

# 环形波导中非传播表面孤波

杨新娥 韩文革

天津大学物理系, 天津, 300072

1989 年 5 月 12 日收到; 1990 年 2 月 24 日收到修改稿

本文利用多重尺度微扰方法, 研究在垂直外加激励下的环形波导中不可压缩流体的无旋运动. 计算结果表明, 在环的大半径近似下, 可以得到流体表面位移满足的非线性 Schrödinger 方程及其单孤波解, 与 Wu, Keolian 和 Rudnick 的实验观察符合.

PACC: 4735; 4325

## 一、引 言

在垂直激振的水槽出现的表面水波最早是由 Faraday 在实验中观察到<sup>[1]</sup>. 近年来, 人们对流体的弱非线性表面波运动也进行了较为广泛的研究<sup>[2,3]</sup>. 1984 年, Wu, Keolian 和 Rudnick 在实验室中用类似 Faraday 实验的激励方法, 在狭长水槽中发现了非传播孤波<sup>[4]</sup>, 随后, Larraza<sup>[5]</sup> 和 Miles<sup>[6]</sup> 对矩形水槽表面孤波的运动进行了理论分析和计算. 王本仁等人对二模振荡激励下狭长水槽的孤波进行了较详尽的研究<sup>[7]</sup>, 颜家壬对计及表面张力以及两层流体界面上的非传播孤波等做了大量的研究和计算<sup>[8]</sup>. Wu 等人<sup>[4]</sup>还报道了环形水槽中所观察到的孤波运动, 他们用的环形水槽平均周长为 72cm, 宽为 2.2 cm. 本文将研究在垂直激励下环形水槽中的非传播表面波运动, 考虑三维无粘不可压缩流体的无旋运动, 利用多重尺度法导出流体运动所满足的非线性 Schrödinger 方程及其单孤波解.

## 二、模型与运动方程

在内半径为  $r$ , 宽度为  $b$  的环形槽内注入深度为  $d$  的理想流体, 建立柱坐标系, 取  $z$  方向与环平面垂直, 流体静止的液面为  $z = 0$  的平面, 于是, 静止时有一  $d \leq z \leq 0$ . 考虑在  $z$  方向的外部激振  $z_0 = a_0 \cos 2\omega_0 t$ . 当受到该扰动时, 流体自由表面将偏离平衡位置 ( $z = 0$ ), 令其偏离位移为  $z = \xi(\rho, \theta, t)$ . 可以写出不可压缩流体无旋运动的速度势  $\phi$  满足的方程和边界条件如下:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad -d \leq z \leq \xi(\rho, \theta, t), \quad (1)$$

$$\phi_\rho = 0, \quad \rho = r, r + b, \quad (2)$$

$$\phi_z = 0, \quad z = -d, \quad (3)$$

$$\phi_z = \xi_t + \phi_\rho \xi_\rho + \frac{1}{\rho^2} \phi_\theta \xi_\theta, \quad z = \xi(\rho, \theta, t), \quad (4)$$

$$(g + \ddot{z}_0)\xi + \phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 = 0, \quad z = \xi(\rho, \theta, t), \quad (5)$$

式中  $g$  为重力加速度,  $\ddot{z}_0$  为  $z_0$  对时间的二阶导数. 字母右下标表示对该变量求偏导数.

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

分别将(4),(5)两式在  $z = 0$  作泰勒展开并取到第三阶,得

$$\begin{aligned} \xi_t - \phi_z + \phi_\rho \xi_\rho + \frac{1}{\rho^2} \phi_\theta \xi_\theta - \phi_{zz}\xi + \phi_{\rho z}\xi_\rho + \frac{1}{\rho^2} \phi_{\theta z}\xi_\theta - \frac{1}{2} \phi_{zzz}\xi^2 \\ = 0 \quad z = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\phi_t + g\xi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \phi_{tz}\xi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)_z^2\xi + \frac{1}{2} \phi_{tzz}\xi^2 + \ddot{z}_0\xi = 0 \quad z = 0. \quad (7)$$

