

延时断裂统计理论*

邢 修 三

北京理工大学应用物理系, 北京, 100081; 中国科学院国际材料物理中心, 沈阳, 110015

1989年11月10日收到

本文研究了广泛应力范围内 ($1 \gg \frac{\alpha\sigma}{kT} \gg 1$) 热激活延时断裂统计理论。文中从微裂纹按原子键机理随机演化导致断裂的思路出发, 导出了微裂纹分布函数、断裂几率、可靠性、强度和寿命的统计分布函数及其统计平均值。

PACC: 6220M; 4630N

一、引 言

如何从微观机理出发理解在延时应力作用下固体断裂的宏观特性? 怎样从理论上统一导出和表述延时断裂过程的所有基本规律? 文献[1]用非平衡统计的概念和方法, 研究了脆性断裂和疲劳断裂理论, 其特点是: 突出了微裂纹动力学、统计性、微观机理和宏观特性四者之间的有机联系。本文旨在此基础上试图继续建立一个在广泛应力范围内 ($1 \gg \frac{\alpha\sigma}{kT} \gg 1$) 适用的微观与宏观相结合的热激活延时断裂非平衡统计理论。

二、微裂纹演化方程

热激活延时断裂的微观实质是由外应力和热激活双重作用下实际固体内大量微裂纹的演化(成核和长大)和单个主裂纹的传播决定的。前一阶段是慢速的, 后一阶段是快速的。由于热涨落和材料微观结构背景涨落的存在, 微裂纹系统的演化过程可看成是个随机过程。描述这种过程的演化方程参见文献[2, 3], 其中 C 为微裂纹的长度, $K(C) = A\beta(C)$ 为微裂纹的迁移长大速率, Q 为涨落长大系数, 几率密度分布函数 $P(C_0, C; t)dC$ 为 $t=0$ 时的微裂纹 C_0 在 t 时长大到 C 和 $C+dC$ 间的几率, $N(C, t)dC$ 表示 t 时单位体积内在长度 C 和 $C+dC$ 间形成的微裂纹数目,

$$N(t) = \int_{C_0}^{\infty} N(C, t) dC$$

表示 t 时微裂纹的总密度数, $P(C, t)dC = N(C, t)dC/N(t)$ 为 t 时在所有微裂纹中找到长度在 C 和 $C+dC$ 间的微裂纹的几率, $q(t)$ 为 t 时单位体积单位时间内微裂纹成

* 国家自然科学基金资助的课题。

核的数目。

当由下列原子键机理求得 A , $\beta(C)$, Q 和 $q(t)$ 时, 就可由演化方程解出 $P(C_0, C; t)$ 或 $P(C, t)$ 。

三、微裂纹长大的原子键机理

现在从原子键机理^[4]来讨论微裂纹的长大。如图 1 所示, 在外应力和热激活的双重作用下, 微裂纹顶端前的原子键断裂, 原子排列构象将从图 1(a) 变成(b), 微裂纹顶端前进了一个或几个原子距离。微裂纹的长大就是由这样一系列原子键重复破裂的步骤组成的。

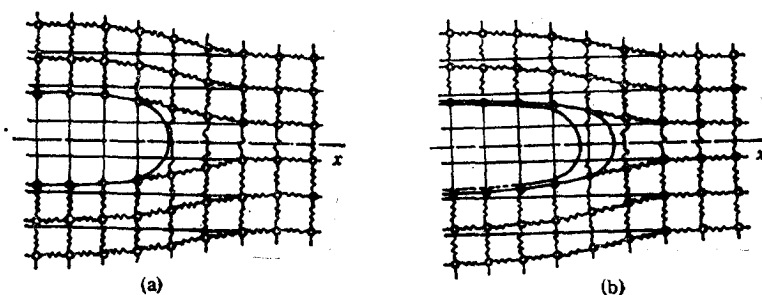


图 1

根据这种原子键破裂机理, 微裂纹的长大速率应为

$$\begin{aligned}\dot{C} &= \nu_0 L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha\sigma}{kT}\right) \right] \\ &= 2\nu_0 L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right).\end{aligned}\quad (1)$$

