

一类半平面对称的电磁真空时空*

李 鑑 增 梁 灿 彬

北京广播学院, 北京, 100024 北京师范大学, 北京, 100875

1989年4月10日收到

本文证明了能够产生半平面对称度规的电磁场可以是平面对称的, 也可以是半平面对称的. 其中的平面对称电磁场一定是非类光电磁场, 而半平面对称电磁场则可能是类光的, 也可能是非类光的. 求出由半平面对称类光 (null) 无源电磁场所产生的半平面对称时空通解.

PACC: 0420; 0440

一、引 言

广义相对论建立以来, 关于电磁场产生的时空, 人们研究较多的是电磁场和度规场具有相同对称性的情况. 例如, Reissner-Nordström 解中, 电磁场和度规场都具有球对称性; Kar (McVittie)^[1] 解中, 电磁场和度规场都具有平面对称性等等. 某些文献也讨论过电磁场对称性较少的情况. 1983年 Amundsen 和 Grøn^[2] 研究了不具有平面对称性的电磁场产生的平面对称度规. 1985年作者在文献[3, 4]中指出了文献[2]的错误, 导出了能够产生平面对称度规的电磁场应该满足的必要条件, 并进而得出由电磁场产生的平面对称度规通解. 1987年文献[5]中又进一步证明了这个通解的完备性. 同时指出, 能够产生平面对称度规的电磁场只有两种情况. 一是平面对称电磁场, 即电磁场同时具有 x - y 平面内的平移、旋转三个对称性, 电磁场张量的分量中, E_3, B_3 仅为 t, z 的函数, $E_1 = E_2 = B_1 = B_2 = 0$. 其产生的度规就是 Kar (McVittie) 解^[1]

$$ds^2 = -\left(\frac{m}{z} + \frac{e^2}{z^2}\right) dt^2 + z^2(dx^2 + dy^2) + \left(\frac{m}{z} + \frac{e^2}{z^2}\right)^{-1} dz^2. \quad (1)$$

另一个是半平面对称电磁场, 即那些或者只有沿 x, y 方向的平移对称性而无在 x - y 平面内的旋转对称性, 或者只有旋转对称性而无平移对称性的电磁场, 它的特点是电磁场张量的分量 $E_3 = B_3 = 0, E_1, E_2, B_1, B_2$ 不全为零. 这类电磁场产生的度规为^[4]

$$ds^2 = \pm \frac{J^2(t+z)}{t^{1/2}} (-dt^2 + dz^2) + t(dx^2 + dy^2), \quad (2)$$

$$ds^2 = \pm \frac{J^2(t+z)}{(t+z)^{1/2}} (-dt^2 + dz^2) + (t+z)(dx^2 + dy^2), \quad (3)$$

式中 $J(t+z)$ 为 $t+z$ 的函数, 它满足

* 国家自然科学基金资助的课题.

$$J/J > 0.$$

(1)–(3)式组成了由电磁场产生的平面对称时空的通解。

既然平面对称度规可以由平面对称或半平面对称电磁场产生,人们自然会问,当度规场的对称性进一步减弱后会出现什么情况? 是否还会有类似的结论? 为了研究这个问题,讨论具有如下形式的度规,并把它称之为半平面对称度规:

$$ds^2 = E(-dt^2 + dz^2) + Gdx^2 + Hdy^2, \quad (4)$$

式中 E, G, H 仅为 t, z 的函数。显然,半平面对称度规(4)式具有 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$ 两个平移 Killing 矢量,而不一定具有旋转 Killing 矢量,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a = x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a - y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a.$$

