

利用单光子微激射器产生强压缩腔场的理论研究

李 福 利¹⁾

兰州大学现代物理系, 兰州, 730001

1989 年 12 月 13 日收到

本文研究了初时占据上能级的二能级原子在相等的时间间隔中依次与初始处于相干态的单模腔场的相互作用, 发现若初始场较强时, 在这一过程中可以始终使场处于压缩态, 并使之不断得到压缩. 同时还简要地讨论了原子与压缩态腔场的相互作用.

PACC: 4250; 4252; 3280

一、引 言

由单原子支持的单光子和双光子微激射器 (Micromaser) 已相继实现了运转^[1], 这使得实验研究单原子与量子腔场模间的相互作用成为可能. 这种微激射器一种可能的用途是用来在腔中制备具有特定统计性质的量子状态, 继而研究原子与这些腔场的作用. 最近, Krause 等人提出了一个利用单光子微激射器制备单一光子数态的实验方案^[2]. 本工作的目的是探讨在这一实验中产生强压缩场的可能性.

单个原子与单模腔场相互作用中场的压缩现象已有许多作者进行了研究^[3-5]. 文献 [3] 研究了初始处于相干态的单模腔场与一个初时占据上能级的二能级原子的相互作用, 结果表明, 在这一过程中腔场最大只可能获得 20% 的压缩. 在文献 [4] 中, 作者们考虑了一个类似于文献 [3] 的过程, 不同之处是原子为级联型三能级原子, 结果表明, 在这一过程中腔场最大可获得 32% 的压缩. 在文献 [5] 中, 本文作者及合作者研究了级联多光子跃迁过程中腔场的压缩, 发现与单光子过程相比, 在多光子过程中腔场可获得较强的压缩. 然而, 迄今对单原子与单模腔场相互作用的理论研究都表明, 在相互作用开启之后的短时间 (远小于腔中光子的逃逸时间) 内腔场不可能获得很强的压缩.

本文假定初始时刻腔场处于相干态而原子占据其上能级, 原子与原子间相距的时间间隔等于每一个原子同腔场相互作用的时间, 然后让原子依次与腔场作用, 研究在这一过程中场的压缩性质和原子与压缩腔场间的相互作用.

与文献 [2] 一样, 在本工作中也未计及腔损. 这是因为, 腔损总使场的压缩减弱甚至解除^[6,7], 要产生强压缩场应尽可能减小腔损的影响. 为此, 须提高腔的 Q 值, 同时使产生

1) 现在西安交通大学物理系, 西安, 710049.

压缩场的时间远小于腔中光子的逃逸时间.微激射器提供了这种可能.现今的微激射器使用的微波腔品质因子高达 10^{11} ,光子的逃逸时间 (t_c) 可达秒的数量级^[2],即使原子束流强度低至 10^3 s^{-1} (每个原子与腔场的作用时间为 10^{-3}),数十个原子依次与腔场作用的总时间也仅为光子逃逸时间的百分之一,远小于 t_c .显然,在数十个原子依次跨越腔场这样一个相对于 t_c 来讲瞬时发生的物理过程中腔损完全可以不计^[8].实际上,微激射器恰好是研究这样一种瞬时物理过程的有力工具.

二、任意时刻腔场的密度矩阵算符

为了使本文的方法不限于仅能处理二能级原子的情况,以下考虑一个具有 M 条不等间距能级的原子与单模腔场的相互作用模型^[9],这是 Jaynes-Cummings 模型的直接推广^[10].模型的哈密顿量为

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^M \hbar \omega_i A_i^\dagger A_i + \hbar \Omega a^\dagger a + \hbar \left[\sum_{i=1}^{M-1} \lambda_i A_{i+1}^\dagger A_i a + \text{h.c.} \right], \quad (1)$$

式中 λ_i 为原子与场的耦合常数, $a^\dagger(a)$ 为光子的产生(湮没)算符, $A_i^\dagger(A_i)$ 为产生(湮没)一个处于第 i 条能级上的原子的算符, $\hbar \omega_i$ 为原子第 i 条能级的能量, Ω 为腔场的频率.