其中 ν_0 为原子本征振动频率, k 为玻耳兹曼常数, T 为温度, ν 为破坏一个原子键所需的激活能, $L = nb$, b 为原子间距, $n = 1, 2, 3, \dots$ 的正整数, σ 为外应力, α 为激活体积, $\exp\left(-\frac{\nu - \alpha\sigma}{kT}\right)$ 为外应力促进热激活破坏原子键时的指数因子, $\exp\left(-\frac{\nu + \alpha\sigma}{kT}\right)$ 为外应力阻止热激活破坏原子键时的指数因子。

由(1)式可得^[3]

$$\begin{aligned}A &= \nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right), \\ \beta &= 2L \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right), \\ Q &\simeq \eta^2 A = \eta^2 \nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right), \\ \eta^2 &= \left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)^2 \frac{\langle \Delta\alpha^2 \rangle}{\alpha^2} + \left(\frac{\nu}{kT}\right)^2 \frac{\langle \Delta T^2 \rangle}{T^2}.\end{aligned}\quad (2)$$

当 $\frac{\alpha\sigma}{kT} \gg 1$ 时, $\exp\left(-\frac{\alpha\sigma}{kT}\right) \simeq 0$, 即外应力远大于热激活的作用而热激活的作用又不可完全忽略时, 这实际上相当于 Жуклов^[5] 的实验情况, 则(1)式变为

$$\dot{C} \simeq \nu_0 L \exp\left(-\frac{\nu - \alpha\sigma}{kT}\right). \quad (1a)$$

当 $\frac{\alpha\sigma}{kT} \ll 1$ 时, $\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right) \simeq \frac{\alpha\sigma}{kT}$, 即外应力远小于热激活的作用时, 这相当于通常的蠕变情况, 则(1)式变为

$$\dot{C} \simeq \frac{2\nu_0 L \alpha \sigma}{kT} \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right). \quad (1b)$$

(1), (1a) 和 (1b) 式就是根据原子键机理求得的三种微裂纹长大速率。

四、微裂纹分布函数

现在来求微裂纹分布函数。将(1)式代入演化方程, 即可解得微裂纹的几率密度函数为

$$P(C_0, C; t) dC = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2\nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}} \times \exp\left\{-\frac{\left[C - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2\nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} dC. \quad (3)$$

显然, 它满足下列起始条件、边界条件和归一化条件:

$$\begin{aligned} P(C_0, C; t=0) &= \delta(C - C_0), \\ P(C \rightarrow \infty, t) &= 0, \\ \int_{C_0}^{\infty} P(C_0, C; t) dC &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

可解得微裂纹密度函数为

$$N(C, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2\nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}} \times \int_0^t \frac{q(t')}{\sqrt{(t-t')}} \exp\left\{-\frac{\left[C - C_0 - \nu_0(t-t') L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2\nu_0(t-t') L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} dt' \quad (5)$$

$$P(C, t) dC \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2\nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\left[C - C_0 - v_0 t L \exp\left(-\frac{v}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right) \right]^2}{8\eta^2 v_0 t L^2 \exp\left(-\frac{v}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right) \right]^2} \right\} dC. \quad (6)$$

显然,它满足下列起始条件和边界条件:

$$N(C, t=0) = 0, N(C \rightarrow \infty, t) = 0, \quad (7)$$

由(3),(5),(6)式可见微裂纹分布函数是其长度 C 的正态分布函数。

微裂纹尺度遵守一定的统计分布规律, 已为实验证明, 但是究竟是什么样的分布函数, 尚待实验最后肯定。

若上面讨论的 $P(C_0, C; t)dC$ 和 $P(C, t)dC$ 看成是微裂纹的空间几率密度函数, 则微裂纹的时间几率密度函数应为

$$P(t, C)dt = \frac{P(C, t)dt}{\int_0^\infty P(C, t)dt}. \quad (8)$$

它定义为从无限长的时间范围 $(0, \infty)$ 内求得长度为 C 的微裂纹存在于 t 和 $t + dt$ 区间的几率。显然, $P(t, C)dt$ 满足归一化条件

$$\int_0^\infty P(t, C)dt = 1,$$

其物理意义是任何长度 C 的微裂纹总是存在于无限长的时间内。

将(3)或(6)式代入(8)式, 得

$$P(t, C)dt = \sqrt{\frac{v_0 \exp\left(-\frac{v}{kT}\right)}{2\pi\eta^2 t}} \times \exp \left\{ -\frac{\left[C - C_0 - v_0 t L \exp\left(-\frac{v}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right) \right]^2}{8\eta^2 v_0 t L^2 \exp\left(-\frac{v}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right) \right]^2} \right\} dt. \quad (9)$$

