第 39 卷 第 9 期 物 理 学 报 Vol. 39, No. 9
1990 年 9 月 ACTA PHYSICA SINICA Sept., 1990

高维波动方程的一些新的多孤子解*

楼 森 岳
宁波师范学院物理系，宁波，315211

黄 国 翔
复旦大学物理系 上海，200433

倪 光 炯
复旦大学物理系，上海，200433；南开大学数学研究所，天津，300071

1989 年 10 月 11 日收到

利用基方程技术和求解基方程新解的变换公式，求得 $n+1$ 维非线性波动方程的一些新的多孤子解. Gibbon 等人指出：多孤子解的孤子数受到限制，$N\leqslant 2n+1$. 然而，本文结果表明，他们的结论是不正确的. 孤子数 N 可以是一个任意正整数.

PACC: 0290; 1190

一、引 言

近来，非线性波动方程的研究受到了诸如数学、物理学、生物学和工程等各学科科学工作者的越来越多的重视[1]. 为寻求非线性波动方程的精确解，科学家们提出了诸如：反散射变换，奇异摄动理论，Bäcklund 变换，多重测度法等许多强有力的方法. 在文献[2, 3]中，对一些熟知的高维非线性波动方程(如 $\lambda\phi^4$，sG，DsG，GL 等)之间的一些满足一定限制条件的特解建立了纯代数的联系. 在知道了一个方程的一个解之后，就可以纯代数地得到该模型及其它模型的几个（甚至无穷多个）新解. 如果进一步限制于讨论行波解，这个方法还可以推广到其它类型的非线性方程，如：KdV 和非线性薛定谔方程[2]，Heisenberg 铁磁链方程[4]，考虑量子修正后的 sG 方程[5]，高阶 KdV 等等.

在高维情况下，使用的一般的非线性波动方程可写为

$$\partial^\mu\partial_\mu\phi\equiv\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=F(\phi), \tag{1}$$

式中 $F(\phi)$ 为某个 ϕ 的函数. 当 $F(\phi)$ 分别取为 $F_i(\phi)(i=1,\cdots,5)$，即

$$F_1(\phi)=\sin\phi, \tag{2}$$

$$F_2(\phi)=\frac{\alpha}{2}\left[-\sin\frac{1}{2}\phi+2\eta\sin\phi\right], \tag{3}$$

$$F_3(\phi)=\lambda\phi^3+\sigma\phi, \tag{4}$$

* 国家自然科学基金资助的课题.

$$F_4(\phi) = \xi\phi^5 + \lambda\phi^3 + \sigma\phi, \tag{5}$$

$$F_5(\phi) = \lambda\phi^3 + \gamma\phi^2 + \sigma\phi \tag{6}$$

时，(1)式即分别表示物理学中著名的 sG，DsG，$\lambda\phi^4$，ϕ^6 及 $\phi^4 + \phi^3$ 模型等．这些模型的共同特点是都存在多孤子解．Burt，Gibbon 等人早在 10 多年前给出了上述前 3 个模型的一类多孤子解[6]．但是他们认为多孤子解的数目是有限的．对于空间维度为 n 的非线性波动方程，孤子解的孤子数目 N 满足的限制条件为

$$N \leqslant 2n + 1. \tag{7}$$

文献[2]对于 $n = 2$ 的情况已给出精确的 $N = 6 > 2n + 1 = 5$ 的 6 孤子解．所以限制(7)式是不正确的．本文将给出一些新的 N 孤子解，一般地证明 N 是任意的正整数，同时给出构造任意 N 孤子解的简单方法．

二、基方程及其解的变换公式

采用文献[6]的方法，首先引入基方程

$$\partial^\mu\partial_\mu g = A(g), \tag{8}$$

$$(\partial_\mu g)(\partial^\mu g) \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t} g\right)^2 = B(g), \tag{9}$$

式中 A 和 B 可以为 g 的任意函数．设 ϕ 仅通过中间变量 g 与 x^μ 相联系，则 (1) 式成为 $\left(\phi_g = \dfrac{d\phi}{dg}\right)$

$$A(g)\phi_g + B(g)\phi_{gg} = F(\phi). \tag{10}$$

进一步，在引入

$$C(g) = \exp\left\{2\int^g (B(g'))^{-1}\left[A(g') - \frac{1}{2}\frac{dB(g')}{dg'}\right]dg'\right\} \tag{11}$$

