

超临界圆映象的混沌测度及其标度律*

王光瑞 陈式刚¹⁾

应用物理与计算数学研究所, 北京, 100088

1988年4月18日收到;

1990年6月20日收到修改稿

本文研究了圆映象中的参数 $k > 1$ 与 $k \gg 1$ 情况的混沌运动的行为. 用在 φ 轴的等分点上计算李雅普诺夫指数及转数的办法, 给出混沌运动的测度及其标度律.

PACC: 0545

一、引 言

圆映象是一种重要的一维映象, 在研究耗散动力学系统中, 它不但具有理论意义, 也有重要的实际意义¹⁾. 当临界参数 $k < 1$ 时, 即所谓弱耦合情况, 只存在周期与准周期运动^[1,2], 在这种情况下, 已有几个严格的数学定理^[1,2,10]能给出普适的结果. 文献[3]给出 $k \leq 1$ 时准周期运动测度的标度律 $M(k) \propto (1-k)^p$, 只在 $k > 1$ 的超临界区域才能出现混沌运动. 对此也进行了大量的研究^[3-10]. 对在整个 φ 区间上混沌运动的出现问题, 有过关于拓扑混沌的研究^[11,12]. 对于物理学家来说, 更有意义的是以李雅普诺夫指数大于零为标志的混沌, 在文献[13,17]中曾研究过此问题. 本文继续研究 $k > 1$ 与 $k \gg 1$ 情况时混沌运动的测度及其标度律. 在这种情况下, 圆映象的一般结论可能没有普适意义. 但由于圆映象所具有的实际意义及其简单性, 这些结果对于两个振子耦合系统的混沌运动具有典型性的意义. 本文仍然采用文献[14]中提出的, 在 φ 轴的等分点上计算李雅普诺夫指数的办法.

二、计算方程与方法

研究的圆映象为

$$f(\theta) = \theta + \varphi - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta. \quad (1)$$

描述运动稳定性的重要特征量是李雅普诺夫指数 λ . 对于一维映象, 它定义为

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(\theta_n)|, \quad (2)$$

* 国家自然科学基金资助的课题.

1) 陈式刚, 一维映象与混沌运动, 1984年讲义; 王光瑞, 圆映象与混沌运动最新进展, 1986年讲义.

式中 N 为总的迭代次数。对于一维映象, 相应于某一个参数值只有一个 λ , 它只能是 $(+, 0, -)$ 三种情况之一。 $\lambda < 0$ 表征周期运动; $\lambda = 0$ 表征临界状态; $\lambda > 0$ 表征混沌运动。

当 $k > 1$ 时, 只有周期运动和混沌运动存在, 并且出现 $\lambda = 0$ 的测度为零, 这样可利用 λ 是否大于零为判据^[15], 区分混沌运动和周期运动, 进而可给出不同 k 值时混沌运动的测度。

本文选用的采样点为 $\mathcal{Q}(0, 0.5)$ 区间内的等分点。等分的根据是混沌测度在几乎大多数参数值处以各不相同的标度逼近勒贝格测度^[15, 16]。等分的步长为 $\Delta = 10^{-4}$ 。然后, 按(2)式计算各等分点的 λ 。

混沌运动的测度 $M(k)$ 为

$$M(k) = \frac{N_0}{5000}, \quad (3)$$

式中 N_0 为 $\lambda > 0$ 的点的数目。

对于周期运动, 同时也计算了转数 w

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_D^{(n)}(\theta_0) - \theta_0}{n}. \quad (4)$$

周期运动的 w 为一有理数。

在计算 λ 时, 初值 θ_0 取为映象的极值点, 亦即

$$\theta_0 = \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{1}{k}. \quad (5)$$