由(9)式可见: $P(t=0, C) = \delta(C - C_0)$, $P(t \rightarrow \infty, C) = 0$, 前者表示微裂纹长大的起始条件, 后者表示在断裂过程中任何长度为 C 的微裂纹都不能存在无限长的时间, 换言之, 固体材料的寿命总是有限的。

(3),(5),(6)和(9)式就是我们基于原子键机理求得的微裂纹分布函数。

五、断 裂 几 率

如第二节中指出的, 我们将整个延时热激活断裂过程看成是两个阶段组成的, 即大量微裂纹的成核长大过程和单个主裂纹的传播过程。前者是低速的, 后者是高速的。由于裂纹传播是以弹性波的速率在固体材料内进行的, 只要主裂纹开始传播, 断裂将立即发生。因此, 材料的断裂寿命主要由低速过程决定的, 高速过程所消耗的时间可以略去。本文前面讨论的都是微裂纹的长大问题, 现在来讨论直接引起断裂的主裂纹传播。在第三

节所示的原子键机理中,什么是裂纹的传播条件,文献[4]并未给出明确的数学表达式.为此我们仍用 Griffith 关于裂纹的传播条件

$$C_k = \frac{G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)\sigma^2} \quad (10)$$

其中 E 为杨氏模量, μ 为泊松比, G_{1c} 为裂纹扩展力. 应当强调指出, (10) 式不是低速微裂纹的长大条件, 而是高速主裂纹的传播条件.

根据概率论, 若 $P(\sigma, t)d\sigma$ 为延时应力作用 t 时一个裂纹在应力 σ 和 $\sigma + d\sigma$ 间传播的几率, 应有 $P(\sigma, t)d\sigma = P(C, t)|dC|$, 将(6), (10)式代入此式, 则得

$$P(\sigma, t)d\sigma = \frac{G_{1c}E}{\sqrt{2\pi\eta^2\nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)(1-\mu^2)\sigma^2 L \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)}} \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)\sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2\nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} d\sigma. \quad (11)$$

将(10)式代入(9)式, 则得在延时应力 σ 作用下一个裂纹于时间 t 和 $t + dt$ 间发生传播的几率为

$$P(t, \sigma)dt = \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi\eta^2 t}} \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)\sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2\nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} dt. \quad (12)$$

显然, $P(\sigma, t)d\sigma$ 和 $P(t, \sigma)dt$ 都满足归一化条件, 即

$$\int_0^\infty P(\sigma, t)d\sigma = 1$$

和

$$\int_0^\infty P(t, \sigma)dt = 1.$$

当材料中总共存在

$$M_1(t) = V \int_{C_k} N(C, t)dC = VN_1$$

个能传播的裂纹时(其中 V 为材料的体积), 根据导致断裂的最弱键模型(或叫最小强度原理), 则材料经延时应力作用 t 时于应力 0 和 σ 间发生断裂的几率为^[1]

$$P_f(\sigma) \simeq 1 - \exp\left[-M_1 \int_0^\sigma P(\sigma, t)d\sigma\right]. \quad (13)$$

$P_f(\sigma)$ 可直接叫做应力的断裂几率. 显然, $P_f(\sigma = 0) = 0$, $P_f(\sigma \rightarrow \infty) = 1$. 其物理

意义为: 任何材料不受外应力作用时总不会断裂, 而在无限大的外应力作用下总一定断裂。

同样, 材料在延时应力 σ 的作用下于 0 和 t 时间内发生断裂的几率为

$$P_f(t) \simeq 1 - \exp \left[-M_1 \int_0^t P_f(\sigma) d\sigma \right]. \quad (14)$$

$P_f(t)$ 可直接叫时间的断裂几率。显然, 当 σ 大于某个临界阈值应力时, 将有 $P_f(t=0)=0$, $P_f(t \rightarrow \infty)=1$ 。其物理意义为: 当外应力未作用时材料总不会断裂, 而当外应力大于某个临界应力时, 经无限长的时间作用, 材料总要发生断裂, 即任何材料的断裂寿命总是有限的。