计算度规(4)式的 Ricci 张量,其非零分量为

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{EE'' - E'^2 - E\ddot{E} + \dot{E}^2}{2E^2} + \frac{\dot{E}\dot{G} + E'G'}{4EG} - \frac{2G\ddot{G} - \dot{G}^2}{4G^2} \\ &\quad + \frac{\dot{E}\dot{H} + E'H'}{4EH} - \frac{2H\ddot{H} - \dot{H}^2}{4H^2}, \\ R_{03} &= \frac{E'G + \dot{E}G'}{4EG} + \frac{E'\dot{H} + \dot{E}H'}{4EH} - \frac{2\dot{G}'G - \dot{G}G'}{4G^2} - \frac{2\dot{H}'H - \dot{H}H'}{4H^2}, \\ R_{11} &= \frac{\ddot{G} - G''}{2E} - \frac{\dot{G}^2 - G'^2}{4EG} + \frac{\dot{G}\dot{H} - G'H'}{4EH}, \\ R_{22} &= \frac{\ddot{H} - H''}{2E} - \frac{\dot{H}^2 - H'^2}{4EH} + \frac{\dot{G}\dot{H} - G'H'}{4EG}, \\ R_{33} &= \frac{E\ddot{E} - \dot{E}^2 - EE'' + E'^2}{2E^2} + \frac{\dot{E}\dot{G} + E'G'}{4EG} - \frac{2GG'' - G'^2}{4G^2} \\ &\quad + \frac{\dot{E}\dot{H} + E'H'}{4EH} - \frac{2HH'' - H'^2}{4H^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中“ $\cdot$ ”和“ $\ddot{\cdot}$ ”分别表示 $\partial/\partial t$ 和 $\partial/\partial z$ 。

令电磁场张量

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ & 0 & -B_3 & B_2 \\ & & 0 & -B_1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

式中 $E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3$ 为坐标系 (t, x, y, z) 中的电场强度和磁感应强度分量。由(6)式求出电磁场能动张量

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{E_1^2 + B_3^2}{2G} + \frac{E_2^2 + B_1^2}{2H} + \frac{E_3^2}{2E} + \frac{E}{2GH} B_3^2, \\ T_{01} &= -\frac{E_2 B_3}{H} + \frac{E_3 B_2}{E}, \quad T_{02} = \frac{E_1 B_3}{G} - \frac{E_3 B_1}{E}, \\ T_{03} &= \frac{E_2 B_1}{H} - \frac{E_1 B_2}{G}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{B_2^2 - E_1^2}{2E} + \frac{B_3^2}{2H} - \frac{G(B_1^2 - E_2^2)}{2EH} + \frac{G}{2E^2} E_3^2, \\
T_{12} &= -\frac{1}{E} (E_1 E_2 + B_1 B_2), \quad T_{13} = -\left(\frac{E_1 E_3}{E} + \frac{B_1 B_3}{H}\right), \\
T_{22} &= \frac{B_1^2 - E_2^2}{2E} + \frac{B_3^2}{2G} + \frac{H}{2EG} (E_1^2 - B_2^2) + \frac{H}{2E^2} E_3^2, \\
T_{23} &= -\left(\frac{E_2 E_3}{E} + \frac{B_2 B_3}{G}\right), \\
T_{33} &= -\frac{E_3^2}{2E} + \frac{B_2^2 + E_1^2}{2G} + \frac{B_1^2 + E_2^2}{2H} - \frac{E}{2GH} B_3^2.
\end{aligned}$$

利用 Einstein 场方程

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \text{ 和 } R_{01} = R_{02} = R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0,$$

得

$$\begin{aligned}
\frac{E_2 B_3}{H} = \frac{B_2 E_3}{E}, \quad \frac{E_1 B_3}{G} = \frac{E_3 B_1}{E}, \quad E_1 E_2 + B_1 B_2 = 0, \\
\frac{E_1 E_3}{E} + \frac{B_1 B_3}{H} = 0, \quad \frac{E_2 E_3}{E} + \frac{B_2 B_3}{G} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

(7)式就是能产生半平面对称度规(4)式的电磁场所应满足的必要条件.

同产生平面对称度规的情况类似, 能够产生半平面对称度规的电磁场只有如下两种情况:

$$1) E_1 = E_2 = B_1 = B_2 = 0$$

利用无源 Maxwell 方程

$$F^{ab}{}_{,b} = 0, \quad F_{ab,c} + F_{ca,b} + F_{bc,a} = 0, \tag{8}$$

可得

$$\frac{GH}{E^2} E_3^2 = a_1^2, \quad B_3^2 = a_2^2,$$

式中 a_1, a_2 为常数. 这说明 E_3, B_3 不是 x, y 的函数, 电磁场具有平面对称性.

$$2) E_3 = B_3 = 0$$

这时电磁场能动张量的非零分量为

$$\begin{aligned}
T_{00} = T_{33} &= \frac{E_1^2 + B_2^2}{2G} + \frac{E_2^2 + B_1^2}{2H}, \\
\frac{T_{11}}{G} = -\frac{T_{22}}{H} &= \frac{B_2^2 - E_1^2}{2EG} - \frac{B_1^2 - E_2^2}{2EH}, \\
T_{03} &= \frac{E_2 B_1}{H} - \frac{E_1 B_2}{G}.
\end{aligned} \tag{9}$$