根据多重尺度方法,引入多重变量  $\theta_i = \varepsilon^i \theta$ ,  $t_i = \varepsilon^i t$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  ( $\varepsilon$  为与振幅有相同数量级的小参量),于是

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \dots, \quad (9)$$

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \varepsilon^3 \phi^{(3)} + \dots, \quad (10)$$

$$\xi = \varepsilon \xi^{(1)} + \varepsilon^2 \xi^{(2)} + \varepsilon^3 \xi^{(3)} + \dots. \quad (11)$$

将(8)–(11)式代入(1),(2),(3),(6)和(7)式,得到

$$\phi_{\rho\rho}^{(i)} + \frac{1}{\rho} \phi_{\rho}^{(i)} + \frac{1}{\rho^2} \phi_{\theta_0\theta_0}^{(i)} + \phi_{zz}^{(i)} = \alpha^{(i)} \quad -d \leq z \leq \xi, \quad (12)$$

$$\phi_{\rho}^{(i)} = 0 \quad \rho = r, r + b, \quad (13)$$

$$\phi_z^{(i)} = 0 \quad z = -d, \quad (14)$$

$$\phi_{t_0 t_0}^{(i)} + g \phi_z^{(i)} = \gamma_{t_0}^{(i)} - g \beta^{(i)} \quad z = 0, \quad (15)$$

$$\xi^{(i)} = \frac{1}{g} (\gamma^{(i)} - \phi_{t_0}^{(i)}), \quad (16)$$

式中  $i = 1, 2, 3, \dots$ , 并有

$$\alpha^{(1)} = 0, \quad (17a)$$

$$\alpha^{(2)} = -\frac{2}{\rho^2} \phi_{\theta_0\theta_1}^{(1)}, \quad (17b)$$

$$\alpha^{(3)} = -\left[ \frac{2}{\rho^2} \phi_{\theta_0\theta_1}^{(2)} + \frac{2}{\rho^2} \phi_{\theta_0\theta_2}^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \phi_{\theta_1\theta_1}^{(1)} \right], \quad (17c)$$

$$\dots\dots\dots \beta^{(1)} = 0, \quad (18a)$$

$$\rho^{(2)} = - \left( \xi_{i_1}^{(1)} + \phi_{\rho}^{(1)} \xi_{\rho}^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \phi_{\theta_0}^{(1)} \xi_{\theta_0}^{(1)} - \phi_{xz}^{(1)} \xi_{z}^{(1)} \right)_{z=0}, \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} \rho^{(3)} = & -\xi_{i_1}^{(2)} - \xi_{i_2}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \phi_{\theta_0}^{(1)} (\xi_{\theta_1}^{(1)} + \xi_{\theta_0}^{(2)}) - \frac{1}{\rho^2} \xi_{\theta_0}^{(1)} (\phi_{\theta_0}^{(2)} + \phi_{\theta_1}^{(1)}) \\ & - \phi_{\rho}^{(1)} \xi_{\rho}^{(2)} - \phi_{\rho}^{(2)} \xi_{\rho}^{(1)} + \phi_{xz}^{(1)} \xi_{z}^{(2)} + \phi_{xz}^{(2)} \xi_{z}^{(1)} - \phi_{\rho z}^{(1)} \xi_{\rho}^{(1)} \\ & - \frac{1}{\rho^2} \phi_{\theta_0 z}^{(1)} \xi_{\theta_0}^{(1)} \xi_{\theta_0}^{(1)} + \frac{1}{2} \phi_{zz}^{(1)} \xi_{z}^{(1)} \xi_{z}^{(1)}, \quad z=0, \end{aligned} \quad (18c)$$

.....