将(11)式代入(13)式, 得应力断裂几率的表示式为

$$P_f(\sigma) \simeq 1 - \exp \left\{ - \frac{N_1 V G_{1c} E}{\sqrt{2\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp \left(-\frac{\nu}{kT} \right) \cdot (1 - \mu^2) L}} \int_0^\sigma \frac{1}{\sigma^3 \sinh \left(\frac{\alpha \sigma}{kT} \right)} \right. \\ \left. \times \exp \left\{ - \frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1 - \mu^2) \sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp \left(-\frac{\nu}{kT} \right) \sinh \left(\frac{\alpha \sigma}{kT} \right) \right]^2}{8\eta^2 \nu_0 t L^2 \exp \left(-\frac{\nu}{kT} \right) \left[\sinh \left(\frac{\alpha \sigma}{kT} \right) \right]^2} \right\} d\sigma \right\}. \quad (15)$$

将(12)式代入(14)式, 得时间断裂几率的表达式为

$$P_f(t) \simeq 1 - \exp \left\{ -N_1 V \sqrt{\frac{\nu_0 \exp \left(-\frac{\nu}{kT} \right)}{2\pi \eta^2}} \right. \\ \left. \times \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp \left\{ - \frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1 - \mu^2) \sigma^2} - C_0 - \nu_0 \tau L \exp \left(-\frac{\nu}{kT} \right) \sinh \left(\frac{\alpha \sigma}{kT} \right) \right]^2}{8\eta^2 \nu_0 \tau L^2 \exp \left(-\frac{\nu}{kT} \right) \left[\sinh \left(\frac{\alpha \sigma}{kT} \right) \right]^2} \right\} d\tau \right\}. \quad (16)$$

由(15), (16)式可见, 断裂几率 $P_f(\sigma)$ 和 $P_f(t)$ 是由外应力 σ 、温度 T 、时间 t 和材料特征量 ν, α, G_{1c}, E 和体积 V 等决定的。

六、可 靠 性

现在来讨论固体材料在外应力和热激活双重作用下的可靠性。由于存在着应力和时间两种断裂几率, 故亦可引入两种对应的可靠性, 其精确定义如下:

(1) 材料在间隔为 $(0, \sigma)$ 的延时应力作用下, 于 t 时仍能安全承载而不发生断裂的几率。

(2) 材料在延时应力 σ 作用下, 于 $(0, t)$ 时间内, 仍能安全承载而不发生断裂的几率。

简言之, 前者叫应力可靠性, 以 $R(\sigma)$ 表示, 后者叫时间可靠性, 以 $R(t)$ 表示。

按此定义及(13),(14)式,应有

$$R(\sigma) = 1 - P_f(\sigma) \simeq \exp \left[-M_1 \int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (17)$$

$$R(t) = 1 - P_f(t) \simeq \exp \left[-M_1 \int_0^t P(t, \sigma) dt \right]. \quad (18)$$

显然, $R(\sigma = 0) = 1$, $R(\sigma \rightarrow \infty) = 0$. 其物理意义为: 材料在无外应力作用时总是安全可靠的, 而当外应力增大到无限大时总要发生断裂, 即材料不再安全可靠. 同样, $R(t = 0) = 1$, $R(t \rightarrow \infty) = 0$. 其物理意义为: 当外应力未作用时, 材料总是安全可靠的, 而当外应力作用无限长时间时, 材料总要发生断裂, 不再安全可靠.

将(11),(12)式代入(17),(18)式时, 得可靠性的表达式为

$$R(\sigma) \simeq \exp \left\{ -\frac{N_1 V G_{1c} E}{\sqrt{2\pi^3 \eta^2 \nu_0 t} \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) (1 - \mu^2) L} \int_0^\sigma \frac{1}{\sigma^3 \sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)} \right. \\ \left. \times \exp \left\{ -\frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1 - \mu^2) \sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right) \right]^2}{8\eta^2 \nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right) \right]^2} \right\} d\sigma \right\}. \quad (19)$$

$$R(t) \simeq \exp \left\{ -N_1 V \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi \eta^2}} \right. \\ \left. \times \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left\{ -\frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1 - \mu^2) \sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right) \right]^2}{8\eta^2 \nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right) \right]^2} \right\} dt \right\}. \quad (20)$$

为了给出可靠性的解析表达式, 需将(19),(20)式作进一步近似化简.