因为(4)式中 $g_{\mu\nu}$ 不是 x, y 的函数, 故由 $g_{\mu\nu}$ 及其导数组成的 $R_{\mu\nu}$ 也不是 x, y 的函数, 通过 Einstein 方程同 $R_{\mu\nu}$ 相连的 $T_{\mu\nu}$ 也不是 x, y 的函数. 将(9)式中的 T_{00} 和 T_{11} 对 x 微分得

$$\frac{E_1}{G} \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{B_1}{H} \frac{\partial B_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{B_2}{G} \frac{\partial B_2}{\partial x} + \frac{E_2}{H} \frac{\partial E_2}{\partial x} = 0.$$

利用必要条件(7)式中第三式得

$$\left(E_2 - \frac{E_1 B_2 H}{B_1 G}\right) \frac{\partial E_1}{\partial x} + \left(E_1 - \frac{E_2 B_1 G}{B_2 H}\right) \frac{\partial E_2}{\partial x} = 0.$$

同理可得

$$\left(E_2 - \frac{E_1 B_2 H}{B_1 G}\right) \frac{\partial E_1}{\partial y} + \left(E_1 - \frac{E_2 B_1 G}{B_2 H}\right) \frac{\partial E_2}{\partial y} = 0.$$

将无源 Maxwell 方程(8)代入后知, E_1 不是 x, y 的函数. 同样, E_2, B_1, B_2 也不是 x, y 的函数. 故此无源电磁场具有沿 x, y 方向的平移对称性, 但不具有在 $x-y$ 平面的旋转对称性, 因而是半平面对称电磁场.

综合 1), 2) 两种情况, 可以得出如下结论: 产生半平面对称度规场的无源电磁场只有全平面对称和半平面对称两种情况.

二、类光电磁场和非类光电磁场

若电磁场张量 F_{ab} 满足

$$F_{ab}^* F^{*ab} = 0,$$

则称为类光电磁场 (null electromagnetic field), 反之则称为非类光 (non null) 电磁场^[6], 式中

$$F_{ab}^* = F_{ab} + i\tilde{F}_{ab}, \quad \tilde{F}_{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} F^{cd},$$

$$\varepsilon_{abcd} = \sqrt{-g} (dx)_a \wedge (dx)_b \wedge (dy)_c \wedge (dz)_d.$$

由(4)和(6)式求出, 对于全平面对称电磁场, F^{*ab} 的非零分量仅为

$$F_{03}^* = E_3 - i \frac{E}{\sqrt{GH}} B_3, \quad F_{12}^* = -B_3 - i \frac{\sqrt{GH}}{E} E_3,$$

故

$$F_{ab}^* F^{*ab} = 2 \left(\frac{B_3^2}{GH} - \frac{E_3^2}{E^2} \right) + i \frac{4E_3 B_3}{E \sqrt{GH}}.$$

显然, 仅当 $E_3 = B_3 = 0$ (无电磁场) 时, 才有

$$F_{ab}^* F^{*ab} = 0.$$

因而产生半平面对称度规的全平面对称电磁场一定是非类光电磁场. 这一点同产生全平面对称度规的情况完全相同.

对半平面对称电磁场, F_{ab}^* 的非零分量为

$$\begin{aligned} F_{01}^* &= E_1 - i \sqrt{\frac{G}{H}} B_1, & F_{02}^* &= E_2 - i \sqrt{\frac{H}{G}} B_2, \\ F_{13}^* &= B_2 + i \sqrt{\frac{G}{H}} E_2, & F_{23}^* &= -B_1 - i \sqrt{\frac{H}{G}} E_1, \end{aligned}$$

故

$$F_{ab}^* F^{*ab} = 2 \left(\frac{B_2^2 - E_1^2}{EG} + \frac{B_1^2 - E_2^2}{EH} \right) + i \frac{4(E_1 B_1 + E_2 B_2)}{E \sqrt{GH}}. \quad (10)$$

若 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 中有一为零, 则上式等号右边之虚部为零, 但实部不为零, F_{ab} 是非类光电磁场; 若 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 都不为零, 且满足

$$E_1 B_1 + E_2 B_2 = 0,$$

使虚部为零时, 利用必要条件(7)式中第三式可得

$$B_1^2 = E_2^2, B_2^2 = E_1^2. \quad (11)$$

因而实部也为零, F_{ab} 为类光电磁场; 反之, 若

$$E_1 B_1 + E_2 B_2 \neq 0,$$

F_{ab} 为非类光电磁场. 因此, 同产生平面对称度规的半平面对称电磁场一定是类光电磁场的结论^[9]不同, 产生半平面对称度规的半平面对称电磁场可能是类光电磁场, 也可能是非类光电磁场. 文献[7]中讨论了其中的非类光电磁场产生的半平面对称时空, 下面再研究类光电磁场产生的半平面对称时空.

