

常参数波荡器自由电子激光中电子相轨道 从周期性到非周期性的演化

张世昌 胡忠秀 王文耀

电子科技大学物理系, 成都, 610054

1990年1月23日收到

本文讨论常参数波荡器 (untapered wiggler) 自由电子激光中电子的运动, 发现考虑电子束与激光场之间的能量交换后, 随着电子束等离子体频率增加, 部份电子的相轨道将变成非周期性, 随机型。

PACC: 4255T; 0250; 0260

一、引 言

自由电子激光是近年来出现的高功率可调谐相干光源, 已有许多理论研究和实验报道。但是, 有关自由电子激光器中电子运动的随机性问题, 研究得较少。文献[1]讨论了随着波荡器 (wiggler 或 undulator) 场幅值增加时, 电子运动出现随机性的情况。文献[2]详细地分析了使用变参数波荡器时, 如果波荡器的幅值(或波数)空间变化率较大, 则部份电子的相轨道也将变成非周期性, 随机型。最近, 文献[3]研究了由于边带不稳定性 (sideband instability) 增长到一定程度后, 电子运动的随机性。

在上述理论分析中, 大多假设了电子束与光场之间的能量交换甚小, 从而计算中将光场幅值近似处理成常量。实际情况自然存在电子束将能量传递给光场, 因此才出现受激放大辐射, 光场幅值得以增长。Sprangle 等人^[4]曾对高增益型自由电子激光 (强泵弱流型) 进行过系统研究, 发现在这种类型的自由电子激光器中, 虽然电子束的集体效应处于次要地位, 但激光场的增益却可以很高, 其幅值增长很大。因此, 在计算中考虑电子束与光场之间的能量交换, 把光场幅值处理成变量, 是有意义的, 可以从中获得更多信息。本文研究表明, 对于普通的常参数波荡器自由电子激光, 当考虑电子束与光场之间的能量交换后, 随着电子束等离子体频率增加, 部份电子运动的相轨道也会演化成非周期性, 随机型。

二、数学物理模型

为方便计, 如文献[1—5]那样, 采用一维模型。按 Kroll-Morton-Rosenbluth (简称

KMR) 理论^[4], 设常参数波荡器是圆极化的, 其矢势为

$$\mathbf{A}_w = -A_w(\hat{e}_x \cos k_w z + \hat{e}_y \sin k_w z), \quad (1)$$

式中 A_w 和 k_w 分别为波荡器的幅值和波数, $\hat{e}_x$ 和 $\hat{e}_y$ 为 x 和 y 方向的单位矢. 光场矢势可写成

$$\mathbf{A}_i = A_i[\hat{e}_x \cos(k_i z - \omega_i t) - \hat{e}_y \sin(k_i z - \omega_i t)], \quad (2)$$

式中 A_i , k_i 和 ω_i 分别为光场的幅值、波数和角频率. 由(1)和(2)式可导出电子的哈密顿函数

$$\begin{aligned} H_0 &= \left[\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_w - \frac{e}{c} \mathbf{A}_i \right)^2 c^2 + m_0^2 c^4 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \gamma m_0 c^2, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 c 为真空中的光速, e 和 m_0 为电子的电量 and 静止质量, $\mathbf{P}$ 和 γ 为电子的正则动量和洛伦兹能量因数. 采用适当的正则变换, 可得到如下 KMR 方程^[4]:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dz} &= k_i + k_w - \frac{\omega_i}{c} (\gamma^2 - \mu^2 + 2a_w a_i \cos \phi)^{-1/2} \\ &\approx k_w - \frac{\omega_i}{2c\gamma^2} (\mu^2 - 2a_w a_i \cos \phi), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dz} &= -\frac{a_w a_i \omega_i \sin \phi}{c} (\gamma^2 - \mu^2 + 2a_w a_i \cos \phi)^{-1/2} \\ &\approx -\frac{a_w a_i \omega_i}{c\gamma} \sin \phi, \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$a_w = \frac{e}{m_0 c^2} A_w, \quad (6)$$

