第 39 卷 第 9 期 物 理 学 报 Vol. 39, No. 9
1990 年 9 月 ACTA PHYSICA SINICA Sept., 1990

Z_n 对称统计模型的量子代数结构常数与杨-Baxter 关系*

卫 华
西北大学现代物理研究所，西安，710069

1989 年 10 月 27 日收到

本文对统计中的杨-Baxter 方程的 Z_n 对称解进行了仔细的分析，自然地得到了相应的量子代数的结构常数，并对这个解给出了一个直接的证明.

PACC: 0210; 0520; 0550

1967 年杨振宁提出了二维统计模型精确可解的条件——星-三角关系[1]

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v)=R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u). \tag{1}$$

由于 Baxter 在这一领域的丰富的研究成果[2]，这个关系式被称作杨-Baxter 方程. 它不仅促进了统计模型本身的研究，而且使统计与一维多体非线性系统的完全可积问题[3]，散射矩阵理论[4]，辫子群[5]与 Link 多项式[6]以及共形场论[7]的研究联系在一起，并导致一种新的理论——量子代数[8]的诞生. 与系统的哈氏量的作用类似，杨-Baxter 方程的一个有理表示[9]确定了二维统计系统以及某量子链系统的状态而被称之为"杨氏量 (Yangian)"[10]. 深入地研究杨-Baxter 方程的各种解及其表示成为人们感兴趣的课题.

1980 年 Belavin 发表了方程(1)的 Z_n 对称解[11]. 它可以把已有的八顶角和六顶角解作为 $n=2$ 的特例[12]. 1984 年 Tracy 利用 Heisenberg 群给出这个解的一个证明[13]. 这个解可以写为[12,13]

$$R_{ij}(z)=\sum_{\alpha\in Z_n^2}W_\alpha(z)I_\alpha^{(i)}I_\alpha^{+(j)}. \tag{2}$$

式中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in Z_n^2, \alpha_i=0,1,2,\cdots,n-1, I_\alpha=h^{\alpha_1}g^{\alpha_2}$, h 和 g 为 $n\times n$ 矩阵，矩阵元为

$$h_{jk}^{k+1}=\delta_{j(\mathrm{mod}\ n)}^{k},\quad g_{ik}=\omega^k\delta_i^k, \tag{3}$$

$\omega=e^{2\pi i/n}$ 为 1 的 n 次根，Boltzmann 坐标为

$$W_\alpha(z)=\sigma_\alpha\left(z+\frac{W}{n}\right)\Big/\sigma_\alpha\left(\frac{W}{n}\right)\qquad z,W,\tau\in\mathbb{C},\ I_m\tau>0, \tag{4}$$

$\sigma_\alpha(z)$ 是特征为 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_1}{n},\ \frac{1}{2}+\frac{\alpha_2}{n}\right)$ 的 Jacobi theta 函数

* 国家自然科学基金资助的课题.

$$\sigma_\alpha(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\pi i\left(m+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_1}{n}\right)^2\tau+2\pi i\left(m+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_1}{n}\right)\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_2}{n}\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_1}{n}\right)^2\tau+2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_1}{n}\right)\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_2}{n}\right)\right\}$$

$$\cdot\vartheta\left(z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_1}{n}\right)\tau+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_2}{n},\tau\right). \tag{5}$$

$I^{(i)}$ 作用在第 i 个 n 维矢量空间 V 上，$R_{12}(R_{13}, R_{23})$ 作用在 $V\otimes V\otimes V$ 上并且取 $I^{(3)}(I^{(2)}, I^{(1)})$ 为单位矩阵 1(一般不明显写出). 记

$$R_{ij}=\sum_{k,l,s,m\in Z_n}R_{ks}^{lm}E_{kl}^{(i)}E_{sm}^{(j)},\ (E_{kl})_{is}=\delta_k^i\delta_l^s.$$

所谓 Z_n 对称即矩阵指标加法按 mod n 定义下，$\forall k, l, s, m, p\in Z_n$ 满足

$$R_{ks}^{lm}(z)=R_{k+p\ s+p}^{l+p\ m+p}(z),\ R_{ks}^{lm}(z)=0\ 当\ l+m\neq k+s(\mathrm{mod}\,n). \tag{6}$$

定义 z 和 z' 的函数

$$F_{\alpha\beta\gamma}(z,z')=W_{\gamma-\alpha}(z)W_{\alpha+\beta-\gamma}(z+z')W_\gamma(z')$$
$$-W_{\beta-\gamma}(z)W_\gamma(z+z')W_{\alpha+\beta-\gamma}(z'). \tag{7}$$

记 $\langle\gamma,\alpha\rangle=\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1$, 对于(2)式中未知的 $W_\alpha(z)$ 有下述命题.