$+\theta_0, -\theta_0$ 分别为极小值和极大值。当从这两个不同的初值出发得到两个不同的吸引子时, 有双稳态。如果分别分析由 $+\theta_0$ 与 $-\theta_0$ 给出的吸引子, 对于给定的参数 $(k, \mathcal{Q})$ 和初值它们是唯一的。在 $1-\mathcal{Q}$ 处由 $-\theta_0$ 出发得到的吸引子, 与在 $\mathcal{Q}$ 处由 $+\theta_0$ 出发得到的吸引子, 具有相同的李雅普诺夫指数和互补的转数(即其和 $w(1-\mathcal{Q}, -\theta_0) + w(\mathcal{Q}, \theta_0)$ 为 1)^[7]。因此由 $\mathcal{Q}$ 的 $(0, 0.5)$ 区间上自 $\pm\theta_0$ 得到的结果可合并给出 $\mathcal{Q}$ 的 $(0, 1)$ 区间上由初值 $\pm\theta_0$ 之一出发的结果。对于混沌测度有

$$M(k) = \frac{1}{2} [M(k, +\theta_0) + M(k, -\theta_0)], \quad (6)$$

式中 $M(k, \pm\theta_0)$ 为 $\mathcal{Q}(0, 0.5)$ 区间上的分别以 $\pm\theta_0$ 为初值的混沌分数, $M(k)$ 为 $\mathcal{Q}(0, 1)$ 区间上的混沌分数, 它与初值无关。

在计算 M 时, 取计算 λ 的迭代次数为 3×10^3 , $\mathcal{Q}(0, 0.5)$ 区间的点数为 5000。对 $k = 1.075$ 时的计算表明, 把迭代次数增加一倍, 或把分点增加一倍, 对 M 的影响都不会超过 1%, 而且两者的影响是相反的。取 3×10^3 次迭代与 5000 个分点可节省计算机时间, 并能达到 1% 左右的精度。