$$\gamma^{(1)} = 0, \quad (19a)$$

$$\gamma^{(2)} = - \left( \phi_{i_1}^{(1)} + \frac{1}{2} \phi_{\rho}^{(1)} \phi_{\rho}^{(1)} + \frac{1}{2\rho^2} \phi_{\theta_0}^{(1)} \phi_{\theta_0}^{(1)} + \frac{1}{2} \phi_z^{(1)} \phi_z^{(1)} + \phi_{i_0 z}^{(1)} \xi_{z}^{(1)} \right)_{z=0}, \quad (19b)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{(3)} = & - \left[ \phi_{i_1}^{(2)} + \phi_{i_2}^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \phi_{\theta_0}^{(1)} (\phi_{\theta_0}^{(2)} + \phi_{\theta_1}^{(1)}) + \phi_{\rho}^{(1)} \phi_{\rho}^{(2)} + \phi_z^{(1)} \phi_z^{(2)} \right. \\ & + \phi_{xz}^{(1)} \xi_{z}^{(2)} + \xi_{z}^{(1)} (\phi_{i_0 z}^{(2)} + \phi_{i_1 z}^{(1)}) + \frac{1}{\rho^2} \phi_{\theta_0}^{(1)} \phi_{\theta_0 z}^{(1)} \xi_{z}^{(1)} + \phi_{\rho}^{(1)} \phi_{\rho z}^{(1)} \xi_{z}^{(1)} \\ & \left. + \phi_z^{(1)} \phi_{zz}^{(1)} \xi_{z}^{(1)} + \frac{1}{2} \phi_{i_0 z z}^{(1)} \xi_{z}^{(1)} \xi_{z}^{(1)} - 4\omega_0^2 A_0 \cos 2\omega_0 t_0 \xi_{z}^{(1)} \right]_{z=0}, \end{aligned} \quad (19c)$$

.....

在求  $\gamma^{(3)}$  时, 假设外部激励  $a_0 = \varepsilon^2 A_0 = O(\varepsilon^2)$  为二级小量, 这与 Wu 的实验符合。

### 三、孤波解及其讨论

解(12)–(16)式, 并采用大  $\rho$  近似, 即假定环的半径  $r$  比其宽度  $b$  大很多。取贝塞耳函数和诺伊曼函数的渐近表示式

$$J_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}m - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$N_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}m - \frac{\pi}{4}\right), \quad x = k\rho.$$

考虑在径向以高频  $\omega$  振荡, 在横向由  $\xi^{(11)}$  调制的弱非线性表面波的运动, 对方程(12)–(16)逐级求解到第三级近似, 其结果为

$$\begin{aligned} \phi = & \varepsilon \left[ \phi^{(10)} + \phi^{(11)} \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \cos[k(\rho - r)] \frac{\cosh[k(z + d)]}{\cosh(Kd)} e^{i\omega t} + \text{c.c.} \right] \\ & + \varepsilon^2 \left[ \phi^{(20)} + \frac{i k^2}{8\omega} \left( \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \right)^2 (1 + 3T^2) \phi^{(11)^2} e^{2i\omega t} + \text{c.c.} \right. \\ & - \frac{3ik^2}{4\omega} \sqrt{\frac{1}{\pi k r}} (T^{-2} - T^2) \phi^{(11)^2} \frac{1}{c_1^2} \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho}} \cos[2k(\rho - r)] \\ & \left. \cdot \frac{\cosh(2k(z + d))}{\cosh(2kd)} e^{2i\omega t} + \text{c.c.} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^3 \left[ -\frac{1}{2k\rho^2} \phi_{\theta_1\theta_1}^{(11)} \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \cos(K(\rho-r))(z+d) \frac{\sinh(K(z+d))}{\cosh(Kd)} e^{i\omega t} \right. \\
& \left. + \text{c.c.} \right] + \dots, \quad (20) \\
\xi = & \varepsilon \left[ \xi^{(11)} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \frac{1}{c_1} \cos(k(\rho-r)) \frac{\cosh[K(z+d)]}{\cosh(kd)} e^{i\omega t} + \text{c.c.} \right] \\
& + \varepsilon^2 \left\{ |\xi^{(11)}|^2 \frac{k}{2T} \left( \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \right)^2 \left[ \frac{1}{r} (-1+T^2) + \frac{1}{\sqrt{r\rho}} (1+T^2) \right. \right. \\
& \cdot \cos(2k(\rho-r)) \left. \right] - \xi^{(11)^2} \frac{k}{4T} (1-3T^{-2}) \left( \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{r\rho}} \\
& \cdot \cos(2k(\rho-r)) e^{2i\omega t} + \text{c.c.} \left. \right\} + \dots, \quad (21)
\end{aligned}$$

