据下列势垒中满足的电磁波色散关系来计算^[13]:

$$f/f_0 = k^2\lambda'^2 + 1. \quad (1)$$

对典型的约结, f_0 和 λ' 分别为 GHz 和 mm 数量级^[3]. 利用 (1) 式, 取 $f_0 = 1\text{GHz}$ 可估算出 $f = 12\text{GHz}$ (36GHz) 对应的波长为 $0.52\lambda'$ ($0.174\lambda'$), 因此波长已达典型约结线度量级, 应该考虑 $k \neq 0$ 的有限波数效应. 由于在屏蔽室中进行的实验, 也可能不能屏蔽掉地磁场数量级 ($\sim 0.3\text{G}$) 的静态磁场的影响^[8], 因此将同时考虑静态磁场和微波场的存在并计入有限波数效应的情况. 对本文得到的超电流公式进行估算表明: 对大面积约结而言, 0.1G 或更小的静态磁场与有限波数效应结合起来考虑可以对微波辐射场诱生

* 国家自然科学基金资助的课题.

台阶产生重要影响。

根据上述理由, 将从弱耦合近似下约结的基本方程出发, 导出存在静态磁场和微波辐射场并计及有限波数效应影响时约结超电流公式并进行讨论。指出本文理论可以解释若干“反常”现象, 例如缺级现象^[5-7], I - V 曲线不对称^[7]等等。而这些现象用过去的理论是难以解释的。

二、超电流公式的推导

为叙述方便, 假定约结为“超导体-绝缘氧化层-超导体”形式的薄膜隧道结。得到的超电流公式可适用于任何形式的约结, 例如以正常金属或半导体材料来代替氧化层, 微桥型, 点接触型等等。设氧化层平面为 xy 平面, z 方向为超电流流动方向, 与氧化层平面平行的方向上存在静态磁场 $\mathbf{H}_0 = H_{0x}\mathbf{x} + H_{0y}\mathbf{y}$, 层内存在频率为 f 波矢沿 y 方向, 偏振方向为 z 方向的平面线偏振电磁波,

$$\mathbf{E}_s(y, t) = E_s \cos(\omega t - ky + \theta)\mathbf{z}, \quad (2a)$$

$$\mathbf{H}_s(y, t) = \frac{ckE_s}{\omega} \cos(\omega t - ky + \theta)\mathbf{x}, \quad (2b)$$

式中 $\omega = 2\pi f$ 由外加微波辐射场决定, θ 为波的常相位因子, 波数 k 由 (1) 式计算, 它不是真空值。在上述条件下, 弱耦合近似下的约结基本方程组可以写成^[3]

$$j = j_c \sin \phi \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{ae}{\hbar} [V_0 + V_s \cos(\omega t - ky + \theta)], \quad (3b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2edH_y}{\hbar c} = \frac{2ed}{\hbar c} H_{0y}, \quad (3c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2edH_x}{\hbar c} = -\frac{2ed}{\hbar c} \left[H_{0x} + \frac{ckV_s}{\omega d} \cos(\omega t - ky + \theta) \right], \quad (3d)$$

式中 j 为超电流密度, ϕ 代表两块超导体的序参数位相之差, $d = t_1 + 2\lambda_1$, t_1 为氧化层厚度, λ_1 为磁场穿透深度, V_0 为约结两端偏置的直流电压, (3b) 式等号右边第二项为波电场产生的电压, 已记 $V_s = E_s d$, (3d) 式等号右边第二项为波的磁场。由 (3) 式不难积分得到

$$\phi = \phi_0 + \frac{2ed}{\hbar c} (xH_{0y} - yH_{0x}) + \frac{2eV_0}{\hbar} t + \frac{2eV_s}{\hbar} \sin(\omega t - ky + \theta). \quad (4)$$

假定约结的长度和宽度均为 l , 则通过结的总电流 I 为

$$I = \iint_{-l/2}^{l/2} dx dy j_c \sin \phi.$$

由 (4) 式给出的 ϕ 表达式, 利用傅里叶-贝塞尔展开公式

$$e^{ib \sin a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b) e^{in a},$$

经过简单的运算, 就得到本文所需通过约结总超电流 I 的表达式

$$I/I_c = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{2eV_s}{\hbar\omega} \right) F_n \sin \left[\left(n\omega + \frac{2eV_0}{\hbar} \right) t + \phi_n \right], \quad (5)$$