后，(10)式变为

$$\frac{d^2\phi}{dV^2} = F(\phi)C(g(V)), \tag{12}$$

式中 V 和 g 的联系为

$$V = \int^g \frac{dg'}{\sqrt{B(g')C(g')}}. \tag{13}$$

一般地说，求解常微分方程(12)是很困难的，但当

$$A(g) = \frac{1}{2}\frac{dB(g)}{dg} \tag{14}$$

时，正如文献[6]所取，$C(g) = 1$，方程(12)简化为

$$\frac{d^2\phi}{dV^2} = F(\phi),\ \left(V = \int^g B^{-1/2}(g')dg'\right). \tag{15}$$

显然，求解(15)式仅是一个极为简单的积分问题，

$$V = \int^\phi \frac{d\phi'}{\sqrt{2F(\phi') + C_1}} + C_2. \tag{15a}$$

现在的关键问题是如何去求解基方程 (8) 和 (9). 此处可选取最简单的情况：$B(g)=\sigma g^2$ (σ 为正常数). 然后，有

$$V=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\ln g, \tag{16}$$

$$\partial^\mu\partial_\mu g=\sigma g \tag{17}$$

和

$$\partial_\mu g\partial^\mu g=\sigma g^2. \tag{18}$$

Gibbon 等人已找到了(17)和(18)式的一组精确解，

$$g_0=\sum_{\gamma=1}^{N}\exp(\sqrt{\sigma}\,\theta_\gamma), \tag{19}$$

式中

$$\theta_\gamma=\sum_{i=1}^{n}(P_\gamma^i x_i)+\omega_\gamma t+\delta_\gamma. \tag{20}$$

而 P_γ^i 和 ω_γ 之间应满足限制条件[6]

$$\sum_{i=1}^{n}(P_\gamma^i)^2-\omega_\gamma^2=1 \tag{21}$$

和

$$\sum_{i=1}^{n}(P_\gamma^i-P_{\gamma'}^i)^2-(\omega_\gamma-\omega_{\gamma'})^2=0. \tag{22}$$

(21)和(22)式可统一地表示为

$$\sum_{i=1}^{n}P_\gamma^iP_{\gamma'}^i-\omega_\gamma\omega_{\gamma'}=1. \tag{23}$$

将 $g=g_0$, $V=V_0=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\ln g_0$ 代入非线性常微分方程求解，即可得到相应非线性方程的N孤子解. 如对于 $F(\phi)=F_5(\phi)(\lambda^2>16\xi\sigma/3, \lambda<0, \sigma>0)$相应的$N$拓扑孤子解为

$$\phi=\frac{\mathrm{th}AV_0}{[B(\mathrm{th}AV_0)^2+C]^{1/2}}, \tag{24}$$

式中

$$A^2=\left\{\frac{1}{4\xi}(\lambda^2-4\xi\sigma-\lambda\sqrt{\lambda^2-4\xi\sigma})\right\}, \tag{25}$$

$$B=\frac{\xi}{\frac{1}{2}\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\xi\sigma}}, \tag{26}$$

$$C=\frac{-3(\lambda^2-4\xi\sigma+\lambda\sqrt{\lambda^2-4\xi\sigma})}{2\sigma(\lambda+2\sqrt{\lambda^2-4\xi\sigma})}. \tag{27}$$

但是，Gibbon 等人认为这一类孤子解的数目由于限制条件(21)和(22)式或(23)式的存在而受到限制. 他们的结果

$$N \leqslant 2n+1 \tag{28}$$

来自要求限制条件(23)式的方程数 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 小于变量数 $(n+1)N$. 但是由于方程(23)的高度非线性性质，他们的结论并不正确. 如一个一元二次方程的根有2个. 在下面的论述中，都直接用 N 是任意整数的正确结论，而证明将放于最后一节.