命题 1 杨-Baxter 方程(1)等价于关于 Boltzmann 坐标 $W_\alpha(z)$ 的方程

$$\sum_{\gamma\in Z_n^2}F_{\alpha\beta\gamma}(z,z')\omega^{\langle\gamma,\alpha\rangle}=0\qquad\forall\alpha,\beta\in Z_n^2. \tag{8}$$

证：利用

$$I_\alpha^+=I_\alpha^{-1}=\omega^{\alpha_1\alpha_2}I_{-\alpha}, \tag{9}$$

$$I_\alpha I_\beta=\omega^{\alpha_2\beta_1}I_{\alpha+\beta}, \tag{10}$$

$$(A\otimes B\otimes C)(D\otimes E\otimes F)=AD\otimes BE\otimes CF, \tag{11}$$

可得

$$R_{12}(z)R_{13}(z+z')R_{23}(z')=\sum_{\alpha\beta\gamma}W_\alpha(z)W_\beta(z+z')W_\gamma(z')(I_\alpha\otimes I_\alpha^+\otimes 1)$$
$$\cdot(I_\beta\otimes 1\otimes I_\beta^+)(1\otimes I_\gamma\otimes I_\gamma^+)$$
$$=\sum_{\alpha\beta\gamma}W_{\gamma-\alpha}(z)W_{\alpha+\beta-\gamma}(z+z')W_\gamma(z')$$
$$\cdot\omega^{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\alpha_1\beta_2+\langle\gamma,\alpha\rangle}I_\beta\otimes I_\alpha\otimes I_{-\alpha-\beta}, \tag{12}$$

式中求和的哑指标作过代换. 同样可求得

$$R_{23}(z')R_{13}(z+z')R_{12}(z)=\sum_{\alpha\beta\gamma}W_{\gamma-\alpha}(z)W_{\alpha+\beta-\gamma}(z+z')W_\gamma(z')$$
$$\cdot\omega^{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-\langle\gamma,\alpha\rangle}I_\beta\otimes I_\alpha\otimes I_{-\alpha-\beta}. \tag{13}$$

将(12)和(13)式代入(1)式，利用

$$\mathrm{tr}\,I_\alpha I_\beta^+=n\delta_{\alpha\beta} \tag{14}$$

以及 I_α 为可逆矩阵，得到

$$\sum_{\gamma}(\omega^{\langle\gamma,\alpha\rangle}-\omega^{\langle\alpha,\gamma-\beta\rangle})W_{\gamma-\alpha}(z)W_{\alpha+\beta-\gamma}(z+z')W_{\gamma}(z')=0. \tag{15}$$

上式中等号左边第二项作代换 $\gamma\to\alpha+\beta-\gamma$ 即得(8)式.

引理 1　非恒等于零的整函数 $f(z)$ 若满足

$$f(z+1)=\exp[-2\pi iB]f(z),$$
$$f(z+\tau)=\exp[-2\pi i(A_1+A_2z)]f(z),$$

则 A_2 为非负整数，$f(z)$ 在 1 和 τ 生成的周期平行四边形 Λ_τ 上有 A_2 个零点且零点坐标和为

$$\sum_i z_{O_i}=\frac{A_2}{2}-A_1+B\tau(\mathrm{mod}\ \Lambda_\tau). \tag{16}$$

这个引理可用 Λ_τ 上的围道积分验证.

对 Belavin 解(4)式,不难得到(7)式的 $F_{\alpha\beta\gamma}(z,z')$ 满足

$$F_{\alpha\beta\gamma}(z+1,z')=\exp(2i\pi\beta_1/n)F_{\alpha\beta\gamma}(z,z'), \tag{17}$$

$$F_{\alpha\beta\gamma}(z+\tau,z')=\exp\left[-2\pi i\left(\tau+\frac{2W}{n}+z'+\frac{\beta_2}{n}+2z\right)\right]F_{\alpha\beta\gamma}(z,z'). \tag{18}$$