引入总激发数算符

$$\hat{N} = a^\dagger a + \sum_{i=1}^M i A_i^\dagger A_i, \quad (2)$$

可直接证明它与 $\hat{H}$ 互易,这意味着 $\hat{H}$ 不可能将两个具有不同 $\hat{N}$ 的本征值的状态耦合起来.因此,可以将所考虑的 Hilbert 空间按照 $\hat{N}$ 的本征值划分成一系列的子空间,每一子空间中的所有态矢量具有相同的 $\hat{N}$ 的本征值,然后在这每一个子空间中分别对角化 $\hat{H}$.

考虑一态矢量

$$|i, n\rangle = |i\rangle \otimes |n\rangle, \quad (3)$$

在这一状态中原子处于第 i 条能级而场中有 n 个光子.显然, $N = M + n$ ($\hat{N}$ 的本征值)的子空间由: $|M, n\rangle, |M-1, n+1\rangle, \dots, |i, n+M-i\rangle, \dots, |1, n+M-1\rangle$ 等 M 个态矢量所张开.由于光子数 n 可取任意正数,实际上存在着无限多个这样彼此正交的 M 维子空间.在 $N = M + n$ 子空间中的任意态矢量可表示为

$$|\phi_n\rangle = \sum_{i=1}^M C_{n+M-i,i} |i, n+M-i\rangle, \quad (4)$$

式中展开系数 $C_{n+M-i,i}$ 由定态 Schrödinger 方程

$$\sum_{i=1}^M (H_{ii} \delta_{ii'} + H_{ii'} - E \delta_{ii'}) C_{n+M-i',i'} = 0 \quad (5)$$

确定.方程(5)中的矩阵元

$$H_{ii} = (n + M - 1) \hbar \Omega + \hbar \omega_i - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_j, \quad (5a)$$

$$H_{ii'} = \lambda_{i'} \sqrt{n+M-i'} \delta_{ii'+1} + \lambda_{i'-1} \sqrt{n+M-i'+1} \delta_{i,i'-1} \quad (i \neq i'), \quad (5b)$$

式中的偏调参数由下式定义:

$$\Delta_i = \hbar\Omega - \hbar(\omega_{i+1} - \omega_i) \quad i = 1, 2, \dots, M-1. \quad (5c)$$

求解方程(5)得到 $\hat{H}$ 的本征函数 $|\phi_{n\sigma}\rangle$ 和本征值 $E_{n\sigma}$. 如初时原子占据第 M 条能级, 由于 $\hat{N}$ 的本征值是守恒量, 则在以后任意时刻原子和场只可能处在 $N = M, M+1, \dots, M+n, \dots$ 等子空间中, 这一性质由完备条件

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^M |\phi_{n\sigma}\rangle \langle \phi_{n\sigma}| = 1 \quad (6)$$

所表征.

在以 $|\phi_{n\sigma}\rangle$ 为基矢的表象中场与原子的密度矩阵算符 $\hat{\rho}$ 的运动方程可化成^[9]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{n\sigma, n'\sigma'} = -\frac{i}{\hbar} (E_{n\sigma} - E_{n'\sigma'}) \rho_{n\sigma, n'\sigma'}. \quad (7)$$

这里

$$\rho_{n\sigma, n'\sigma'}(t) = \langle \phi_{n\sigma} | \hat{\rho}(t) | \phi_{n'\sigma'} \rangle.$$

方程(7)的解为

$$\rho_{n\sigma, n'\sigma'}(t) = \rho_{n\sigma, n'\sigma'}(t_0) \exp[-i/\hbar (E_{n\sigma} - E_{n'\sigma'})t], \quad (8)$$

式中

$$\rho_{n\sigma, n'\sigma'}(t_0) = \rho_{nn'}(t_0) (C^{-1})_{n+M-\sigma, \sigma}^{n+M-\sigma, \sigma} (C^{-1})_{n+M-\sigma', \sigma'}^{n+M-\sigma', \sigma'}, \quad (9)$$

而 $\rho_{nn'}(t_0)$ 为 t_0 时刻场的密度矩阵元, C^{-1} 为(4)式中变换矩阵 C 的逆矩阵.