若将基方程(8)和(9)中的 $A(g)$, $B(g)$ 分别取为

$$A(g) = \lambda g^3 + \sigma g, \tag{29}$$

$$B(g) = \frac{\lambda}{2} g^4 + \sigma g^2 + C, \tag{30}$$

则(8)和(9)式即成为文献[2]所定义的限制 ϕ^4 方程. 而(17)和(18)式正是限制 ϕ^4 方程的特殊情况 $(\lambda = C = 0)$. 文献[2]指出，若 $g(X) = g(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 是限制 ϕ^4 方程的解(与之相应的参数为 λ, σ, C)，则

$$g_1 = Bg(AX) = Bg(Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n, At) \tag{31}$$

也是限制 ϕ^4 方程的解，与之相应的参数 λ_1, σ_1, C_1

$$\lambda_1 = \lambda A^2/B^2, \ \sigma_1 = A^2\sigma, \ C_1 = B^2A^2C. \tag{32}$$

进一步，若 λ, σ, C 间满足关系

$$\lambda = 2C, \tag{33}$$

则

$$g_2 = \frac{2g}{1+g^2}, \tag{34}$$

$$\lambda_2 = 4C - 2\sigma, \ C_2 = 4C, \ \sigma_2 = \sigma - 6C \tag{35}$$

和

$$g_3 = \frac{1-g^2}{1+g^2}, \tag{36}$$

$$\lambda_3 = 2\sigma - 4C, \ \sigma_3 = -2\sigma, \ C_3 = \sigma + 2C, \tag{37}$$

仍是限制 ϕ^4 方程的解，且参数 (λ, σ, C) 分别为 $(\lambda_2, \sigma_2, C_2)$ 及 $(\lambda_3, \sigma_3, C_3)$.

若 λ, σ, C 间满足关系

$$\sigma + \frac{1}{2}\lambda + C = 0, \tag{38}$$

则

$$g_4 = \frac{\sqrt{1-g^2}}{1+g}, \tag{39}$$

$$\sigma_4 = -\frac{1}{2}\sigma, \ \lambda_4 = \frac{1}{2}\left(C - \frac{1}{2}\lambda\right), \ C_4 = \frac{1}{4}\left(C - \frac{1}{2}\lambda\right) \tag{40}$$

也是限制 ϕ^4 方程的解，相应的 (λ, σ, C) 为 $(\sigma_4, \lambda_4, C_4)$.

三、新多孤子解

由于(17)和(18)式正是限制 ϕ^4 方程的特殊情况，所以利用 g 到 $g_i (i = 1, \cdots, 4)$ 的

变换，即可能得到(17)和(18)式的新解，从而通过(15)和(16)式而得到非线性波动方程(1)的新解(15a)式． 显然(17)和(18)式的所有解都满足条件(33)式 ($\lambda = C = 0$). 从(17)和(18)式的解(19)式 $g_0(\lambda_0 = 0, \sigma_0 = \sigma, C_0 = 0)$ 出发，利用(36)和(39)式得限制 ϕ^4 方程的解

$$g_{30} = \frac{1 - g_0^2}{1 + g_0^2}, \ \lambda_{30} = 2\sigma, \ \sigma_{30} = -2\sigma, \ C_{30} = \sigma. \tag{41}$$

显然，解 g_{30} 仍满足条件(33)式，所以，从 g_{30} 出发，利用(34)和(35)式即可得限制 ϕ^4 方程的另一个解

$$g_{20} = \frac{2g_{30}}{1 + g_{30}^2} = \frac{1 - g_0^4}{1 + g_0^4}, \tag{42a}$$

$$\lambda_{20} = 8\sigma, \ \sigma_{20} = -8\sigma, \ C_{20} = 4\sigma. \tag{42b}$$

由(42b)式知，g_{20} 的参数满足条件(38)式，所以，可利用(39)和(40)式得到限制 ϕ^4 方程的下列新解：

$$g_{40} = \frac{\sqrt{1 - g_{20}^2}}{1 + g_{20}} = g_0^2, \ \lambda_{40} = 0, \ \sigma_{40} = 4\sigma, \ C_{40} = 0. \tag{43}$$

再继续利用(31)和(32)式即得基方程(17)和(18)的新解

$$g_{01} = \left(\sum_{\gamma=1}^{N} \exp\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\theta_\gamma\right)\right)^2. \tag{44}$$