三、结构区的计算结果与分析

$k = 1.0063$ 至 $k = 128\pi = 402.123860$ 范围内测度 $M(k)$ 的数值计算结果示于图

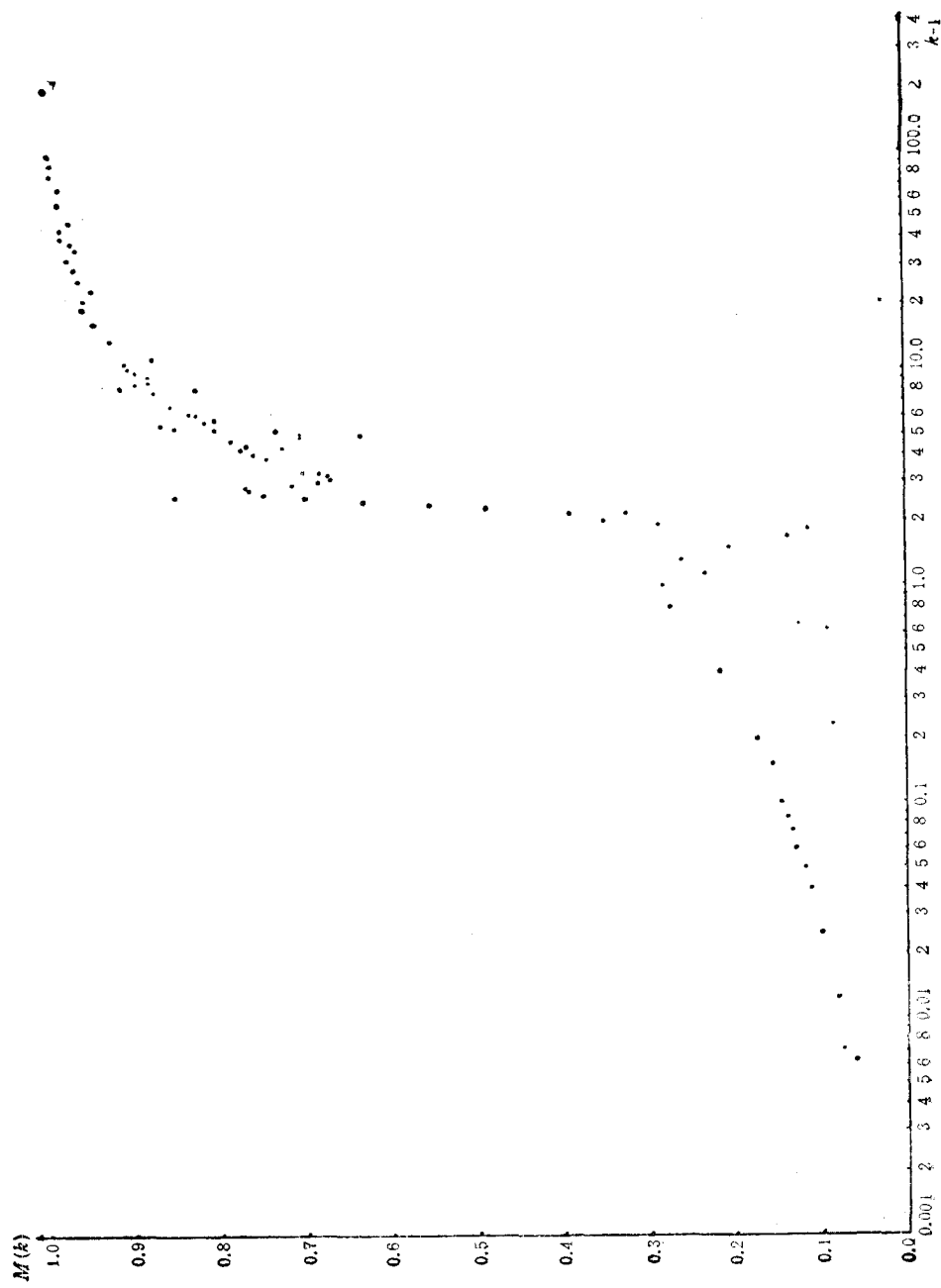


图1 $k = 1.0003$ 至 128π 范围内 $M(k)-k-1$ 曲线

1, 它给出 k 值相当大范围内混沌测度 $M(k)$ 的变化图象。其中 $k = 1.0063$ 至 2.0 即是文献[17]中已给出的结果。 $k > 2.0$ 至 12.0 范围内, 周期轨道有重要的贡献, 它使 $M(k)$ 曲线有复杂的结构。称之为结构区。为了深入观察此现象, 又绘制了图 2。同时参照文献[18—22] 以及我们的计算结果, 还绘制了 $k = 0$ 至 13.0 范围内的 $k-Q$ 相图 (见图 3)。

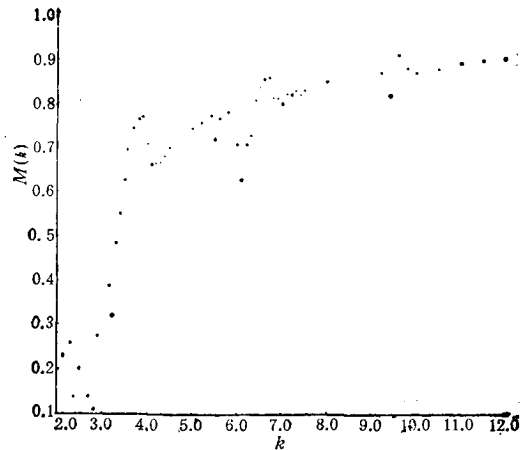


图 2 $k = 2.0$ 至 12.0 范围内 $M(k)-k$ 曲线

$M(k)$ 曲线中的每一谷都对应一个周期窗口。图 2 与图 3 对照, 可以识别出这些对应关系。首先以 $k \approx 2.8$ 处最深的谷来说明这个关系。 $k \approx 2.8$ 处的谷对应于 $1/1$ (当 θ_0 为极大值; 或 $0/1$, 当 θ_0 为极小值) 舌头中的周期窗口。当 k 由较小的值增加至 2.8 时, $1/1$ 舌头线性地增大, 所以 $M(k)$ 线性地降低。在 $k \approx 2.8$ 处, $1/1$ 舌头已通过倍周期分叉出现混沌, 所以 $M(k)$ 开始急剧上升。其它的谷都有相似的情况。