由(8)式易求得 $t(t > t_0)$ 时刻场的密度矩阵元为

$$\begin{aligned} \rho_{m, m'}(t) = & \sum_n \sum_{j=1}^M \sum_{j'=1}^M (C^{-1})_{n+M-j, j}^{n+M-j, j} \cdot (C^{-1})_{n+M+m'-m-j', j'}^{n+M+m'-m-j', j'} \\ & \cdot \rho_{ni, n+m'-m, j'}(t_0) \cdot \exp[-i/\hbar (E_{nj} - E_{n+m'-mj'})t]. \end{aligned} \quad (10)$$

上式中对 n 求和应满足条件

$$\max\{m+1-M, m-m', 0\} \leq n \leq m. \quad (11)$$

方程(8)–(10)构成了一组递推关系. 若 t_0 时刻场的密度矩阵已知, 则由以上各式可求得经一个处于 M 能级原子作用之后 $t(>t_0)$ 时刻场的密度矩阵. 这样, 就可以由 $t_0 = 0$ 时刻出发, 研究经过若干个原子依次与场作用之后场的各种性质的变化.

t 时刻原子与场的物理量由下面的公式计算. 原子占据第 i 条能级的概率

$$P_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^M \sum_{\sigma'=1}^M C_{n+M-i, j}^{\sigma, \sigma'} C_{n+M-i, j}^{\sigma', \sigma} \text{Re}(\hat{\rho}_{n\sigma, n\sigma'}). \quad (12)$$

引入腔场的慢变复振幅算符^[9]

$$d_1 = \frac{1}{2} (ae^{i\Omega t} + a^+ e^{-i\Omega t}), \quad (13a)$$

$$d_2 = \frac{1}{2i} (ae^{i\Omega t} - a^+ e^{-i\Omega t}), \quad (13b)$$

其方均涨落

$$\langle \Delta d_1^2 \rangle = \frac{1}{4} (2\langle a^+a \rangle + 1 + \langle a^2 \rangle e^{2i\Omega t} + \langle a^{+2} \rangle e^{-2i\Omega t} - \langle a e^{i\Omega t} + a^+ e^{-i\Omega t} \rangle^2), \quad (14a)$$

$$\langle \Delta d_2^2 \rangle = \frac{1}{4} (2\langle a^+a \rangle + 1 - \langle a^2 \rangle e^{2i\Omega t} - \langle a^{+2} \rangle e^{-2i\Omega t} + \langle a e^{i\Omega t} - a^+ e^{-i\Omega t} \rangle^2), \quad (14b)$$

式中

$$\langle a^+a \rangle = \sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^M \sum_{\sigma'=1}^M (n+M-i) C_{n+M-i,i}^{\sigma'} \cdot C_{n+M-i,i}^{\sigma} \operatorname{Re}(\rho_{n\sigma,n\sigma'}), \quad (15a)$$

$$\langle a^+ e^{-i\Omega t} + a e^{i\Omega t} \rangle = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^M \sum_{\sigma=1}^M \sum_{\sigma'=1}^M \sqrt{n+M-i+1} C_{n+M-i+1,i}^{\sigma'} \cdot C_{n+M-i,i}^{\sigma} \operatorname{Re}(\rho_{n\sigma,n+1\sigma'}), \quad (15b)$$

$$\langle a^+ e^{-i\Omega t} - a e^{i\Omega t} \rangle = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^M \sum_{\sigma=1}^M \sum_{\sigma'=1}^M \sqrt{n+M-i+1} \cdot C_{n+M-i+1,i}^{\sigma'} \cdot C_{n+M-i,i}^{\sigma} \operatorname{Im}(\rho_{n\sigma,n+1\sigma'}), \quad (15c)$$

$$\langle a^{+2} e^{-2i\Omega t} + a^2 e^{2i\Omega t} \rangle = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^M \sum_{\sigma=1}^M \sum_{\sigma'=1}^M \sqrt{(n+M-i+1)(n+M-i+2)} \cdot C_{n+M-i+2,i}^{\sigma'} \cdot C_{n+M-i,i}^{\sigma} \operatorname{Re}(\rho_{n\sigma,n+2\sigma'}). \quad (15d)$$

$\langle \Delta d_1^2 \rangle$ 和 $\langle \Delta d_2^2 \rangle$ 满足测不准关系

$$\langle \Delta d_1^2 \rangle \cdot \langle \Delta d_2^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{16}. \quad (16)$$

当其中之一满足条件

$$\langle \Delta d_i^2 \rangle < \frac{\hbar}{4} \quad i = 1, 2 \quad (17)$$

时,称腔场处于压缩态.