$$a_i = \frac{e}{m_0 c^2} A_i, \quad (7)$$

$$\mu^2 = 1 + a_w^2, \quad (8)$$

$$\phi = (k_w + k_i)z - \omega_i t, \quad (9)$$

此处 ϕ 即为质动力势的相位. 定义 $d\phi/dz = 0$ 的电子为同步电子, 于是由(4), (5)式可导出同步电子所对应的能量因数 γ_r 为

$$\gamma_r \approx \frac{\omega_i \mu^2}{2c k_w}. \quad (10)$$

令 $\gamma = \gamma_r + \delta\gamma$, 则 KMR 方程可近似改写为如下形式:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{2}{\gamma_r} \delta\gamma, \quad (11)$$

$$\frac{d\delta\gamma}{dz} = -\frac{a_i a_w \bar{\omega}_i}{\gamma_r} \sin \phi, \quad (12)$$

式中已将 z 用 k_w 归一化 ($\bar{z} = k_w z$), ω_i 用 ck_w 归一化 ($\bar{\omega}_i = \omega_i / ck_w$). 如果忽略电子束与光场之间的能量耦合, 把归一化光场幅值 a_i 看成常量, 则(11), (12)式属于两个变量的自治方程. 事实上, 由(11)和(12)式能直接导出可积型摆方程

$$\frac{d^2\phi}{d\bar{z}^2} = -\frac{2a_r a_w \bar{\omega}_i}{\gamma_r^2} \sin \phi. \quad (13)$$

在这种情况下,电子在相空间 $(\delta\gamma, \phi)$ 中的轨道由初条件确定,可分成两大类(见图 1): 一类电子被俘获在有质动力势阱中,称为被俘获电子(traped electrons),另一类则为没有被俘获的电子(untraped electrons).

然而,当考虑电子束与光场之间的能量耦合,则情况就大不相同. 此时, a_r 为 $\bar{z}$ 的函数,一般说来,(13)式不可积. 根据能量守恒可导出耦合关系式

$$\frac{da_r}{d\bar{z}} = \frac{a_w \bar{\omega}_p^2}{2\gamma_r \bar{\omega}_i} \langle \sin \phi \rangle, \quad (14)$$

式中 $\bar{\omega}_p = (4\pi n_0 e^2 / m_0 c^2 k_w^2)^{1/2}$ 为电子束的归一化等离子体频率, n_0 为电子束平均密度, $\langle \dots \rangle$ 表示对所有采样电子求平均. 这样耦合方程

组(11), (12), (14)便成了三个变量的自治方程,

于是被俘获电子的运动在一定的控制参量范围内,会从周期性过渡到非周期性,随机型^[6]. 事实上,这种情况与文献[2,3]所讨论的对象,具有相似的数学物理机制. 虽然文献[2,3]中没有考虑电子束与光场之间的能量耦合式(14),但是,或者由于变参量波荡器中 A_w 或 k_w 显含 $\bar{z}$, 或者由于边带不稳定性所出现的附加项显含 $\bar{z}$, 结果使得(11), (12)式成为两个变量的非自治方程. 于是,在一定的控制参量范围内,电子运动出现随机性. 从数学上讲,这两种情况都可以借助增加新变量而成为三个变量的自治方程^[6], 从而与本文所讨论的情况相类似.

下面以具体的例子说明,由(11), (12), (14)式所决定的三变量自治方程,将使得部份被俘获电子的运动由于等离子体频率的升高而从周期性过渡到非周期性,随机型.

三、算 例

在自由电子激光器中,起主导作用的是被俘获电子与光场之间的相互作用,通常让电子束的初始能量因数接近 γ_r . 选取如下的一组典型参数,用计算机进行数值分析,并打印出相应的相图: $a_r|_{\bar{z}=0} = 2.78 \times 10^{-5}$, $\gamma_r = 25$, $\bar{\omega}_i = 250$, $a_w = 2$; 电子的初相位 $\phi|_{\bar{z}=0}$ 均匀地分布在 $[-\pi, \pi]$, $\delta\gamma|_{\bar{z}=0} = 0$.