由图 2 与图 3 对比可以看出, 在图 3 中除 $1/1$ (或 $0/1$) 舌头以外, 其它 Aronld 舌头都已消失 (几乎都变成混沌)。图 2 中的其它谷对应于低周期的新分支 (这些新分支在图 3 中没有都画出)。例如 $k \approx 6$ 附近的较深的谷对应于转数为 $1/2$ 的第二支周期轨道, $k \approx 9$ 附近的谷对应于转数为 $0/2$ 的第二支周期轨道。 $1/3$ 与 $2/3$ 转数的第二支解出现于 $k \approx 4$, 第三支解出现于 $k \approx 5.5$, 第四支解出现于 $k \approx 7$, 第五支解出现于 $k \approx 7.4$ 。转数 $2/5, 3/5$ 的第二分支出现于 $k \approx 2.2$ 。至此图上剩下的唯一不属于上述情况的谷是 $k \approx 3.2$ 处的谷, 它对应于 $1/1$ 舌头的三倍周期窗口。

另一点需要说明的是, Farey 序列的倍周期及新出现的每一周期解 (对于同一 θ_0 初值) 都有两个分支, 称之为上分支与下分支。这使对应的谷之后都伴随有一较浅的谷。例如 $k \approx 4.0$ 附近的谷就包含有 $2/2$ (或 $0/2$) 上分支的贡献。至此, 已对结构区的峰谷作了较全面的分析。