在以上各式中取 $M = 2$,即可得到研究二能级原子与单模腔场相互作用中场和原子的动力学行为的计算公式.

三、计算结果与讨论

在本文的计算中取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{M-1} = \lambda$, $\hbar = 1$, 并以 $1/\lambda$ 作为时间单位. 在这里仅对共振情况感兴趣,故取 $\Delta_i = 0$.

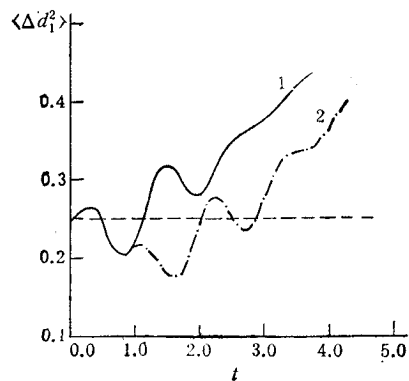
在 $t = 0$ 时假定腔场处于相干态,其密度矩阵元为

$$\rho_{nn'} = z^{n'} z^{*n} (n! n'!)^{-1/2} e^{-\bar{n}}, \quad (18)$$

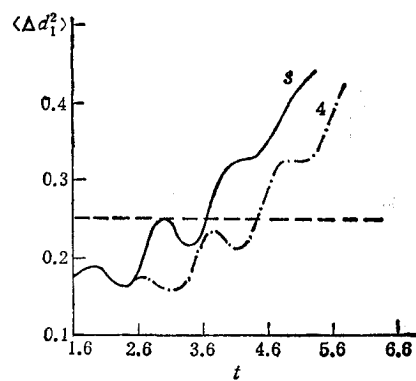
式中 $\bar{n} = |z|^2$ 为初始场中的平均光子数. 经过一个处于上能级的二能级原子的作用,这样的初始场可进入压缩态^[3],设 t_1 时刻场达到最深的压缩. 以这一时刻场的状态为初始态,让它与第二个占据上能级的原子相互作用;再以第二个原子与场相互作用经过 t_1 时刻

场的状态为初始态, 让它与第三个占据上能级的原子发生作用, 以此类推, 由(18)式所给定的场的状态出发可以细致地考察经过若干个原子依次与之作用之后场的压缩性质。

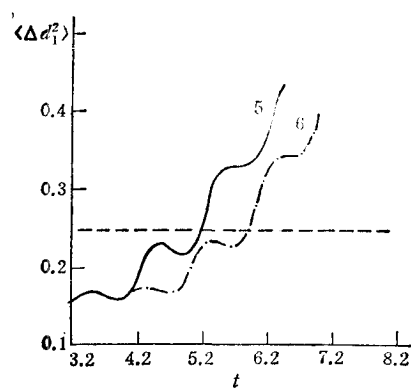
在图 1 和图 2 中分别给出 $\bar{n} = 7$ 和 $\bar{n} = 25$ 时 $\langle \Delta d_1^2 \rangle$ 随时间的演化 (图上的数字



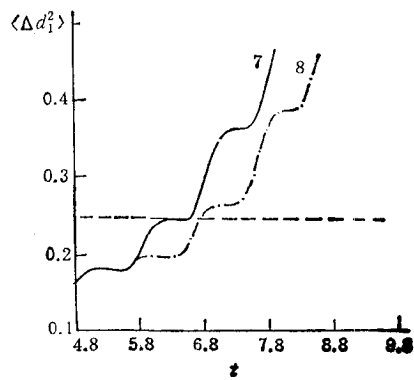
(a)



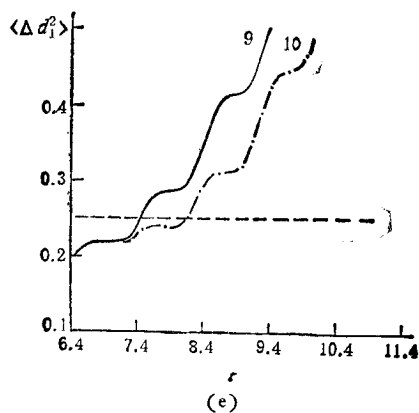
(b)