若 $F_{\alpha\beta\gamma}(z,z')\equiv 0$，则方程(1)自然满足. 下边均考虑 $F_{\alpha\beta\gamma}(z,z')\not\equiv 0$. 由引理 1 知它在 Λ_τ 上有两个零点,零点坐标和为 $-\left(z'+\dfrac{\beta_1\tau+\beta_2+2W}{n}\right)\mathrm{mod}\ \Lambda_\tau$. 由(4)式知一个零点为 0,因而另一个零点为 $-z'-(\beta_1\tau+\beta_2+2W)/n$. 又

$$F_{\alpha\beta\gamma}(z,z'+1)=\exp[2\pi i(\alpha_1+\beta_1)/n]F_{\alpha\beta\gamma}(z,z'), \tag{19}$$

$$F_{\alpha\beta\gamma}(z,z'+\tau)=\exp\left[-2\pi i\left(\tau+\frac{2W}{n}+z+\frac{\alpha_2+\beta_2}{n}+2z'\right)\right]F_{\alpha\beta\gamma}(z,z'), \tag{20}$$

得到关于 z' 的两个零点为 $-(\alpha_1\tau+\alpha_2)/n$ 和 $-z-(2W+\beta_1\tau+\beta_2)/n$. 从而 $F_{\alpha\beta\gamma}(z,z')$ 可写成

$$F_{\alpha\beta\gamma}(z,z')=C_{\alpha\beta\gamma}(z,z')\sigma_0(z)\sigma_\alpha(z')\sigma_\beta\left(z+z'+\frac{2W}{n}\right). \tag{21}$$

上式等号两边除 $C_{\alpha\beta\gamma}(z,z')$ 外都是 z 和 z' 的整函数,并且 $F_{\alpha\beta\gamma}(z,z')$ 和

$$\sigma_0(z)\sigma_\alpha(z')\sigma_\beta\left(z+z'+\frac{2W}{n}\right)$$

关于 z 和 z' 的零点完全重合,因而 $C_{\alpha\beta\gamma}(z,z')$ 是 z 和 z' 的无零点整函数.

引理 2　没有奇点的双周期函数是一常数[14].

命题 2　(21)式定义的函数 $C_{\alpha\beta\gamma}(z,z')$ 关于 z 和 z' 是常数,即与 z 和 z' 无关.

证: 由(21)式可得

$$C_{\alpha\beta\gamma}(z+1,z')=C_{\alpha\beta\gamma}(z+\tau,z')=C_{\alpha\beta\gamma}(z,z'), \tag{22}$$

$$C_{\alpha\beta\gamma}(z,z'+1)=C_{\alpha\beta\gamma}(z,z'+\tau)=C_{\alpha\beta\gamma}(z,z'). \tag{23}$$

从而由引理 2 得到此命题的结论.

由(21)式有

$$C_{\alpha\beta\gamma}(w,\ \tau)=\lim_{z,z'\to 0}\frac{F_{\alpha\beta\gamma}(z,\ z')}{\sigma_0(z)\sigma_\alpha(z')\sigma_\beta(z+z'+2w/n)},\tag{24}$$

式中已把 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 对 w 和 τ 的依赖性明显写出。 由于上式等号右边与 z 和 z' 无关，可以代替 $z,z'\to 0$ 而在任意的 z 和 z' 处使用上述关系。现在(8)式可写成

$$\sum_{\gamma\in Z_n^2}C_{\alpha\beta\gamma}(w,\ \tau)\sigma_0(z)\sigma_\alpha(z')\sigma_\beta\left(z+z'+\frac{2w}{n}\right)\omega^{\langle\gamma,\alpha\rangle}=0\qquad\forall\alpha,\ \beta\in Z_n^2.\tag{25}$$

由于上式中求和与 α,β 无关，且显然存在 z 和 z' 的区域使

$$\sigma_0(z)\sigma_\alpha(z')\sigma_\beta\left(z+z'+\frac{2w}{n}\right)\neq 0,$$

得到

命题 3 方程(8)等价于

$$\sum_{\gamma\in Z_n^2}C_{\alpha\beta\gamma}(w,\ \tau)\omega^{\langle\gamma,\alpha\rangle}=0\qquad\forall\alpha,\ \beta\in Z_n^2.\tag{26}$$

命题 4 $C_{\alpha\beta\gamma}(w,\ \tau)$有如下表达式:

$$C_{\circ\beta\gamma}(w,\ \tau)=\frac{n^2}{\sigma_0'^2(0)\sigma_\beta(2w/n)}\frac{\partial^2}{\partial w^2}\ln\frac{\sigma_{\beta-\gamma}(w/n)}{\sigma_\gamma(w/n)},\tag{27}$$

$$=\frac{1}{\sigma_0'^2(0)\sigma_\beta(2w/n)}\left[\mathscr{P}\left(\frac{w+\gamma_1\tau+\gamma_2}{n}\right)\right.$$
$$\left.-\mathscr{P}\left(\frac{w+(\beta_1-\gamma_1)\tau+\beta_2-\gamma_2}{n}\right)\right].\tag{28}$$