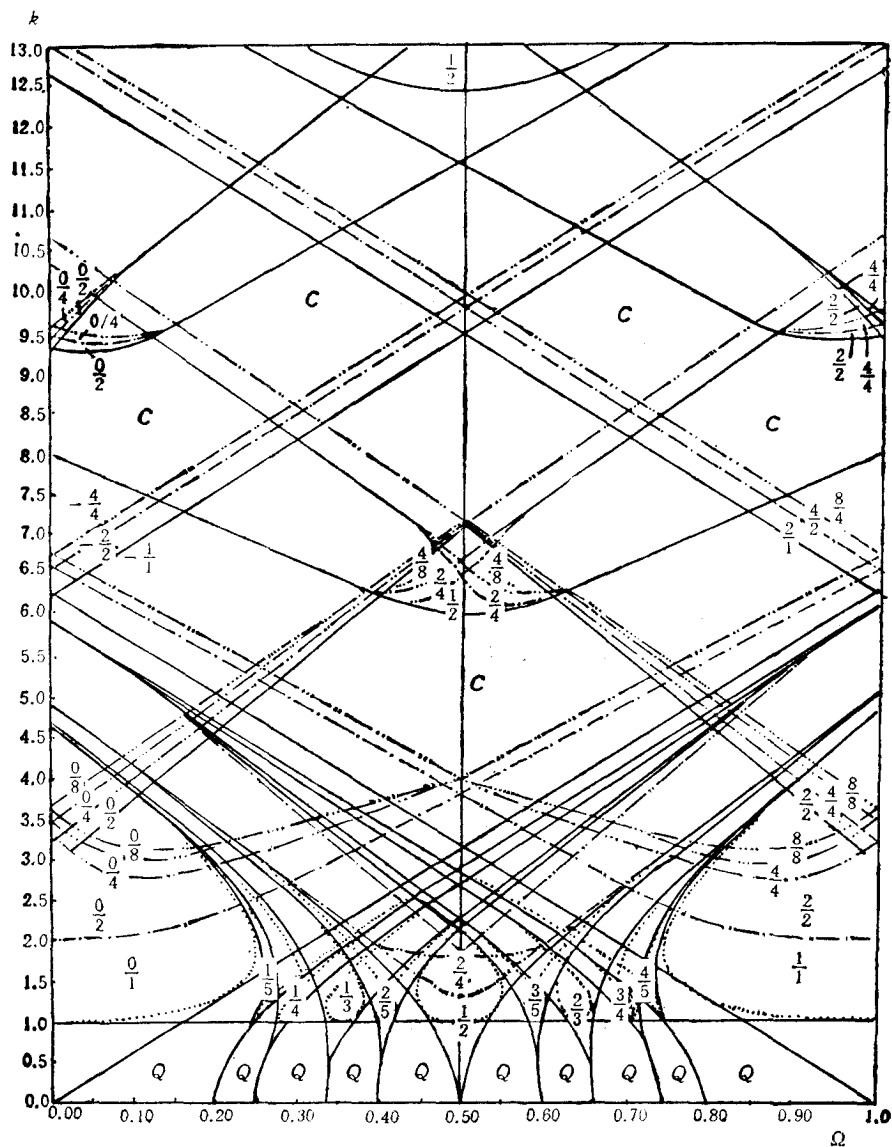


图3 $k=0$ 至 13.0 范围内 $k-Q$ 相图 数字为 Arnold 舌头的 M/N ; C 为混沌; Q 为准周期

四、标度区的结构与标度律

$k > 10.0$ 以后,图1给出随着 k 增加 $M(k)$ 趋向于1的图象.这时周期窗口的影响愈来愈不重要, $M(k)$ 的结构愈来愈简单,称之为标度区.为了详细考查,又绘制图4. 直线1是 k 为整数倍 π 值,直线2是 k 为其它值.可见,这时 $M(k)-k$ 关系具有无标度性,即有标度关系 $1-M(k) \propto k^{\beta''}$. 为了与临界线上线下的标度指数 β, β' 区别,在这里用 β'' .

$$1 - M(k) = \alpha' k^{\beta''}. \quad (7)$$

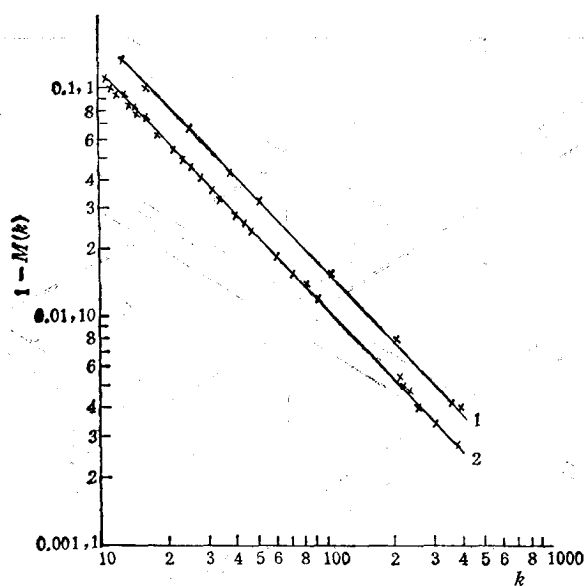


图4 $k=10$ 至 128π 范围内 k 为整数 π 时, $1-M(k)-k$ 直线(1) 以及 k 为其它数值时, $1-M(k)-k$ 直线(2)