(c)



(d)



(e)

图 1

 $\bar{n} = 7$

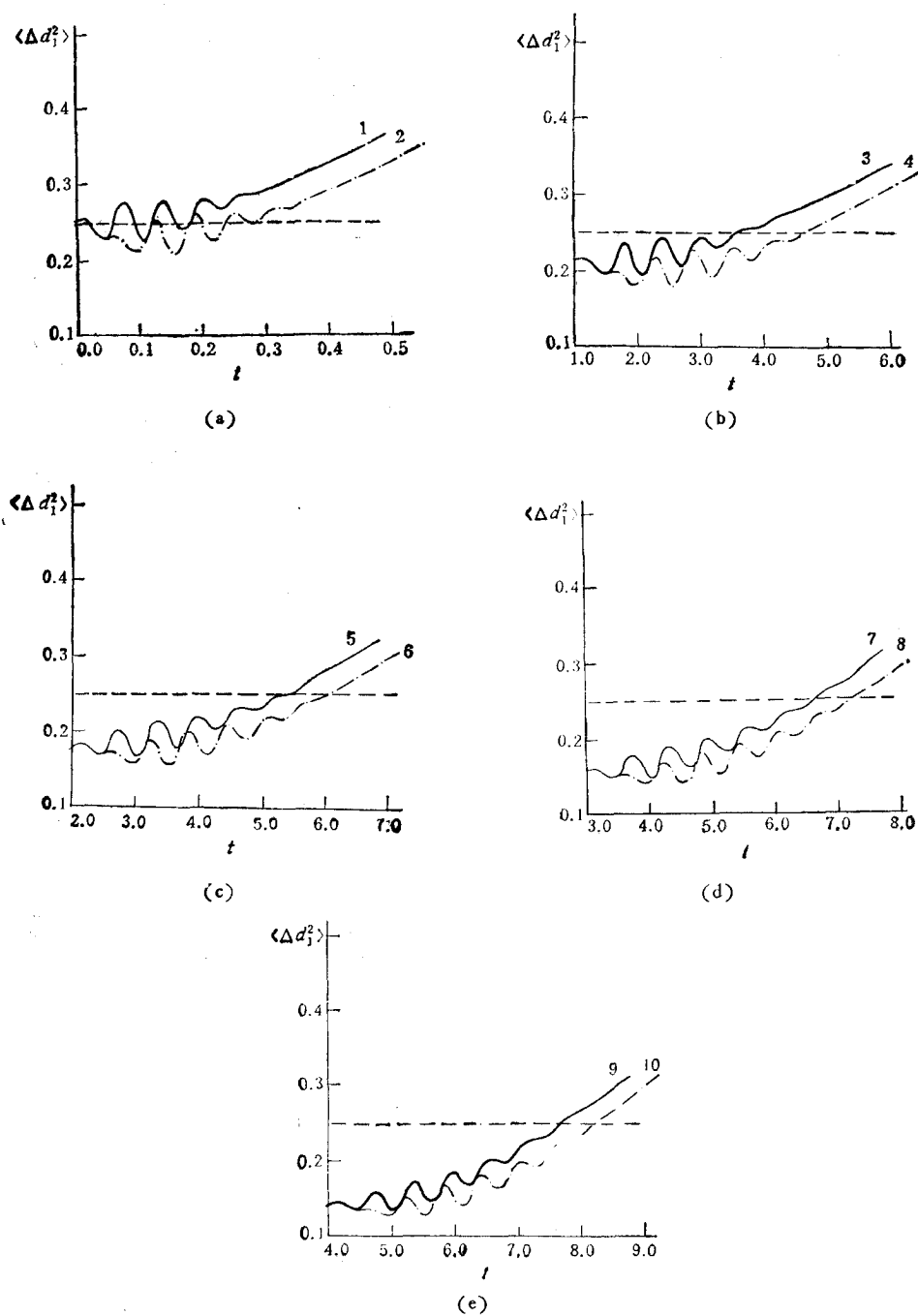


图 2

 $\bar{n} = 25$

表示与腔场相互作用的原子的序号), 所有的时间都从第一个原子与腔场作用开始时刻计起。由图 1($\bar{n} = 7$) 可以看到, 在前 4 个原子与场相互作用中场不断得到压缩, 经第 4 个原子的作用之后腔场的最大压缩达 37% ($\langle \Delta d_1^2 \rangle_{\min} = 0.1571$); 然而从第 5 个原子开始,

