

离子声孤子在不均匀等离子体中的传播特性

朱家珍 王耕国

西安电子科技大学物理系, 西安, 710071

1988年6月24日收到

本文考虑了离子的有限温度和离子与中性分子的碰撞, 讨论离子声孤子在电离导致的弱不均匀等离子体中的传播特性. 得到自洽的非均匀浓度分布 $N(x)$, 漂移速度分布 $V(x)$ 和相应的孤子解. 数值计算给出孤子幅度、速度、宽度随位置的变化, 所得结果合理并与实验相符.

PACC: 5235

一、引言

十几年来离子声孤子的研究受到人们相当的关注, 从实验上和理论上做了大量工作^[1-3]. 一些作者曾对弱不均匀等离子体中离子声孤子的传播进行研究, 得到很不一致的结果^[4-7], 1985年 Kuehl 等人^[8]将电离率作为小标度进行微扰展开获得了弱不均匀等离子体中自洽的孤子解, 但以前的研究都假设离子温度为零并忽略了离子和中性分子的碰撞, 实际情形 $T_i/T_e = 0.03 - 0.1$ 孤子宽度实验值比不考虑离子温度时的理论值窄^[9], 离子温度不能忽略. 本文考虑存在电离、存在离子的有限温度和离子与中性分子的碰撞, 采用上述微扰展开, 得到在非均匀分布 $N(x)$ 和 $V(x)$ 本底上有限振幅孤子传播参量的空间依赖关系和小振幅孤子解, 数值计算给出孤子参量随位置的变化规律, 所得结果合理并与实验相符.

二、基本方程

在本文的条件下, 离子声波的基本方程为

$$\begin{aligned}n'_i + (n'v')_x &= \nu n'^{1-\tau}_i, \\v'_i + v'v'_x &= -\phi'_x - \nu n'^{1-\tau}_i v'/n' - 3T n'_i n'_x - \mu v', \\n'_e &= \exp \phi', \quad \phi'_{xx} = n'_e - n',\end{aligned}\tag{1}$$

式中各量为已按下式正规化的无量纲量: $n'_e/n_0 \rightarrow n'_e$ (电子浓度), $n'_i/n_0 \rightarrow n'_i$ (离子浓度), $v'/c_0 \rightarrow v'$ (离子速度), $e\phi'/T_e \rightarrow \phi'$ (电势), $\mu/\omega_{pi} \rightarrow \mu$ (离子中性分子碰撞频率), $\nu n_0^{-\tau}/\omega_{pi} \rightarrow \nu$ (电离频率或电离率), $x/\lambda_{De} \rightarrow x$, $\omega_{pi}t \rightarrow t$, $c_0 = (T_e/m_i)^{1/2}$,

$\lambda_{De} = (T_e/4\pi n_0 e^2)^{1/2}$, $\omega_{pi} = (4\pi e^2 n_0/m_i)^{1/2}$; $T = T_{i0}/T_e$, n_0 , T_{i0} 分别为等离子体中心 ($x=0$) 未扰动的电子浓度和离子温度. $\gamma=0, 1$ 分别表示热电子电离和束电离两种情况^[8,9].

设 $n(x, t) = N(x) + n(x, t)$, $v(x, t) = V(x) + v(x, t)$, $\phi(x, t) = \Phi(x) + \phi(x, t)$, $n_e(x, t) = N_e(x) + n_e(x, t)$, $N(x)$, $V(x)$, $\Phi(x)$, $N_e(x)$ 为大的稳定量, $n(x, t)$, $v(x, t)$, $\phi(x, t)$, $n_e(x, t)$ 为小的孤子扰动量, 则方程(1)分解为

$$\begin{aligned}(NV)_x &= vN_e^{1-\gamma}, \\ (V^2/2 + \Phi)_x &= -(vN_e^{1-\gamma}/N + \mu)V - 3TNN_x, \\ \Phi_{xx} &= \exp\Phi - N\end{aligned}\quad (2)$$

和

$$\begin{aligned}n_t + (nV + Nv + nv)_x &= v(1-\gamma)n, \\ v_t + (Vv + v^2/2 + \phi)_x &= -v[(V+v)(N+n)^{1-\gamma} - VN^{1-\gamma}] \\ &\quad - \mu v - 3T(N+n)(N+n)_x + 3TNN_x, \\ \phi_{xx} &= N(\exp\phi - 1) - n,\end{aligned}\quad (3)$$