我们先求(19)式的近似式, 由(11)式得

$$\int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_X^\infty \exp(-X^2) dX \simeq \frac{1}{\theta X^{1/2}}. \quad (21)$$

其中

$$X = \frac{\phi(\sigma) - At}{\sqrt{2Q}}, \quad \phi(\sigma) = \int_{C_0}^{\sigma} \frac{dC}{\beta}. \quad (22)$$

(21)式后一近似成立的条件为 $X \geq 2.5$, 其中 $\theta = 2 \times 10^{-3}$.

将(21),(22)式代入(19)式, 得应力可靠性的近似表达式为

$$R(\sigma) \simeq \exp \left\{ -\frac{N_1 V}{\theta} \left[\frac{\sqrt{8\eta^2 \nu_0 t} \pi(1 - \mu^2) L \sigma^2 \exp\left(-\frac{\nu}{2kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)}{G_{1c} E} \right]^{1/2} \right\}. \quad (23)$$

显然, 此近似式仍满足物理要求 $R(\sigma = 0) = 1$ 和 $R(\sigma \rightarrow \infty) = 0$.

现再求(20)式的近似式, 由(12)式得

$$\int_0^t P(t, \sigma) dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi}Q} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left\{ -\frac{[\phi(\sigma) - At]^2}{2Qt} \right\} dt$$

$$\simeq \frac{A\phi(\sigma)}{\sqrt{\pi}Q\theta_1 X^{3/2}}. \quad (24)$$

其中 $\theta_1 = 10^{-19}$. 将(24)式代入(17)式, 得时间可靠性的近似表达式为

$$R(t) \simeq \exp \left\{ -\frac{N_1 V G_e E}{\pi^{3/2} \eta^2 \theta_1 (1 - \mu^2) L \sigma^2 \sinh \left(\frac{\alpha \sigma}{kT} \right)} \right.$$

$$\times \left. \left[\frac{\sqrt{8\eta^2 v_0 t} \pi (1 - \mu^2) L \sigma^2 \exp \left(-\frac{v}{2kT} \right) \sinh \left(\frac{\alpha \sigma}{kT} \right)}{G_{le} E} \right]^{30} \right\}. \quad (25)$$

利用后面的平均断裂寿命 τ 的(33)式, 则时间可靠性(25)式可写成

$$R(t) \simeq \exp \left\{ -\left[\Gamma \left(\frac{16}{15} \right) \frac{t}{\tau} \right]^{15} \right\}. \quad (26)$$

其中 Γ 为 Gamma 函数.

这样, 时间可靠性 $R(t)$ 仅由其延时应力作用的时间 t 及材料平均寿命 τ 的比值 t/τ 决定, t/τ 愈大, $R(t)$ 愈小. 至此, 若我们将 t/τ 看成是损伤率, 则可抛开微观机理而将热激活延时断裂过程笼统地看成是一种损伤过程, 损伤率愈大, 时间可靠性愈小.

若作用于材料的延时应力不是常应力而是变应力, 则可把此变应力看成是一系列常应力 $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的叠加. 根据损伤独立性原理, 变应力的时间可靠性应等于各个常应力可靠性之积, 即

$$R(t) = \prod_{i=1}^m R(t_i) \simeq \exp \left\{ -\sum_{i=1}^m \left[\Gamma \left(\frac{16}{15} \right) \frac{t_i}{\tau_i} \right]^{15} \right\}. \quad (27)$$

其中 t_i 为常应力 σ_i 的作用时间, τ_i 为材料在 σ_i 作用下的平均寿命. 若取 $R = e^{-1} = 0.378$ 作为材料发生断裂的特征可靠性, 则有

$$\sum_{i=1}^m \left[\Gamma \left(\frac{16}{15} \right) \frac{t_i}{\tau_i} \right]^{15} = 1. \quad (28)$$

这可看成是热激活延时断裂累积损伤的非线性规则.

应该指出, 关于热激活延时断裂的可靠性问题, 迄今实验资料很少, 因而本文所得的结果, 只能看成是一种理论预言.