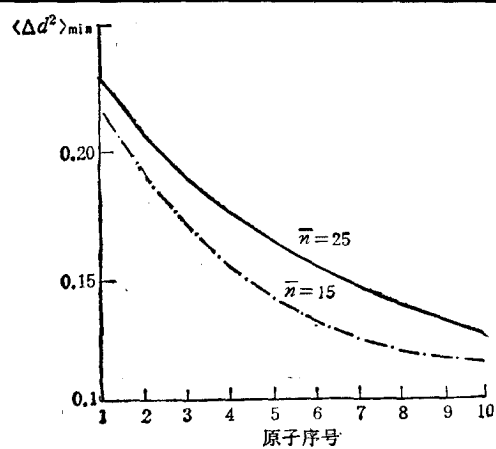
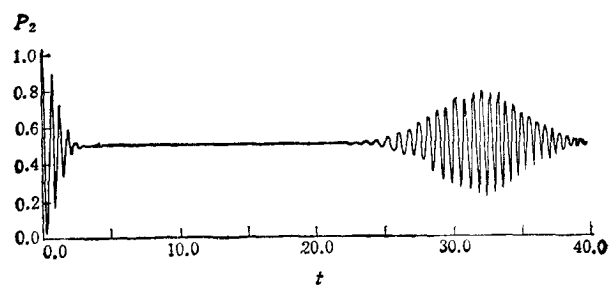
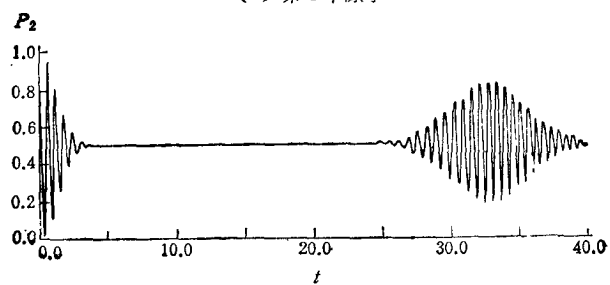


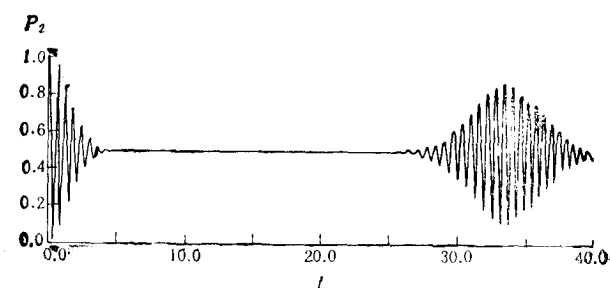
图 3

 $\bar{n} = 15$ (---); $\bar{n} = 25$ (—)


(a) 第 1 个原子



(b) 第 5 个原子



(c) 第 10 个原子

图 4

腔场不再能被进一步压缩,而且随着原子不断与之作用,压缩逐渐变浅.还计算过 $\bar{n} = 3$ 的情况,结果从第 2 个原子与腔场作用开始场就不可能被进一步压缩.但由图 2($\bar{n} = 25$) 可以发现,随着原子依次与腔场作用,场能不断被压缩,在经第 10 个原子作用之后场的最大压缩达到 48.8% ($\langle \Delta d_i^2 \rangle_{\min} = 0.1280$). 在图 1 和图 2 中原子依次与腔场相互作用的时间间隔 λz 分别为 0.8 和 0.5,由图 1 和图 2 可以看到,在这一时间间隔中场始终处于压缩态.

图 3 给出在每一个原子与场相互作用之中场可获得的最大压缩量 ($\langle \Delta d_i^2 \rangle_{\min}$). 可以看到,在跨越腔场的原子数目相同的情况下,初始场较弱时压缩则较深.