三、类光电磁场产生的半平面对称时空

因为产生半平面对称度规的无源类光电磁场一定是半平面对称电磁场, 其电场分量和磁场分量一定满足(11)式. 不失一般性, 取

$$B_1 = -E_2, B_2 = -E_1. \quad (12)$$

这时电磁场能动张量的非零分量仅有

$$T_{00} = T_{33} = -T_{03} = \frac{E_1^2}{G} + \frac{E_2^2}{H}. \quad (13)$$

则由(5)式得 Einstein-Maxwell 场方程

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{E}\dot{G} + E'G'}{2EG} + \frac{\dot{E}\dot{H} + E'H'}{2EH} + \frac{\dot{G}^2 + G'^2}{4G^2} - \frac{\ddot{G} + G''}{2G} + \frac{\dot{H}^2 + H'^2}{4H^2} - \frac{\ddot{H} + H''}{2H} \\ & = 16\pi \left(\frac{E_1^2}{G} + \frac{E_2^2}{H} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{EE'' - E'^2 - E\ddot{E} + \dot{E}^2}{E^2} + \frac{\dot{G}^2 - G'^2}{4G^2} - \frac{\ddot{G} - G''}{2G} \\ & + \frac{\dot{H}^2 - H'^2}{4H^2} - \frac{\ddot{H} - H''}{2H} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\ddot{G} - G''}{2G} - \frac{\ddot{H} - H''}{2H} - \frac{\dot{G}^2 - G'^2}{4G^2} + \frac{\dot{H}^2 - H'^2}{4H^2} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\ddot{G} - G''}{2G} + \frac{\ddot{H} - H''}{2H} - \frac{\dot{G}^2 - G'^2}{4G^2} - \frac{\dot{H}^2 - H'^2}{4H^2} + \frac{\dot{G}\dot{H} - G'H'}{2GH} = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E'\dot{G} + \dot{E}G'}{4EG} + \frac{E'\dot{H} + \dot{E}H'}{4EH} - \frac{\dot{G}'}{2G} - \frac{\dot{H}'}{2H} + \frac{\dot{G}G'}{4G^2} + \frac{\dot{H}H'}{4H^2} \\ & = -8\pi \left(\frac{E_1^2}{G} + \frac{E_2^2}{H} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

利用无源 Maxwell 方程(8)得

$$\frac{\partial E_1}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial E_2}{\partial \nu} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{\frac{H}{G}} E_1 \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{\frac{G}{H}} E_2 \right) = 0,$$

则 $B_1(u) = -E_2(u), B_2(u) = E_1(u), \frac{H}{G} = N(u),$

式中 $v = t + z, u = t - z$. 若(12)式变为

$$B_1 = E_2, \quad B_2 = E_1,$$

则 E_1, E_2, B_1, B_2 和 N 都是 v 的函数, 其结果完全类似. 故下面仅考虑它们是 u 的函数的情况. 设

$$HG = M^2(t, z)$$

则 $H = M(t, z)N(u), G = M(t, z)/N(u).$

代入(16)式得

$$-\frac{N'}{N} \dot{M} + \frac{M'}{M} = 0.$$

其解为

1) $N'(u) = 0$, 则 $H = G$, 即为文献 [3—5] 讨论的平面对称情况, 其通解为(2), (3)式所代表的度规.

2) $\dot{M} + M' = 0$, 则 $M = M(u)$, 因而

$$G = G(u), \quad H = H(u). \quad (19)$$

代入(15)式得

$$E = h_1(u)h_2(v)$$

式中 h_1, h_2 为任意函数. 引入坐标变换

$$h_1(u)du = d\tilde{u}, \quad h_2(v)dv = d\tilde{v},$$

则在 $(\tilde{v}, \tilde{u}, x, y)$ 坐标系中

$$E = 1, \quad G = G(\tilde{u}), \quad H = H(\tilde{u}).$$

为简单起见, 将 $\tilde{u}, \tilde{v}$, 仍记为 u, v , 代入方程(17), 此方程自然满足, 而方程(14)和(18)化为同一个方程

$$\frac{G'^2}{4G^2} - \frac{G''}{2G} + \frac{H'^2}{4H^2} - \frac{H''}{2H} = 8\pi \left(\frac{E_1^2}{G} + \frac{E_2^2}{H} \right). \quad (20)$$

此方程不难满足. 于是得类光电磁场产生的半平面对称度规为

$$ds^2 = -dudv + G(u)dx^2 + H(u)dy^2, \quad (21)$$

式中 $G(u), H(u)$ 和电磁场分量 E_1, E_2, B_1, B_2 满足(12)和(20)式.