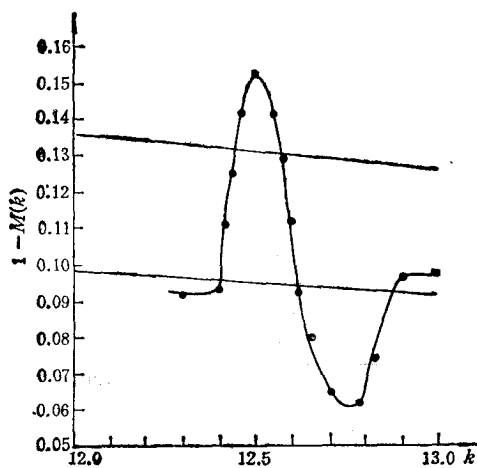


图5 $k=12.2$ 至 13.0 范围内(含 4π), $1-M(k)-k$ 曲线

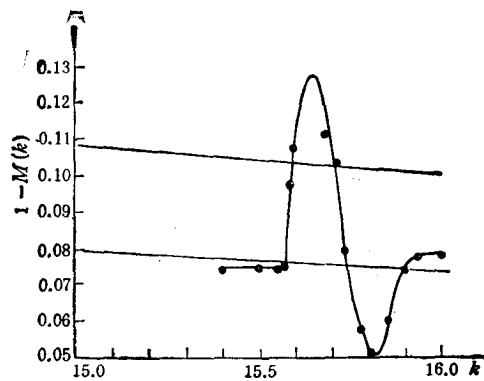


图6 $k=15.3$ 至 16.0 范围内(含 5π), $1-M(k)-k$ 曲线

对图4所示的点用最小二乘法以直线1,2拟合,可得

$$\alpha' = 1.60 \pm 0.05, \quad \beta'' = -1.004 \pm 0.007;$$

$$\alpha' = 1.377 \pm 0.008, \quad \beta'' = -1.056 \pm 0.008. \quad (8)$$

上述误差是分散度的方均根误差^[17].

为了进一步研究图4中直线1和2,分别在 $4\pi, 5\pi$ 附近进行了详细的计算,得到图5和图6. 图形显示在 $n\pi$ 的邻域具有振荡结构. 下面将对这些现象进行仔细分析与论证.

并证明 $\beta'' = -1$.

从图 2 中已经看到, 在奇数 π 的邻域, $M(k)$ 曲线有转数为 $0/2$ 的周期窗口产生的峰谷结构, 而在偶数 π 的地方, 则有转数为 $1/2$ 的周期窗口产生的峰谷结构. 事实上, 这种结构以 2π 为周期, 近似周期性地重复出现, 只是在 $k \rightarrow \infty$ 时变得更为有规律.

为了说明这一点, 引入轨道的符号表示^[23]. 设一转数为 P/Q 的周期轨道, 由 $f(\theta)$ 的极大点 M_0 (或极小点 m_0) 出发, 然后经过距 0 峰(或 0 谷)为 $i_1, i_2, \dots$ 距离的 P_{i_1} 或 N_{i_1} , P_{i_2} 或 $N_{i_2}, \dots, P_{i_{Q-1}}$ 或 $N_{i_{Q-1}}$ 而终止于 M_P (或 m_P). 其中 P_i 表 $f(\theta)$ 的第 i 峰(谷)的斜率为正的分支, N_i 表斜率为负的分支, M_P (或 m_P) 表距 M_0 为 P 的极大值(或极小值). 这一轨道的符号表示为

$$\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_{Q-1}} M_P \quad (\text{或 } \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_{Q-1}} m_P), \quad (9)$$

式中 σ_i 表示 P_i 或 N_i . 这一轨道与

$$\sigma_{i_1+1} \sigma_{i_2+2} \cdots \sigma_{i_{Q-1}+Q-1} M_{P+Q} \quad (\text{或 } \sigma_{i_1+1} \sigma_{i_2+2} \cdots \sigma_{i_{Q-1}+Q-1} m_{P+Q})$$

等价. 依此类推, 将有一组等价轨道. 这一组轨道中总有一条而且只有一条在 $\mathcal{Q}(0, 1)$ 中出现. 以后将以对应的转数为真分数的符号表示其在 $\mathcal{Q}(0, 1)$ 中出现的轨道.