反复从(41)到(44)式的步骤 m_1 次，基方程(17)和(18)的新解成为

$$g_{0m_1} = \left(\sum_{\gamma=1}^{N} \exp\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2^{m_1}}\theta_\gamma\right)\right)^{2^{m_1}}, \tag{45}$$

m_1 可以为任意正整数．另一方面，由于(17)式是线性方程，可以对上述形式的解作线性叠加得到(17)式的新解

$$g_a' = \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{\gamma_i=1}^{N_i} \exp\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2^{m_1}}\theta_{\gamma_i}\right)\right)^{2^{m_1}} \tag{46a}$$

式中 $N_i, (i = 1, 2, \cdots, I)$ 和 m_i 为任意整数．为了要求 g_a' 亦是基方程(18)式的解，则要求 θ_{γ_i} 中的参数 P_{γ}^i, ω_{γ_i} 对所有不同的 γ_i 和 i 均应满足限制条件(21)和(22)式． 由于(46a)式中的 m_i 为任意整数，人们不难想到，(46a) 式可作进一步的推广

$$g_a = \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{\gamma_i=1}^{N_i} \exp\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha_i}\theta_{\gamma_i}\right)\right)^{\alpha_i}, \tag{46b}$$

式中 α_i 为实任意常数．将(46b)式直接代入(17)和 (18) 式不难验证这个推广是正确的．从解 g_a 出发重复从(41)式到(46b)式的步骤即可得到基方程(17)和(18)的另一个解

$$g_{a_2} = \sum_{i_2=1}^{I_2} \left(\sum_{(i_1 i_2)=1}^{I(i_2)} \left(\sum_{\gamma(i_1 i_2)=1}^{N(i_1 i_2)} \exp\frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}}\theta_{\gamma(i_1 i_2)}\right)^{\alpha_{i_1}}\right)^{\alpha_{i_2}}. \tag{47}$$

再从 g_{a_2} 出发，反复类推 m 次得基方程(17)和(18)的更一般的解为

$$g_{am} = \sum_{i_m=1}^{I_m} \left(\sum_{(i_{m-1} i_m)=1}^{I(i_m)} \left(\sum_{(i_{m-2} i_{m-1} i_m)}^{I(i_{m-1} i_m)} \left(\cdots \left(\sum_{(i_1 i_2 \cdots i_m)=1}^{I(i_2 i_3 \cdots i_m)} \left(\sum_{\gamma(i_1 i_2 \cdots i_m)=1}^{N(i_1 i_2 \cdots i_m)} \right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\cdot \exp\frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_m}}\theta_{\gamma(i_1i_2\cdots i_m)}\Big)^{\alpha_{i_1}}\Big)^{\alpha_{i_2}}\Big)\cdots\Big)^{\alpha_{i_{m-1}}}\Big)^{\alpha_{i_m}}, \tag{48}$$

式中 $\alpha_{i_k}(k=1,\cdots,m)$ 为任意实数，$N(i_1\cdots i_m),I(i_2\cdots i_m),\cdots,I(i_{m-1}i_m),I(i_m),l_m$，$m$ 等对于不同的 $i_k(k=1,2,\cdots,m)$ 均为任意正整数，而与(23)式相应的限制条件修改为

$$\sum_{j=1}^{n} P^{j}_{\gamma(i_1i_2\cdots i_m)}P^{j}_{\gamma'(i_1'i_2'\cdots i_m')}-\omega_{\gamma(i_1i_2\cdots i_m)}\omega_{\gamma'(i_1'i_2'\cdots i_m')}=1. \tag{49}$$

四、关于孤子数的任意性

现在的问题是如何对任意的 N 求解(23)式．首先假设对小的 N，譬如说 $N_1=n$，已经求得满足限制条件(23)式的解(19)式，则在将(19)式推广到(48)式后，若取 $\sigma_{i_k}(k=1,\cdots,m)$ 均为正整数，则(48)式可退化成(19)式的形式，但 θ_γ 除了原有的 $N_1=n$ 个解外，还包含有许许多多个不同的新的 θ'_γ，而这些新的 θ'_γ 都是原有的 n 个 θ_γ 的某种线性组合．一般地说，θ_γ 定义了一个与 Minkowski 时空 M 共轭的 $n+1$ 维闵空间 $\widetilde{M}$，一个孤子(或扭结)可由该空间的一个向量 K^μ_γ 表征，

$$K^\mu_\gamma=(P^1_\gamma,P^2_\gamma,\cdots,P^n_\gamma,\omega_\gamma). \tag{50}$$