七、断裂强度和寿命分布

由于微观结构(包括成分和缺陷)的不均匀性及热涨落的动态性, 即使实际材料的宏观成分、工艺条件、几何形状和尺寸相同, 每个试样都有自己的断裂强度(当断裂寿命相同时)和断裂寿命(当断裂强度相同时), 它们是互不相同的, 遵守着确定的统计分布规律. 强度统计分布函数 $W_f(\sigma)d\sigma$ 和寿命统计分布函数 $W_f(t)dt$ 就是分别描述强度和寿命这种统计分布规律的. 前者表示材料经延时应力作用 t 时于应力 σ 和 $\sigma + d\sigma$ 间发生断裂

的几率,后者表示材料在延时应力 σ 作用下于 t 和 $t + dt$ 时间间隔内发生断裂的几率。

由(13),(15)式得断裂强度统计分布函数的表达式为

$$\begin{aligned}
 W_f(\sigma) d\sigma &= \frac{\partial P_f}{\partial \sigma} d\sigma \simeq \frac{N_1 V G_{1c} E}{\sqrt{2\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \cdot (1-\mu^2) \sigma^3 L \sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)}} \\
 &\times \exp\left\{-\frac{N_1 V G_{1c} E}{\sqrt{2\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) (1-\mu^2) L}} \int_0^\sigma \frac{1}{\sigma^3 \sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)} d\sigma\right\} \\
 &\times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1-\mu^2) \sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2 \nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} d\sigma \\
 &\times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1-\mu^2) \sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2 \nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} d\sigma. \quad (29)
 \end{aligned}$$

由(14),(16)式得断裂寿命统计分布函数的表达式为

$$\begin{aligned}
 W_f(t) dt &= \frac{\partial P_f(t)}{\partial t} dt \simeq N_1 V \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi\eta^2 t}} \exp\left\{-N_1 V \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi\eta^2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} dt\right\} \\
 &\times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1-\mu^2) \sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2 \nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} dt \\
 &\times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1-\mu^2) \sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2 \nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha \sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} dt. \quad (30)
 \end{aligned}$$

显然, $W_f(\sigma) d\sigma$ 和 $W_f(t) dt$ 都满足归一化条件

$$\int_0^\infty W_f(\sigma) d\sigma = 1 \quad \text{和} \quad \int_0^\infty W_f(t) dt = 1.$$

由(29),(30)式可见,强度和寿命的统计分布函数同样是由外应力 σ 、温度 T 、时间 t 和材料特征量 ν, α, G_{1c}, E 和体积 V 等决定的。

利用可靠性近似式(26),热激活延时断裂寿命的统计分布函数可进一步近似简化为

$$W_f(t) dt \simeq 15 \left[\frac{\Gamma\left(\frac{16}{15}\right)}{\tau} \right]^{15} t^{14} \exp\left\{-\left[\Gamma\left(\frac{16}{15}\right) \frac{t}{\tau} \right]^{15}\right\} dt. \quad (31)$$

这正是 Weibull 统计分布,即热激活延时断裂寿命近似地遵守 Weibull 统计规律。应该

指出,人们已熟知疲劳寿命的统计分布规律^[4],但热激活延时断裂到底遵守什么样的统计分布规律,除个别理论结果^[6]指出应遵守 Weibull 统计规律外,迄今尚无实验结果。因而本文的结果是否正确,有待今后的实验检验。

八、平均断裂寿命

如上所述,实际材料试样的断裂寿命是遵守确定的统计分布规律的,因而只有大量试样系综的断裂寿命的平均值,才能精确反映实际材料的断裂特性。设 τ 为试样系综的平均寿命,则有

$$\tau = \int_0^{\infty} t W_f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (32)$$

将(20)式代入(32)式,得材料平均断裂寿命的表达式。由于此式无解析结果,我们将(25)式代入(32)式,得平均断裂寿命的近似表达式为

$$\tau \simeq \frac{\Gamma\left(\frac{16}{15}\right)\tau_0}{2\eta^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}\eta^2\theta_1}{N_1V}\right)^{1/15} \left(\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)b\sigma^2}\right)^{29/15} \exp\left(\frac{\nu}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^{-29/15}. \quad (33)$$

其中 $\tau_0 = 1/\nu_0$ 为原子本征振动周期。

当 $\frac{\alpha\sigma}{kT} \gg 1$ 时,断裂寿命(33)式变为

$$\tau \simeq \tau_0 \exp\left(\frac{\nu - \gamma\sigma}{kT}\right). \quad (34)$$