通过计算或作图可知, $k \approx \pi$ 处出现的转数为 $0/2$ 的轨道为

$$P_{-1}m_0 \text{ 与 } N_0m_0 \quad (\text{由极小值出发})$$

或

$$P_1M_0 \text{ 与 } N_0M_0 \quad (\text{由极大值出发}).$$

同样, $K \approx 3\pi$ 处新出现的 $P/Q = 0/2$ 的轨道为

$$P_{-2}m_0 \text{ 与 } N_{-1}m_0 \text{ 或 } P_2M_0 \text{ 与 } N_1M_0.$$

由 $f(\theta)$ 的图形, 不难看出, 依此类推, $k \approx (2n-1)\pi$ 处新产生的 $P/Q = 0/2$ 轨道为

$$P_{-n}m_0 \text{ 与 } N_{-n+1}m_0 \text{ 或 } P_nM_0 \text{ 与 } N_{n-1}M_0.$$

同样可得, $k \approx 2n\pi$ 处新出现的 $P/Q = 1/2$ 的轨道为

$$P_{-n}m_1 \text{ 与 } N_{-n+1}m_1 \text{ 或 } P_{n+1}M_1 \text{ 与 } N_nM_1.$$

事实上任何转数的轨道(除周期 1 轨道外)都有以 $\Delta k = 2\pi$ 为周期产生的新轨道. 但对高周期轨道, 其在 $(\mathcal{Q}, k)$ 空间的面积更快地随 k 趋向零, 而且还可能在其它 k 值处产生新的轨道. 轨道总数随 k 迅速增加, 其对测度的贡献是较平滑的. 于是在高 k 值处看到了主要由 $P/Q = 0/2$ 与 $1/2$ 轨道贡献峰谷结构. 奇数 π 处为 $0/2$ 的贡献, 偶数 π 处为 $1/2$ 的贡献. 这就是在图 4 至图 6 中看到的现象.

最后, 要证明 $\beta'' = -1$. 为此, 首先计算 $P/Q = 0/1$ 舌头在 $k \rightarrow \infty$ 时其周期窗口在 $\mathcal{Q}$ 轴上所占的测度. $k \rightarrow \infty$ 时 $0/1$ 轨道的分叉可渐近地用二次单峰映象

$$f(\theta) \approx f(\theta_0) + \frac{1}{2} f''(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2 \quad (10)$$

来计算, 式中 $\theta_0 = \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{1}{k}$. (10) 式可通过变换成为

$$f(x) = 1 - ax^2$$

映象, 式中

$$a = \pi k \sin 2\pi\theta_0 \left(\frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_0 - \mathcal{Q} \right).$$

由此可得倍周期分叉聚点 $a_\infty = 1.40116 \dots$ 所对应的 Q_∞ 为

$$Q_\infty = \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_0 - \frac{a_\infty}{\pi k \sin 2\pi\theta_0} \approx \frac{k}{2\pi} - \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{a_\infty}{\pi}\right) \frac{1}{k}.$$

随 k 增加方向, 0/1 轨道出现线为 $Q_0 = k/2\pi$, 所以倍周期区间为 $\Delta Q(a_\infty + \frac{1}{4})/\pi k$. 此外, 在 $a(1.40116, 2)$ 区间内有 10% 为周期区, 所以 0/1 舌头中向左或向右分支的总的周期测度为

$$\Delta Q = \left[a_\infty + 0.1 \times (2 - a_\infty) + \frac{1}{4} \right] / \pi k = 0.54/k,$$

0/1 分支对应的 β'' 确为 -1. 它来自 $f''(\theta_0) \propto k$. 但 0.54 在数值上与 (8) 式中的系数仍有相当差距, 这些差别应来自高周期轨道的贡献.

对于高周期轨道, 例如对转数为 P/Q 的周期轨道, 在大 k 值时可只研究

$$F(\theta) = f^{(Q)}(\theta) - P.$$

在 $\theta_0 = \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{1}{k}$ 处所对应的渐近二次单峰映象

$$F(\theta) \approx F(\theta_0) + \frac{1}{2} F''(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2,$$

式中

$$F''(\theta_0) = 2\pi k \sin 2\pi\theta_0 (1 - k \cos \theta_1)(1 - k \cos \theta_2) \cdots (1 - k \cos \theta_{Q-1}).$$

这时类似 0/1 舌头的具体计算是很复杂的, 因此只作如下定性的讨论. 通常(除上下分支相接区以外) $\cos \theta_i$ 不随 $k \rightarrow \infty$ 而趋向零, 因此, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$F''(\theta_0) \propto K^Q,$$