根据向量空间知识，$n+1$ 维闵空间的独立向量数为 $n+1$，其它向量可以由这 $n+1$ 个独立向量线性组合而成，而满足一定条件的向量构成 $\widetilde{M}$ 的子空间，显然子空间的维度小于 $n+1$．在本文情况下，满足条件(23)式的子空间的维度为 n，因此可先对 $N=n$ 求解(23)式的线性独立的向量，然后对于 $N>n$ 的情况，将其它向量写成该 n 个向量的线性组合，并要求其满足(23)式即可．设 n 个向量 $K^\mu_\gamma(\gamma=1,2,\cdots,n)$ 是满足条件(23)式的线性独立的向量，则不难验证，按下述方法线性组合而得到的新的向量

$$K^\mu_{\gamma'}=\sum_{\gamma=1}^{n}a^\mu_{\gamma'}K^\mu_\gamma\Big/\sum_{\gamma=1}^{n}a^\gamma_{\gamma'}\qquad\Big(\sum_{\gamma=1}^{n}a^\gamma_{\gamma'}\neq 0\Big),$$
$$\gamma'=n+1,n+2,\cdots \tag{51}$$

与原向量 K^μ_γ 之间均满足条件(23)式．式中 $a^\gamma_{\gamma'}$ 为满足 $\sum\limits_{\gamma=1}^{n}a^\gamma_{\gamma'}\neq 0$ 的任意实数．由于 $a^\gamma_{\gamma'}$ 为任意实数，$K^\mu_{\gamma'}$ 的取法有无穷多．因此满足限制条件(23)式的向量数 N 是任意的，根本不存在文献[6]指出的限制条件(7)式．对于(49)式的求解是与(23)式完全等价的．将 g_{am} 代替 g_0，而后将 $V=\ln g_{am}$ 代入(15a)式，就得到相应非线性方程的新多孤子解．

[1] R. Z. Sagdeev, Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, Vol. 1—3 Harwood (1984).
[2] S-y Lou and G-j Ni, *J. Math. Phys.*, 30(1989), 1614.
[3] S-y Lou and G-j Ni, *Phys. Lett. A* (1989), in press.
[4] 楼森岳、倪光炯，复旦学报(自然科学版)，27(1988)，339.
[5] S-y Lou and G-j Ni, *Phys. Lett.*, 131A(1988), 256.
[6] J. D. Gibbon and G. Zambotti, *Nuovo Cimento*, 28B(1975), 1; J. D. Gibbon, N. C. Freeman and R. S. Johnson, *Phys. Lett.*, 65A(1978), 380; J. D. Gibbon, N. C. Freeman and A. Davey, *J. Phys. A*, 11, (1978), L93; P. B. Burt, *Proc. Soc. Lond.*, A359(1978), 479.

SOME NEW MULTIPLE SOLITON SOLUTIONS OF HIGH-DIMENSIONAL NONLINEAR WAVE EQUATIONS

LOU SEN-YUE
Department of Physics, Ningbo Normal College, Ningbo, 315211
HUANG GUO-XIANG
Department of Physics, Fudan University, Shanghai, 200433
NI GUANG-JIONG
Department of Physics, Fudan University, Shanghai, 200433; *Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin,* 300071

(Received 11 October 1989)

ABSTRACT

By using the base equations technique and the transformation relations to get new solutions of the base equations, we obtain some new multiple soliton solutions of $n+1$ dimensional non-linear wave equations. Gibbon *et al*. pointed out that the number of the soliton in the multiple soliton solutions is constrainted by $N \leqslant 2n+1$. However, our result shows that their conclusion is not ture, the number of the soliton N may be an arbitrary positive integer.

PACC: 0290; 1190