式中  $\phi^{(10)}(\theta_2, t_2)$ ,  $\phi^{(11)}(\theta_1, t_2)$ ,  $\xi^{(11)}(\theta_1, t_2)$  和  $\phi^{(20)}(\theta_1, t_1, t_2)$  都是慢变量的函数,  $\xi^{(11)} = -\frac{i\omega}{g} \phi^{(11)}$ ,  $\omega^2 = gkT$ ,  $k = \pi/6$ ,  $c_1 = \cos(kr - \pi/4)$ ,  $T = \tanh(kd)$ .

将  $\phi^{(3)}$ ,  $\gamma^{(3)}$  和  $\beta^{(3)}$  式代入(16)式(取  $i=3$ ), 经过较为冗长的计算, 在  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega = O(\varepsilon^2)$  的条件下, 可以求得  $\xi^{(11)}$  满足的方程为

$$2i\omega\xi_{t_1}^{(11)} - \frac{c^2}{\rho^2} \xi_{\theta_1\theta_1}^{(11)} - E\xi^{(11)}|\xi^{(11)}|^2 - F\xi^{(11)*}e^{2i\Delta\omega t} = 0, \quad (22)$$

式中

$$\begin{aligned}
C^2 &= \frac{g}{2k} [T + kd(1-T^2)], \quad F = \frac{2\omega^4 A_0}{g}, \\
E &= \frac{2k^2 g}{c_1^2 \pi T r} \left( 2 - \frac{9}{8} T^{-2} - \frac{5}{8} T^2 + \frac{3}{4} T^4 \right).
\end{aligned}$$

由  $\xi \approx \varepsilon \xi^{(11)} = O(\varepsilon)$ ,  $\xi^{(11)} = O(1)$ , 作变换

$$\xi^{(11)} = \frac{1}{\varepsilon} u(\theta_1, t_2) e^{i\Delta\omega t_2/\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon} u(\theta, t) e^{i\Delta\omega t}. \quad (23)$$

上式中,  $u(\theta, t)$  代表表面波的主模式(0,1)的复振幅. 将(23)式代入(22)式, 记

$$\delta = \varepsilon^2 F = 2\omega^4 \varepsilon^2 A_0/g = 2\omega^4 a_0/g,$$

得到非线性 Schrödinger 方程

$$2i\omega u_t - \frac{c^2}{\rho^2} u_{\theta\theta} + (\omega^2 - \omega_0^2)u - E \cdot |u|^2 - \delta u^* = 0. \quad (24)$$

当  $E > 0$ , 且  $a$  为实数, 方程(24)的单孤波解为

$$u = \sqrt{\frac{2}{E}} c a e^{-i\frac{\pi}{2}} \operatorname{sech}(a\rho\theta), \quad (25)$$

式中

$$a = \frac{1}{c} [\delta + (\omega^2 - \omega_0^2)]^{1/2}.$$

下面对结果作一些讨论:

本文用多重尺度方法并在大半径的近似下求出了环形水槽在垂直外加激振时, 流体表面的非传播孤波解. 在求解  $\phi^{(1)}$  时采用了贝塞耳函数和诺伊曼函数的渐近表示式, 同时, 在求解  $\phi^{(2)}$  和  $\phi^{(3)}$  时, 取  $1/\sqrt{\rho} \approx 1/\sqrt{r}$ , 根据  $\rho$  的变化范围  $[r, r+b]$ , 用文献[3]中的数据, 可以算出  $1/\sqrt{r}$  与  $1/\sqrt{\rho}$  之比在 1 到 1.09 之间, 结果足够精确.

由(23)式, 从理论中得到孤波“横向”频率(即  $\rho$  方向的频率)近似地为外部激振频率的一半的结论, 这与 Wu<sup>[3]</sup> 的实验以及用各种理论<sup>[5-8]</sup> 计算矩形水槽孤波的结果一致.