当不考虑电子束与光场之间的能量耦合时,电子运动仅由(11), (12)式决定,与 $\bar{\omega}_p$ 无关. 在上述取值范围内,所有电子都是被俘获电子. 其中,初相位为 $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$ 的电子,其运动图象如图 2 所示.

图 3 为考虑电子束与光场能量耦合后,上述采样电子的相应运动图象. 此处选取归

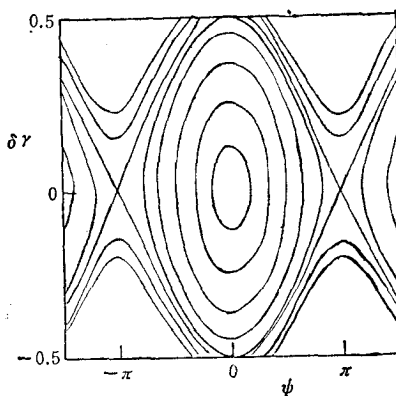


图 1 不考虑电子束与光场之间的能量耦合时,常参数波荡器自由电子激光中被俘获电子和没有被俘获电子的相轨道

一化等离子体频率作为控制参量,分别取 $\bar{\omega}_p^2 = 1 \times 10^{-4}$, 1×10^{-3} , 1×10^{-2} 和 1×10^{-1} 从图 3 中可以发现,随着 $\bar{\omega}_p^2$ 增加,靠近分界线的一些电子,其运动由周期性过渡到非周期性,随机型。 $\bar{\omega}_p^2$ 越大,这种现象向内漫延,非周期轨道的电子数目增多,而且混乱程度加剧。

如果取 $\delta\gamma|_{z=0} = 0.2$,即电子束初始能量因数略高于 γ_r ,所得结果如图 4 所示,情况与 $\delta\gamma|_{z=0} = 0$ 相似。

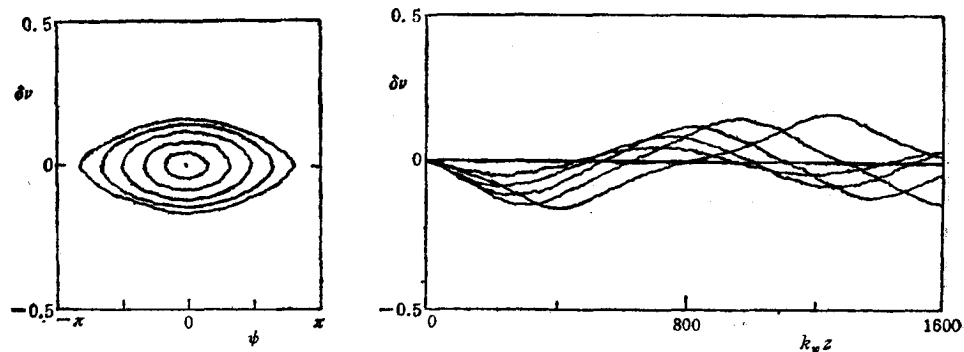
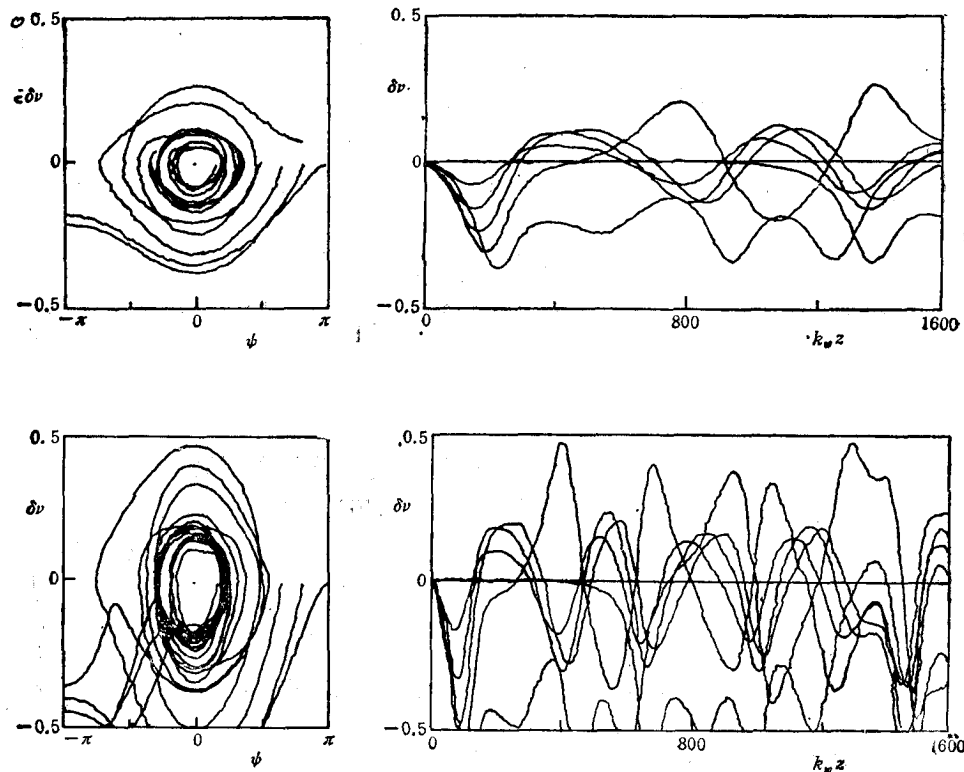