$$C_{\alpha\beta\gamma}(w,\ \tau)=\frac{n}{\sigma_0'(0)\sigma_\alpha(0)\sigma_\beta(2w/n)}\frac{\partial}{\partial w}\ln\frac{\sigma_{\gamma-\alpha}(w/n)\sigma_{\alpha+\beta-\gamma}(w/n)}{\sigma_{\beta-\gamma}(w/n)\sigma_\gamma(w/n)}$$
$$\alpha\neq 0,\tag{29}$$

$$=\frac{1}{\sigma_0'(0)\sigma_\alpha(0)\sigma_\beta(2w/n)}\left[\zeta\left(\frac{w+(\gamma_1-\alpha_1)\tau+\gamma_2-\alpha_2}{n}\right)\right.$$
$$+\zeta\left(\frac{w+(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)\tau+\alpha_2+\beta_2-\gamma_2}{n}\right)$$
$$\left.-\zeta\left(\frac{w+(\beta_1-\gamma_1)\tau+\beta_2-\gamma_2}{n}\right)-\zeta\left(\frac{w+\gamma_1\tau+\gamma_2}{n}\right)\right]$$
$$\alpha\neq 0,\tag{30}$$

式中 $\mathscr{P}(z)$ 和 $\zeta(z)$ 为 Λ_τ 上的 Weierstrass 椭圆函数和 ζ 函数[14]。

证：(27)和(29)式由(24)式通过微分得到。(28)和(30)式利用下列公式得出：

$$\sigma_\alpha(z)=-\exp\left\{i\pi\tau\frac{\alpha_1^2}{n^2}+2\pi i\frac{\alpha_1}{n}\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_2}{n}\right)\right\}\vartheta_1\left(z+\frac{\alpha_1\tau+\alpha_2}{n},\tau\right),\tag{31}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ln\vartheta_1(z,\tau)=\frac{\vartheta_1''(z,\ \tau)}{\vartheta_1(z,\tau)}-\frac{\vartheta_1'^2(z,\ \tau)}{\vartheta_1^2(z,\ \tau)}=\frac{\vartheta_1'''(0,\ \tau)}{3\vartheta_1'(0,\ \tau)}-\wp(z),\tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\ln\vartheta_1(z,\ \tau)=\frac{\vartheta_1'(z,\tau)}{\vartheta_1(z,\tau)}=\frac{\vartheta_1'''(0,\ \tau)}{3\vartheta_1'(0,\ \tau)}z+\zeta(z).\tag{33}$$

命题 5　定义

$$\mathscr{P}_\alpha(z)=\frac{1}{n}\sum_{\gamma\in Z_n^2}\frac{\sigma_\gamma\left(z+\frac{W}{n}\right)}{\sigma_\gamma\left(\frac{W}{n}\right)}\omega^{\langle\alpha,\gamma\rangle},\tag{34}$$

则

1)
$$\mathscr{P}_\alpha(z)=\frac{\sigma_{-\alpha}\left(\frac{z}{n}+W\right)}{\sigma_{-\alpha}\left(\frac{z}{n}\right)}\frac{\vartheta_1(z,\ \tau)}{\vartheta_1(w,\ \tau)},\tag{35}$$

2)
$$\sum_{\gamma\in Z_n^2}\frac{\sigma_{\beta-\gamma}(z+w/n)}{\sigma_{\beta-\gamma}(w/n)}\omega^{\langle\gamma,\alpha\rangle}=\omega^{\langle\beta,\alpha\rangle}n\mathscr{P}_\alpha(z),\tag{36}$$

3)
$$\sum_{\gamma\in Z_n^2}\frac{\sigma_{\gamma-\beta}(z+w/n)}{\sigma_{\gamma-\beta}(w/n)}\omega^{\langle\gamma,\alpha\rangle}=\omega^{\langle\beta,\alpha\rangle}n\mathscr{P}_{-\alpha}(z).\tag{37}$$

(35)式的证明见文献[12]中(13)式的计算，方程(36)通过等号左边作哑指标代换 $\gamma'=\beta-\gamma$ 得出，方程(37)等号左边作代换 $\gamma'=\gamma-\beta$ 得出.

命题 6　对于 Belavin 的解(4)式，方程(26)成立.