上述结果表明,为了在腔中制备出强压缩场,应使初始场有足够的强度,以便能在一给定的时间(即跨越腔场的原子数确定)内场能持续获得压缩,在这一前提下,稍弱的初始场则最终可得到较强的压缩.

通过上述过程可以在腔中制备很强的压缩态,然后就能够研究后续原子与腔场相互作用. 原子占据各能级的概率随时间的演化特征提供了腔场的统计信息^[2,11,12], 通过对它的测量有可能实现对腔场统计性质的间接测量^[2]. 图 4 为 $\bar{n} = 25$ 时第 1、第 5 和第 10 个原子占据最上能级的概率随时间的演化. 比较图 4 各图可以看到, Collapse 的时间在逐渐增大,然而 Revival 的中心位置没有显著变化. 由图 2 知道,在第 10 个原子与腔场相互作用之初腔场已处于相当深的压缩态,这里的结果表明,在前 9 个原子相继跨过腔场之后腔中的平均光子数与初态相比并无明显的增加,而光子数的分布相对于相干态变窄^[12]. 对平均光子数和光子数分布的直接数值计算证实这一点. 将这里的结果与文献 [12] 比较,可以发现由单光子微激射器产生的压缩态其压缩方向与相干激发方向平行.

四、结 语

本文研究了若干个初时占据上能级的二能级原子在相等的时间间隔中依次与初始处于相干态的单模腔场的相互作用,结果表明,若初始场较强,利用这一过程可使腔场达到相当深的压缩状态. 由于微激射器运转过程中谐振腔里仅有几十个光子,其辐射功率极低,对其直接测量是不可能的. Kranse 等人的研究结果表明^[2],在微激射器中占据下能级的出射原子数分布概率与腔场的统计性质相关,利用这一性质有可能实现对腔场压缩性质的间接测量. 本文的结果也表明,原子占据上能级的概率间接提供了腔中压缩场的统计信息.

在本文中假定所研究的过程的持续时间远小于腔中光子的逃逸时间,在这一条件下未计及腔损的影响. 在现已实现的单光子微激射器中这一条件是能够得到满足的,因此本文研究的过程是一个在微激射器中有可能实现的瞬态过程.

- [1] D. Meschede, H. Walther and G. Muller, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1987), 551.
G. Rempe, H. Walther and N. Klein, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 553.
- [2] J. Krause, M. O. Scully and H. Walther, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 1915; *Phys. Rev.*, **A36**(1987), 4547.
- [3] P. Meystre and M. S. Zubairy, *Phys. Lett.*, **A89**(1982), 1390.
- [4] 李孝申、刘正东、龚昌德, *物理学报*, **36**(1987), 1652.
- [5] Fu-li Li, X. S. Li, D. L. Lin and T. F. George, *J. Phys. B*, **22**(1989), 2977.
- [6] R. R. Puri and G. S. Agarwal, *Phys. Rev.*, **A33**(1986), 3610.
- [7] J. R. Kuklinski and J. L. Madajczyk, *Phys. Rev.*, **A37**(1988), 3175.
- [8] S. M. Barnett and P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A33**(1986), 2444.
- [9] Fu-li Li, D. L. Lin, T. F. George and X. S. Li, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 1394.
- [10] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**(1963), 89.
- [11] M. Venkata *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **B6**(1989), 228.
- [12] G. J. Milburn, *Optica Acta*, **31**(1984), 671.

A THEORETICAL STUDY OF GENERATION OF A STRONG SQUEEZED CAVITY FIELD BY USE OF ONE PHOTON MICROMASER

LI FU-LI

Department of Modern Physics, Lanzhou University, Lanzhou, 730001

(Received 13 December 1989)

ABSTRACT

In this paper interaction of two-level atoms initially occupied the upper most level with a single mode of cavity field initially in a coherent state is investigated. Let the atoms interact in sequence with the field in equal time intervals and we find that the field can be kept in squeezed states and squeezed continuously in this process if initial intensity of the field is strong. The atoms interacting with the squeezed light are also discussed.

PACC: 4250; 4252; 3280