式中

$$F_n = \frac{\sin \left(\pi \frac{\Phi_y}{\Phi_0} \right)}{(\pi \Phi_y / \Phi_0)} \cdot \frac{\sin \left(\pi \frac{\Phi_x}{\Phi_0} + n \frac{kl}{2} \right)}{\left(\pi \Phi_x / \Phi_0 + n \frac{kl}{2} \right)}. \quad (6)$$

在(5), (6)两式中, $I_c = j_c l^2$, $\Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{2e} = \frac{hc}{2e} = 2 \times 10^{-7} \text{G} \cdot \text{cm}^2$ 为磁通量子,

$$\phi_n = \phi_0 + n\theta, \quad \Phi_x = H_{0x}ld, \quad \Phi_y = H_{0y}ld.$$

(5) 式是同时考虑静态磁场和外加微波辐射场的存在并计及有限波数效应影响下较为普遍的超电流表达式. 目前所有描述 Josephson 效应的超电流公式均可由它导出. 在(5)式中取 $V_0 = V_s = 0$, 即不考虑直流偏置电压和外加微波辐射场, 利用 $J_n(0) = \delta_{n,0}$, $\left(\frac{\sin x}{x} \right)_{x \rightarrow 0} = 1$ 就可得到

$$I/I_c = \frac{\sin(\pi H_0 ld / \Phi_0)}{(\pi H_0 ld / \Phi_0)} \sin \phi_0, \quad (7)$$

式中已假定静态磁场 H_0 平行 x (或 y) 轴, 即取 $H_0 = H_0 x$ 或 $H_0 y$. (7) 式是描述直流 Josephson 效应的常用公式^[2,3,10]. 如果取 $H_{0x} = H_{0y} = 0$ 和 $k = 0$, 即不考虑静态磁场和有限波数效应的影响, 则(6)式给出的 $F_n = 1$, 由此得到描述交流 Josephson 效应的常用公式^[2-4,10]

$$I/I_c = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{2eV_s}{\hbar\omega} \right) \sin \left[\left(n\omega + \frac{2eV_0}{\hbar} \right) t + \phi_n \right]. \quad (8)$$

由此可见, (5) 式是较为普遍的超电流表达式. 不难把(5)式结果推广到电磁波可沿 xy 平面任意方向传播这种更一般的情况, 但本文不准备进行这种推广, 因为(5)式已足以说明问题. 下面对(5)式给出的超电流进行讨论.

三、有限波数效应和静态磁场的影响

由(5)式可以看出, 在频率为 f 的微波场辐照下, 当直流偏置电压 V_0 满足

$$V_0 = n\hbar\omega/2e = nhf/2e \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9)$$

时, 通过约结的总超电流 I 不仅存在频率为 f 和其谐频的交变分量, 而且还存在直流分量

$$I_{dcn} = (-1)^n J_n \left(\frac{2eV_s}{\hbar\omega} \right) F_{-n} \sin(\phi_0 - n\theta), \quad (10)$$

式中

$$F_{-n} = \frac{\sin(\pi \Phi_y / \Phi_0)}{(\pi \Phi_y / \Phi_0)} \cdot \frac{\sin \left(\pi \frac{\Phi_x}{\Phi_0} - n \frac{kl}{2} \right)}{\left(\pi \frac{\Phi_x}{\Phi_0} - n \frac{kl}{2} \right)}. \quad (11)$$

在给出 (10), (11) 两式时, 已先在 (5) 式中作了 $n \rightarrow -n$ 变换, 并利用了

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \text{ 和 (9) 式.}$$

如果取 $F_{-n} = 1$, 则 (10) 式变成不考虑静态磁场和有限波数效应时的表达式^[3,4,10]

$$I_{dcn} = (-1)^n J_n \left(\frac{2eV_s}{\hbar\omega} \right) \sin(\phi_0 - n\theta). \quad (12)$$

(10) 或 (12) 式的结果必然会在约结的直流 $I-V$ 曲线上表现出来, 形成在微波场辐照下诱生的台阶. 利用 $J_{-n}(-x) = J_n(x)$ 性质以及通过平移时间轴使微波的常相位因子 $\theta = 0$, 就可看出 (12) 式给出的 I_{dcn} 具有 $I_{dcn} = I_{dc-n}$ 性质, 实际上取 $k = 0$ 的 (10) 式也具有这种特性, 因此忽略有限波数效应时, $I-V$ 曲线的台阶形态应该对 $I-V$ 平面的原点具有反射对称性. 但在计及有限波数效应并同时存在垂直于波数方向上的静态磁场(无论多么小)就会丧失这种对称性. 因此实验观察到的不对称现象^[7], 就不难得到解释.