证：记(28)和(30)式等号右边方括号前的系数分别为 c' 和 c，则利用(36)式有

$$\sum_\gamma C_{0\beta\gamma}(w\tau)\omega^{\langle\gamma,\alpha\rangle}=c'n\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}\sum_\gamma\left[\frac{\sigma_{\beta-\gamma}\left(z+\frac{W}{n}\right)}{\sigma_{\beta-\gamma}\left(\frac{W}{n}\right)}-\frac{\sigma_\gamma\left(z+\frac{W}{n}\right)}{\sigma_\gamma\left(\frac{W}{n}\right)}\right]_{z=0}$$

$$=c'n\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}\left[\omega^0 n\mathscr{P}_0(z)-\omega^0 n\mathscr{P}_0(z)\right]_{z=0}=0.$$

由于式中的函数是 z 和 w 的全纯函数(按照(4)式除去 $w=m+m'\tau$ 点)，因而上边求导与求和、取极限可以交换次序. 同样利用(36)和(37)式有

$$\sum_\gamma C_{\alpha\beta\gamma}(w\tau)\omega^{\langle\gamma,\alpha\rangle}=c\frac{\partial}{\partial z}\sum_\gamma\omega^{\langle\gamma,\alpha\rangle}\left[\frac{\sigma_{\gamma-\alpha}\left(z+\frac{W}{n}\right)}{\sigma_{\gamma-\alpha}\left(\frac{W}{n}\right)}+\frac{\sigma_{\alpha+\beta-\gamma}\left(z+\frac{W}{n}\right)}{\sigma_{\alpha+\beta-\gamma}\left(\frac{W}{n}\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma_{\beta-\gamma}\left(z+\frac{W}{n}\right)}{\sigma_{\beta-\gamma}\left(\frac{W}{n}\right)}-\frac{\sigma_\gamma\left(z+\frac{W}{n}\right)}{\sigma_\gamma\left(\frac{W}{n}\right)}\right]_{z=0}$$

$$=nc\frac{\partial}{\partial z}\left[\omega^{\langle\alpha,\alpha\rangle}\mathscr{P}_{-\alpha}(z)+\omega^{\langle\alpha+\beta,\alpha\rangle}\mathscr{P}_\alpha(z)-\omega^{\langle\beta,\alpha\rangle}\mathscr{P}_\alpha(z)\right.$$

$$\left.-\omega^0\mathscr{P}_{-\alpha}(z)\right]_{z=0}=0.$$

至此通过分析运算对 Belavin 的解给出了一个直接的证明. 上述分析不仅使得

Belavin 的 Z_n 对称解满足杨-Baxter 方程的判断变得十分明显，而且它展现出这个解作为分数特征 theta 函数的内在的结构特征。事实上，这个 Z_n 对称解对应的算子表示形成 Склянин 代数[15]的一种推广，而(27)—(30)式的 $C_{\alpha\beta\gamma}(w, \tau)$ 正是这个推广的 Склянин 代数的结构常数。结构常数与两个参数相关正是椭圆情况下的量子代数的特征。进一步的讨论将另文给出。

[1] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **19**(1967), 1312.
[2] R. J. Baxter, Exactly Solved Models in Statistical Mechanics, Academic Press, London, (1982).
[3] L. D. Faddeev, Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics, Elsevier, Amsterdam, (1984), p. 562.
[4] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B133**(1978), 525.
[5] T. Kohno, *Ann. Inst. Fourier*, **37**(4)(1987), 139.
[6] Y. Akutsu and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **56**(1987), 839.
[7] A. Tsuchiya and Y. Kanie, *Lett. Math. Phys.*, **13**(1987), 303.
[8] V. G. Drinfeld, Proc. of the Intl. Congress of Mathematicians, Berkeley, USA, **1**(1986), p. 798.
[9] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin and E. K. Sklyanin, *Lett. Math. Phys.*, **5**(1981), 393.
[10] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Lett. Math. Phys.*, **12**(1986), 199.
[11] A. A. Belavin, *Nucl. Phys.*, **B180**(1980), 189.
[12] H. Wei, Y. K. Zhou and B. Y. Hou, *J. Phys. A*, **22**(1989), L579.
[13] C. A. Tracy, *Physica*, **16D**(1985), 203.
[14] 王竹溪、郭敦仁，特殊函数概论，科学出版社，(1965)，515；565；526；557页.
[15] E. K. Sklyanin, *Funct. Anal. Appl.*, **16**(1982), 263; *ibid.*, **17**(1983), 273.

STRUCTURE CONSTANTS OF QUANTUM ALGEBRA AND YANG-BAXTER RELATION FOR THE Z_n-SYMMETRIC STATISTICAL MODEL

WEI HUA

Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian, 710069

(Received 27 October 1989)

ABSTRACT

The Z_n-symmetric solution of Yang-Baxter equation in statistical mechanics is analyzed with care, the structure constants of the corresponding quantum algebra are obtained naturally, and a direct proof for this solution is presented.

PACC: 0210; 0520; 0550