所以每一 $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_{Q-1}} M_P$ 轨道的 ΔQ 以

$$(\Delta Q)_{\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_{Q-1}} M_P} \propto k^{-Q}$$

随 k 迅速趋向于零. 但是 P/Q 轨道的类型 $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_{Q-1}} M_P$ 也将随 k 值增加而迅速增加. 其中每个 σ_i 的 i 的选择可能性与 k 成正比地增加(上面已经看到, 这在 0/2 与 1/2 情况是确实的), 因此 $(Q-1)$ 个 σ_i 的选择可能性将以 k^{Q-1} 增加, 所以 P/Q 轨道的总贡献为

$$\sum_{\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_{Q-1}}} (\Delta Q)_{\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_{Q-1}} M_P} \propto k^{-1}.$$

也就是说除了峰谷结构外, 任一转数的周期轨道的总测度都正比于 k^{-1} . 这样, 证明了

$$\beta'' = -1.$$

至于 (8) 式的系数, 由上面的讨论可见, 高周期轨道是不可忽略的. 但是每一个由确定符号 $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_{Q-1}} M_P$ 表示的周期轨道的贡献都是非常小的.

- [1] I. P. Cornfeld, S. V. Formin, Ya. G. Sinai, *Ergodic Theory*.
- [2] L. Glass, R. Perez, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1772; *Phys. Lett.*, **90A**(1982), 441.
- [3] M. H. Jensen, P. Bak and T. Bohr, *Phys. Rev.*, **A30**(1984), 1960; *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1637.
- [4] M. R. Herman, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol 597 Springer, Berlin, (1977).
- [5] M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff, S. J. Shenker, *Physica*, **5D**(1982), 370.
- [6] S. J. Shenker, *Physica*, **5D**(1982), 405.
- [7] R. Perez and L. Glass, *Phys. Lett.*, **90A**(1982), 441.
- [8] T. Bohr and G. Gunaratne, *Phys. Lett.*, **113A**(1985), 55.
- [9] P. Cvitanovic, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 343.
- [10] K. Kaneko, *Prog. Theor. Phys.*, **72**(1984), 1089.
- [11] B. Friedman and C. Tresser, *Phys. Lett.*, **A117**(1986), 15.
- [12] R. S. Mackay, C. Tresser, *Physica*, **19D**(1986), 206.
- [13] 余仁芳、陈光旨、陈式刚、王光瑞, 贵州大学学报, **4**(1987), 100.
- [14] 王友琴、陈式刚, 计算物理, **3**(1986), 387.
- [15] 王友琴、陈式刚, 物理学报, **33**(1984), 341.
- [16] M. K. Jakobson, *Commun. Math. Phys.*, **81**(1981), 33.
- [17] Chen Shigang, Wang Guangrui, *Commun. Theor. Phys.*, **10**(1988), 11.
- [18] P. Perez *et al.*, *Phys. Lett.*, **90A**(1982), 441.
- [19] M. Schell *et al.*, *Phys. Rev.*, **A28**(1983), 373.
- [20] L. Glass *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1772.
- [21] K. Kaneko, *Prog. Theor. Phys.*, **72**(1984), 1089.
- [22] R. S. Mackay, *Physica*, **19D**(1986), 206.
- [23] 张忠建、陈式刚, 物理学报, **38**(1989), 1.

CHAOTIC MEASURES AND SCALING LAWS FOR SUPERCRITICAL CIRCLE MAP

WANG GUANG-RUI CHEN SHI-GANG

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, 100088

(Received 18 April 1988; Revised Manuscript Received 20 June 1990)

ABSTRACT

In this paper, we investigate the behaviour of the chaotic motions when parameter $k > 1$ and $k \gg 1$ for the circle map. We give out the measures of the chaos and its scaling laws, by the methods of calculating the Lyapunov exponents and winding number for isometric point on Ω axis.

PACC: 0545