由 (10), (11) 两式看出, 平行于波传播方向 (y) 上的静态磁场 H_{0y} 对微波场诱生台阶的影响归结为台阶的阶跃量乘以衍射因子

$$\sin(\pi\Phi_y/\Phi_0)/(\pi\Phi_y/\Phi_0), \quad (13)$$

式中 $\Phi_0 = 2 \times 10^{-7} \text{G} \cdot \text{cm}^2$ 为磁通量子, $\Phi_y = H_{0y}ld$, l 为约结截面的线度, $d = t_1 + 2\lambda_1$, t_1 为氧化层厚度, λ_1 为磁场穿透深度. 由 (13) 式看出, 当 $\Phi_y \gg \Phi_0$ 时, 台阶的阶跃量将大大减小, 甚至完全等于零. 现在估算 $\Phi_y = \Phi_0$ 时 H_{0y} 的数量级, 对高、低温超导材料 λ_1 的典型值均为 10^{-5}cm 数量级^[2,7], 因此取 $d = 2 \times 10^{-5} \text{cm}$, 代入

$$\Phi_y = \Phi_0 = 2 \times 10^{-7} \text{G} \cdot \text{cm}^2$$

可得

$$H_{0y} = \frac{10^{-7} \text{cm}}{l} \text{G} = \begin{cases} 0.1 \text{G}, & \text{取 } l = 1 \text{mm}; \\ 0.33 \text{G}, & \text{取 } l = 0.3 \text{mm}. \end{cases} \quad (14)$$

由此可见, 地磁场数量级 ($\sim 0.33 \text{G}$) 的静态磁场 H_{0y} 已能对微波场诱生台阶产生重要影响, 甚至导致完全观测不到台阶现象.

下面讨论垂直于波传播方向 (y) 上静态磁场 H_{0x} 与有限波数效应导致的缺级现象. 由 (10) 和 (11) 式知道, 它们的影响可归结为台阶的阶跃量乘以因数

$$F_n = \frac{\sin\left(n \frac{kl}{2} - \pi \frac{\Phi_x}{\Phi_0}\right)}{\left(n \frac{kl}{2} - \pi \frac{\Phi_x}{\Phi_0}\right)}, \quad (15)$$

式中 k 不是真空波数, 它应根据 (1) 式计算得出. 由于 (1) 式中存在与约结的具体性质 (例如材料, 几何因素等) 有关的特征量 f_0 和 λ' , 定量计算 k 的大小已超出本文范围. 但在引言部分, 已根据 f_0 和 λ' 的典型值进行估算得知求出的波长已同典型约结的线度数量级相当, 因此下面对几种特殊情况讨论 (15) 式的影响.

$$1. kl = (2m+1)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$kl = \pi$ 表示约结的长(宽)度 l 等于微波场在氧化层内的半波长, 注意不是真空值.

如果 $H_{0x} = 0$ (即 $\Phi_x = 0$), 则 (15) 式变成

$$F'_n = \frac{\sin \left[n \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \right]}{\left[n \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \right]}. \quad (16)$$

因此所有 $n \neq 0$ 的偶数对应的 $F'_n = 0$, 导致所有非零偶数对应的微波场诱生台阶均不出现, 这就是所谓偶缺级现象.

如果 $H_{0x} \neq 0$, 使得 $\Phi_x/\Phi_0 = \left(m_1 + \frac{1}{2} \right)$ 为半整数, 则 (15) 式变成

$$F'_n = \frac{\sin \left[\pi \left(nm - m_1 + \frac{n-1}{2} \right) \right]}{\left[\pi \left(nm - m_1 + \frac{n-1}{2} \right) \right]}. \quad (17)$$

由 (17) 式可知, 如果 $\left(m_1 + \frac{1}{2} \right) / \left(m + \frac{1}{2} \right)$ 不是整数, 则所有 n 为奇整数的 F'_n 均为零, 导致所有奇数 n 对应的台阶均不出现 (奇缺级现象). 因此这有可能是实验观察到的奇缺级现象^[5,6]的原因. 如果 $\left(m_1 + \frac{1}{2} \right) / \left(m + \frac{1}{2} \right)$ 为奇整数, 则除这个奇整数对应的台阶可能存在之外, 其余奇整数台阶仍不出现 (几乎奇缺级现象).