将准中性条件 $N \approx N_e$ 代入(2)式的前两式得到

$$N_x = -\frac{2vN^{1-\gamma}V + \mu NV}{1 - V^2 + 3TN^2}, \quad V_x = \frac{v(V^2 + 1 + 3TN^2)N^{-\gamma} + \mu V^2}{1 - V^2 + 3TN^2}. \quad (4)$$

可见当 $v=0$, $\mu=0$, 则等离子体为均匀的. 由边条件 $N(0)=1$, $V(0)=0$, 数值计算给出 $v=0.01$, $T=0.06$, $\mu/v=0.1$ 情形的 $N(x)$ 和 $V(x)$, 如图 1.

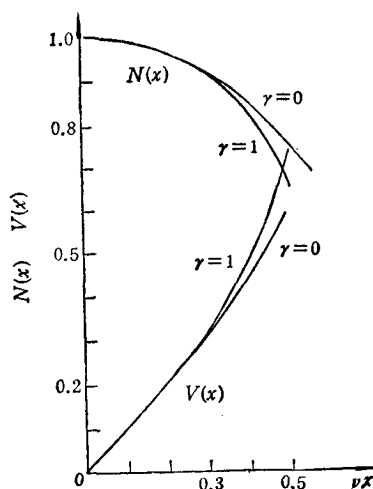


图 1 不均匀底 $N(x)$, $V(x)$ $v=0.01$; $\mu=0.4$; $T=0.06$

三、微扰展开

作变量代换

$$X = vx, \quad \xi = \int c^{-1} dx - t, \quad (5)$$

式中 $c = c(X)$ 为孤子传播速度, 方程(3)变为

$$\begin{aligned} & [(N+n)(v+V-c)]_{\xi} + vc[Vn+Nv+nv]_x = vc(1-\gamma)n, \\ & [(v+V-c)^2/2 + \phi]_{\xi} + vc[Vv+v^2/2 + \phi]_x \\ & = -vc[(V+v)(N+n)^{-\gamma} - VN^{-\gamma}] - c\mu v - 3cT \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{2c} [(N+n)^2]_{\xi} + v[(N+n)(N+n)_x - NN_x] \right\}, \end{aligned}$$

$$\phi_{\xi\xi}/c^2 + 2v\phi_{\xi x}/c - vc_x\phi_{\xi}/c^2 + v^2\phi_{xx} = N(\exp\phi - 1) - n. \quad (6)$$

对上式各量 $q(n, v$ 和 $\phi)$ 作小标度微扰展开

$$q = q^{(0)} + vq^{(1)} + \dots, \quad (7)$$

设 μ 和 v 为同级小量, v 的零阶项满足方程

$$[(N+n^{(0)})(v^{(0)}+V-c)]_{\xi} = 0, \quad (8a)$$

$$[(v^{(0)}+V-c)^2/2 + \phi^{(0)}]_{\xi} + \frac{3}{2} T[(N+n^{(0)})^2]_{\xi} = 0, \quad (8b)$$

$$\phi_{\xi\xi}^{(0)}/c^2 = N(e^{\phi^{(0)}} - 1) - n^{(0)}. \quad (8c)$$

对上面前两方程积分可得

$$(N+n^{(0)})v^{(0)} - (c-V)n^{(0)} = 0,$$

$$\frac{1}{2}(v^{(0)})^2 - (c-V)v^{(0)} + \phi^{(0)} + \frac{3}{2} T[2Nn^{(0)} + (n^{(0)})^2] = 0. \quad (9)$$

由此可解出 $n^{(0)}$ 与 $v^{(0)}$,

$$N+n^{(0)} = g, \quad v^{(0)} = (c-V)\frac{g-N}{g}, \quad (10)$$

$$g = [(A-2\phi^{(0)} - \sqrt{(A-2\phi^{(0)})^2 - B^2})/6T]^{1/2}, \quad (11)$$

$$A = (c-V)^2 + 3TN^2, \quad B = \sqrt{12T}(c-V)N. \quad (12)$$

令 $z = (A-2\phi^{(0)})/B$, g 可表示为

$$g = \left(\frac{B}{6T}\right)^{1/2} [z - \sqrt{z^2 - 1}]^{1/2} = \left(\frac{B}{6T}\right)^{1/2} \frac{dh(z)}{dz},$$