以上讨论的是无粘流体情况, 对于真实系统, 则应考虑流体的摩擦. 令其粘滞系数为  $\alpha$ , 由文献[6], 可在方程中用  $\frac{\partial}{\partial t} + \alpha$  代替原来的  $\partial/\partial t$ , 得到的非线性 Schrödinger 方程

$$2i\omega u_t - \frac{c^2}{\rho^2} u_{\theta\theta} + (\omega^2 - \omega_0^2)u - Eu|u|^2 + 2i\omega\alpha u - \delta u^* = 0. \quad (26)$$

其孤波解为

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{2}{E}} c a e^{-i\varphi} \operatorname{sech}(a\rho\theta), \\ a &= \frac{1}{c} [(\delta^2 - 4\omega^2\alpha^2)^{1/2} + (\omega^2 - \omega_0^2)]^{1/2}, \\ \varphi &= \arctan \frac{1 + (1 - 4\omega^2\alpha^2/\delta^2)^{1/2}}{2\omega\alpha/\delta}. \end{aligned} \quad (27)$$

本文考虑的是在横向(沿环形槽长方向)的非传播孤波运动. 实际上, 对于非传播孤波, 由于在径向( $\rho$  方向)的剧烈振荡, 孤波群速度的横向分量有一等效退耦. 由文献[9]的计算可知, 在矩形槽的情况, 当  $(\omega_1 - \omega_0)/\omega_1 \sim O(\varepsilon^2)$  时, 这里  $\omega_1$  设为横向频率, 沿槽长方向的速度近似为  $O(\varepsilon^2)$ , 故其孤波能流速率近似为  $Ev_1 \approx O(\varepsilon^4)$ , 它是一更高阶的小量.

由  $E > 0$ , 即  $2 - \frac{9}{8}T^{-2} - \frac{5}{8}T^2 + \frac{3}{4}T^4 > 0$ , 可以算出  $kd > 1.022$ , 给出孤波产生的条件之一. 又由  $a$  为实数,  $\delta^2 \geq 4\omega^2\alpha^2$ , 表明当流体存在粘性时, 外部激振须足够大以维持其振动状态. 从(27)式还可以算出孤波在  $\rho$  方向振动频率的范围为

$$\omega^2 + (\delta^2 - 4\omega^2\alpha^2)^{1/2} - E|u|^2 < \omega_0^2 < \omega^2 + (\delta^2 - 4\omega^2\alpha^2)^{1/2}.$$

在  $\delta = 0$ ,  $\alpha = 0$  时, 结果与文献[5]的一致.

感谢颜家壬教授有益的讨论.

- [1] M. Faraday, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **121**(1831), 299.
- [2] M. J. Ablowitz and H. Segur, *J. Fluid Mech.*, **92**(1979), 691.
- [3] J. W. Miles, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **12**(1980), 11.
- [4] Wu Jun-ru, R. Keolian and I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1421.
- [5] A. Larraza and S. Putterman, *J. Fluid Mech.*, **148**(1984), 443.
- [6] J. W. Miles, *J. Fluid Mech.*, **148**(1984), 451.
- [7] 王本仁、魏荣爵, 物理学报, **35**(1986), 1547.
- [8] 颜家壬、黄国翔, 应用数学和力学, **8**(1987), 925; 物理学报, **37**(1988), 874.
- [9] 颜家壬, 矩形槽中的弱非线性调制表面孤波, 全国数学物理方法研究会首届年会报告, 苏州, 11月, (1988).

## NON-PROPAGATING SURFACE-WAVE SOLITONS IN AN ANNULAR RESONATOR

YANG XIN-E    HAN WEN-GE

*Department of Physics, Tianjin University, Tianjin, 300072*

(Received 12 May 1989; revised manuscript received 24 February 1990)

### ABSTRACT

In an annular resonator parametrically driven in the vertical direction, the irrotational movement of an incompressible fluid has been studied by the multiple-scales approach. The calculations have shown that under the condition that the radius of the annular resonator is much larger than the width the displacement of the movement of fluid surface satisfies the cubic Schrödinger equation. A non-propagating surface-wave solitons solution is obtained that describes the standing solitary wave observed by Wu, Keolian and Rudnick (1984).

**PACC:** 4735; 4325