令 $\hat{x} = \sqrt{G(u)}x, \quad \hat{y} = \sqrt{H(u)}y,$

$$\hat{v} = v + \frac{1}{2} \frac{G'(u)x^2}{G(u)} + \frac{1}{2} \frac{H'(u)y^2}{H(u)},$$

$$g_1(u) = \frac{G''}{2G} - \frac{G'^2}{4G^2}, \quad g_2(u) = \frac{H'^2}{4H^2} - \frac{H''}{2H},$$

度规(21)式可化为

$$ds^2 = -dud\hat{v} + [g_1(u)\hat{x}^2 - g_2(u)\hat{y}^2]du^2 + d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2, \quad (21')$$

式中 $g_1(u)$ 和 $g_2(u)$ 为 u 的函数, 其差决定于电磁场, 即

$$g_2(u) - g_1(u) = 8\pi T_{00} = 8\pi T_{33} = -8\pi T_{03}.$$

当 $g_2(u) = g_1(u)$ 时, (21') 式化为

$$ds^2 = -dud\theta + g_1(u)[\dot{x}^2 - \dot{y}^2]du^2 + d\dot{x}^2 + d\dot{y}^2. \quad (22)$$

这就是文献[8]中真空平面波解(35.37)式.

当 $g_1(u) = -g_2(u)$ 时, 令

$$\frac{1}{2} \kappa_0 \Phi^2(u) = g_2(u), \quad v = \frac{1}{2} \theta,$$

(21') 式化为

$$ds^2 = -2dudv - \frac{1}{2} \kappa_0 \Phi^2(u)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)du^2 + d\dot{x}^2 + d\dot{y}^2. \quad (23)$$

这就是文献[6]中的共形平直 P-P 波(具有平行射线的平面波前引力波)解.

这说明真空平面波解(22)式和半平面对称类光电磁场产生的 P-P 波解(23)式都是解(21')式的特殊情况.

综合 1), 2) 两种情况, 考虑到(3)式已是(21')式的特例, (2)和(21')式表示的度规代表不同的时空, 可得如下结论:

类光无源电磁场产生的半平面对称度规通解必为(2)式及(21')式.

- [1] S. C. Kar, *Phys. Z.*, **27**(1926), 208; G. C. McVittie, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **124**(1929), 366.
- [2] P. A. Amundsen & P. Grøn, *Gen. Rel. Grav.*, **15**(1983), 315.
- [3] Li Jianzeng & LIANG Canbin, *Chinese Phys. Lett.*, **2**(1985), 23.
- [4] Li Jian-zeng & Liang Can-bin, *Gen. Rel. Grav.*, **17**(1985), 1001.
- [5] Kuang Zhi-quan, Li Jian-zeng & Liang Can-bin, *Gen. Rel. Grav.*, **19**(1987), 345.
- [6] D. Kramer *et al.*, *Exact Solution of Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1980), p. 70; p. 348.
- [7] 李鑑增, 梁灿彬, *物理学报*, **38**(1989), 973.
- [8] C. W. Misner *et al.*, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, (1973), p. 960.

A FAMILY OF SEMI-PLANE-SYMMETRIC ELECTROVACUUM SPACETIMES

LI JIAN-ZENG

Beijing broadcasting Institute, Beijing, 100024

LIANG CAN-BIN

Beijing Normal University, Beijing, 100875

(Received 10 April 1989)

ABSTRACT

It is shown in this paper that the electromagnetic field yielding a semi-plane-symmetric metric can be either plane-symmetric or semi-plane-symmetric. If it is plane-symmetric, then it must be a non-null electromagnetic field, while if it is semi-plane-symmetric, then it can be either null or non-null. The general solution of semi-plane-symmetric spacetimes yielded by semi-plane-symmetric sourceless null electromagnetic field is also given in this paper.

PACC: 0420; 0440