其中

$$\gamma\sigma \simeq \alpha\sigma + kT \ln \left[\frac{2\eta^2}{\Gamma\left(\frac{16}{15}\right)} \left(\frac{\pi(1-\mu^2)b\sigma^2}{G_{1c}E}\right)^{29/15} \left(\frac{N_1V}{\sqrt{\pi}\eta^2\theta_1}\right)^{1/15} \right]. \quad (35)$$

当 $\frac{\alpha\sigma}{kT} \ll 1$ 时,断裂寿命(33)式变为

$$\tau \simeq \frac{\Gamma\left(\frac{16}{15}\right)\tau_0}{8\eta^2} \left(\frac{2\sqrt{\pi}\eta^2\theta_1}{N_1V}\right)^{1/15} \left(\frac{kTG_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)b\alpha}\right)^{29/15} \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \sigma^{-53/15}. \quad (36)$$

(33),(34),(36)式就是我们所得的三种情况下的平均断裂寿命公式。(33)式为普遍适用的情况。(34)式正是众所周知的 Жукров 经验公式^[5]。(36)式则为蠕变断裂寿命。

从(33),(34),(36)式可见,断裂寿命是随外应力 σ , 温度 T , 材料特征量 ν, α, G_{1c}, E 和试样体积 V 而变化的,是结构敏感的。

断裂寿命所以随外应力 σ 增大而减小,是因为断裂是一种裂纹长大过程,需要时间。外应力 σ 愈大,裂纹长大愈快,因而寿命愈小,反之亦然。

断裂寿命所以随裂纹扩展力 G_{1c} 增大而延长,是因为 G_{1c} 愈大,裂纹扩展愈难,因而

其寿命愈长,反之亦然。应该指出,在过去的理论和实验文献中,很少有这样结果。由于 G_{1c} 是宏观量,易于测量,故 τ 与 G_{1c} 的函数关系不仅可用来检验本文的预言是否正确,还可用来作为提高金属断裂寿命的一条新途径。

断裂寿命随体积 V 增大而缓慢缩短的微弱尺寸效应,正是统计性的反应,过去文献已有类似的报道^[6],只是尚无定量的实验结果。

九、结 束 语

本文从微裂纹按原子键机理随机长大导致材料热激活延时断裂这一基本思路出发,从理论上统一导出了微裂纹分布函数、断裂几率、可靠性、断裂强度和断裂寿命分布函数、平均断裂寿命等。所有这些结果都以同一组物理参量表示,并适用于广泛的应力范围内 ($1 \gg \frac{\alpha\sigma}{kT} \gg 1$)。

与现有其他延时断裂理论相比,本文有两个显著特点:

1. 从理论框架来看,突出了微裂纹动力学,统计性以及原子键机理与宏观特性相结合之间的有机联系。

2. 从具体结果来说,本文不仅统一导出了现有延时断裂的所有主要规律,而且给出了一些新结果和预言。

当然,由于断裂过程甚为复杂,本理论中不少近似尚有待改进,有些结果亦有待今后的实验检验。

[1] X. S. Xing, *Engng. Fracture Mech.*, 24(1986), 45; 26(1987), 393.

[2] 邢修三,物理学报,35(1986),741.

[3] X. S. Xing, *Engng. Fracture Mech.*, 32(1989), 935.

[4] A. S. Krausz and K. Krausz, *Fracture Kinetics of Crack Growth*, Kluwer Academic Publishers, (1988).

[5] А. И. Регель и др., Кинетическая природа прочности твердых тел, М. "Наука", (1974).

[6] V. A. Petrov and A. N. Orlov, *Int. J. Fracture*, 11(1975), 881; 12(1976), 231.

STATISTICAL THEORY OF DELAYED FRACTURE

XING XIU-SAN

*Department of Applied Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing, 100081;
International Centre for Materials Physics, Academia Sinica, Shenyang, 110015*

(Received 10 November 1989)

ABSTRACT

A statistical theory of delayed fracture in a wide range of stress $\left(1 \gg \frac{\alpha\sigma}{kT} \gg 1\right)$ has been proposed. The fundamental idea is that microcrack stochastically evolves based on the atomic bond mechanism leading to fracture. The microcrack evolution equation is given. The microcrack distribution function, fracture probability, reliability, the statistical distribution function of fracture strength and fracture life and their statistical average value are derived.

PACC: 6220M; 4630N