如果 Φ_x/Φ_0 充分大, 则除了 n 在 $2\pi\Phi_x/(kl\Phi_0)$ 附近之外, F'_n 的值都很小, 但通常 n 较大时, (10) 式中 J_n 较小, 因此 Φ_x/Φ_0 较大时 (例如大于 5) 也可能导致完全观测不到台阶效应.

2. $kl = 2m\pi$, $m = 1, 2, \dots$

$kl = 2m\pi$ 表示约结长度 l 是微波场在氧化层内波长的 m 倍, 此时 (15) 式变为

$$F'_n = \frac{\sin \pi(nm - \Phi_x/\Phi_0)}{\pi(nm - \Phi_x/\Phi_0)}. \quad (18)$$

如果 $\Phi_x/\Phi_0 =$ 整数, 除 $\Phi_x/m\Phi_0$ 为整数时对应的 $F'_n \neq 0$ 之外, 其余所有 F'_n 均为零, 导致几乎完全缺级现象.

3. $kl = 2\pi/m$, m 为大于 2 的整数

此时 (15) 式变为

$$F'_n = \frac{\sin \pi \left(\frac{n}{m} - \Phi_x/\Phi_0 \right)}{\pi(n/m - \Phi_x/\Phi_0)}. \quad (19)$$

当 $\Phi_x = 0$ 时, n/m 为非零整数的 $F'_n = 0$, 导致部分缺级现象, 同理可讨论 $\Phi_x \neq 0$ 的部分缺级现象. 部分缺级的实验结果^[7]可能由 (19) 式给予解释.

限于篇幅, 本文不准备详细讨论所有可能的缺级现象, 但从上述若干情况的讨论结果可知, 实验发现的缺级现象完全可以由静态磁场和有效波数效应给予合理解释.

四、结 论

由于约结中传播的电磁波满足完全不同于真空传播时的色散关系, 结中的波长远小

于对应的真空波长值并可达到约结线度数量级, 因此有限波数效应应该予以考虑。根据这种想法, 从弱耦合近似下的约结基本方程组出发, 导出微波场辐照下并计及有限波数效应时的 Josephson 结的总超电流公式, 它可适用于还存在静态磁场的情形。讨论了静态磁场和有限波数效应对微波场诱生常电压电流台阶的影响。结果表明: 静态磁场, 即使只有地磁场的数量级, 与有限波数效应一起将会导致各种可能的缺级现象; $I-V$ 曲线不具有反射对称性等实验观测到的反常现象。静态磁场的方向也十分重要, 平行和垂直波矢方向上的静态磁场导致完全不同的效应, 平行波矢的静态磁场对微波场诱生台阶的影响类似于直流 Josephson 效应, 高斯数量级(甚至地磁场数量级)的平行静态磁场就可能导致完全观察不到台阶效应; 而垂直波矢的静态磁场将是同有限波数效应组合作用导致缺级, $I-V$ 曲线不对称等现象。

- [1] B. D. Josephson, *Phys. Lett.*, **1**(1962), 251.
- [2] A. Barone and G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley, New York, (1982).
- [3] B. D. Josephson, *Rev. Mod. Phys.*, **36**(1964), 223.
- [4] J. T. Chen *et al.*, *Phys. Rev.*, **B5** (1972), 1843.
- [5] T. Yamashita *et al.*, *Jpn. J. Appl. Phys.*, **26**(1987), L671.
- [6] P. H. Wu *et al.*, In *Proceedings of the Beijing International Workshop on High Temperature Superconductivity*, Beijing, P. R. China, (1987), p. 381.
- [7] G. J. Cui *et al.*, *ibid.*, p. 375.
- [8] 霍王华等, 低温与超导, **17**(1989), 28.
- [9] 龚铮红, 低温与超导, **16**(1988), 37.
- [10] 蔡建华等著, 量子统计的格林函数理论, 科学出版社, (1982).

FINITE WAVENUMBER EFFECT ON AC JOSEPHSON CURRENT

WU YING YAO KAI-LUN

Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074

(Received 31 October 1989)

ABSTRACT

A formula of the Josephson current in the presence of microwave and static magnetic field, taking finite wave-number effect into account, is derived. Finite wavenumber effect on ac Josephson current is discussed according to this formula. It can be used to explain such anomalous phenomena as missing of some rf-induced steps in the $I-V$ curve, asymmetry of the $I-V$ curves.

PACC: 7450