图 2 常参数自由电子激光中,不考虑电子束与光场能量耦合效应时,初相位为 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$ 的电子的运动图象. $a_z|_{z=0} = 2.78 \times 10^{-4}$; $\delta\gamma|_{z=0} = 0$; $\gamma_r = 25$; $\bar{\omega}_r = 250$; $a_w = 2$; $\bar{\omega}_p^2 = 1 \times 10^{-4}$



(a) $\bar{\omega}_p^2 = 1 \times 10^{-4}$

(b) $\bar{\omega}_p^2 = 1 \times 10^{-1}$

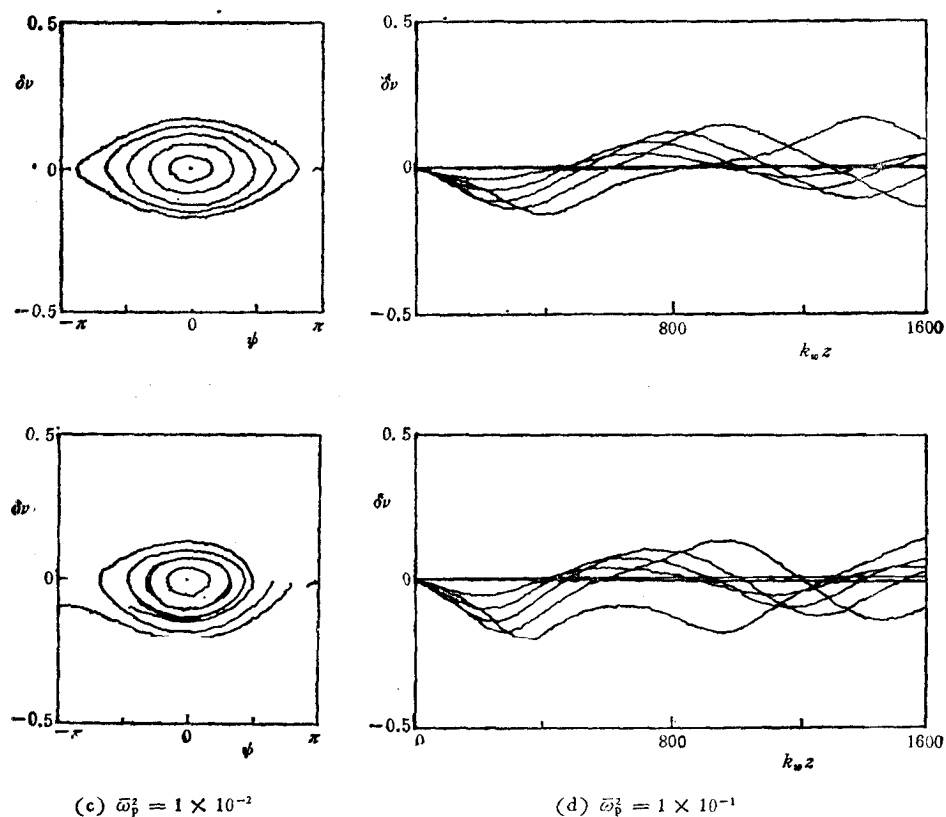


图3 常参数自由电子激光中,考虑电子束与光场能量耦合效应后,初相位为 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$ 的电子的运动图象 其余参数同图2

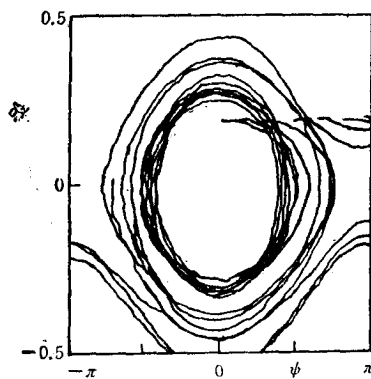


图4 当 $\delta r|_{z=0} = 0.2$ 时电子的运动图象 $\omega_p^2 = 1 \times 10^{-2}$; 其余参数同图3

四、结 论

以上数理分析及算例表明,无论是变参数还是常参数自由电子激光器,只要相互作用时间足够长(即相互作用区足够长),靠近相轨道分界线内侧的部份被俘获电子,其运动将从周

期性过渡到非周期性,随机型。通向这种现象所使用的控制参量,既可以是文献[1]中波荡器的幅值,或者是文献[2]中波荡器幅值(或波数)对空间的变化率,或者是文献[3]中边带不稳定性的强度,也可以是本文中的等离子体频率(相应于电子束密度)。而且,等离子体频率越高,这种现象越剧烈。

此外,(14)式表明,选择 $\bar{\omega}$, 或者 γ , 做控制参量,也可以起到选择 α_w 或者 $\bar{\omega}_p$ 类似的效果。

感谢本校科研处对本工作的支持。

- [1] R. Bonifacio, F. Casagrande and G. Casati, *Evolution of Order and Chaos*, ed. by H. Haken, Springer, Berlin, (1982), p. 248; R. Bonifacio, F. Casagrande, G. Casati and S. Celi, *Coherence and Quantum Optics V*, ed. by L. Mandel and E. Wolf, Plenum Publishing Corp., (1984), p. 801.
- [2] 霍裕平,物理学报,31(1982),1337.
- [3] S. Riyopoulos and C. M. Tang, *Phys. Fluids*, 31(1988), 3387.
- [4] N. M. Kroll, P. Morton and M. N. Rosenbluth, *IEEE J. Quantum Electronics*, 17(1981), 1436.
- [5] P. Sprangle, C. M. Tang and C. W. Roberson, *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.*, A239(1985), 1.
- [6] 郝柏林,物理学进展,3(1983)329.

EVOLUTION FROM PERIODICITY TO NON-PERIODICITY OF THE ELECTRON PHASE ORBITS IN A FREE ELECTRON LASER WITH UNTAPERED WIGGLER

ZHANG SHI-CHANG HU ZHONG-XIU WANG WEN-YAO

Department of Physics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, 610054

(Received 23 January 1990)

ABSTRACT

In this paper the motion of the electrons in a free-electron laser with untapered wiggler is discussed. We find the possibility of stochastic behavior for some trapped electrons with the increase of the plasma frequency of the electron beam, when the energy exchange between the electron beam and the laser fields is taken into account.

PACC: 4255T; 0250; 0260