$$h(z) = \frac{\sqrt{2}}{3} [(z+1)^{3/2} - (z-1)^{3/2}],$$

故方程(8c)变为

$$\phi_{\xi\xi}^{(0)} = Nc^2 \left[\frac{\partial e^{\phi^{(0)}}}{\partial \phi^{(0)}} + (3T)^{1/4} N^{1/2} (c-V)^{3/2} \frac{\partial h}{\partial \phi^{(0)}} \right] = Nc^2 \frac{\partial f}{\partial \phi^{(0)}}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f = e^{\phi^{(0)}} - 1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{1}{N\sqrt{6T}} \{ & (A+B-2\phi^{(0)})^{3/2} - (A-B \\ & - 2\phi^{(0)})^{3/2} - (A+B)^{3/2} - (A-B)^{3/2} \}. \end{aligned} \quad (14)$$

积分(13)式得到

$$(\phi_{\xi}^{(0)})^2 = 2Nc^2 f(\phi^{(0)}, (c-V), N), \quad (15)$$

$\phi^{(0)}$ 的幅度 $\phi_{\xi}^{(0)}$ 满足

$$f[\phi_m^{(0)}, c - V, N] = 0, \quad (16)$$

v 的一阶项满足方程

$$\begin{aligned} & [(N + n^{(0)})v^{(1)} + (v^{(0)} + V - c)n^{(1)}]_\xi + c[Vn^{(0)} + Nv^{(0)} + n^{(0)}v^{(0)}]_x \\ & = c(1 - \gamma)n^{(0)}, \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} & [v^{(0)} + (V - c)v^{(1)}]_\xi + \phi_\xi^{(1)} + c[Vv^{(0)} + (v^{(0)})^2/2 + \phi^{(0)}]_x \\ & = -c[(V + v^{(0)})(N + n^{(0)})^{-\gamma} - VN^{-\gamma}] - cRv^{(0)} - 3T[(N + n^{(0)})n^{(1)}]_\xi \\ & \quad - 3cT[(N + n^{(0)})(N + n^{(0)})_x - NN_x], \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\phi_{\xi\xi}^{(1)}/c^2 - \phi^{(1)}Ne^{\phi^{(0)}} + n^{(1)} = c_x\phi_\xi^{(0)}/c^2 - 2\phi_{\xi x}^{(0)}/c, \quad (17c)$$

式中 $R = \mu/v$, 利用零阶方程(9)将(17a)和(17b)式化简

$$[(N + n^{(0)})v^{(1)} + (v^{(0)} + V - c)n^{(1)}]_\xi = c(1 - \gamma)n - c[n^{(0)}c]_x, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & [(v^{(0)} + V - c)v^{(1)} + \phi^{(1)}]_\xi = -c[v^{(0)}c]_x - 3T[(N + n^{(0)})n^{(1)}]_\xi \\ & \quad - c[(V + v^{(0)})(N + n^{(0)}) - VN^{-\gamma}] - cRv^{(0)}. \end{aligned} \quad (19)$$

积分得

$$(v^{(0)} + V - c)n^{(1)} + (N + n^{(0)})v^{(1)} = CF, \quad (20)$$

$$F = \int_{-\infty}^{\xi} [(1 - \gamma)n^{(0)} - (n^{(0)}c)_x] d\xi, \quad (21)$$

$$(v^{(0)} + V - c)v^{(1)} + \phi^{(1)} = cG - 3T(N + n^{(0)})n^{(1)}, \quad (22)$$

$$G = - \int_{-\infty}^{\xi} \{ (v^{(0)}c)_x + [(V + v^{(0)})(N + n^{(0)})^{-\gamma} - VN^{-\gamma}] + Rv^{(0)} \} d\xi. \quad (23)$$

由(20)和(22)式消去 $v^{(1)}$ 解出 $n^{(1)}$ 代入 (17c) 式得

$$\frac{1}{c^2} \phi_{\xi\xi}^{(1)} - \phi^{(1)} \left[N \exp \phi^{(0)} - \frac{N + n^{(0)}}{(v^{(0)} + V - c)^2 - 3T(N + n^{(0)})^2} \right] = H, \quad (24)$$

$$H = \frac{c_x}{c^2} \phi_\xi^{(0)} - \frac{2\phi_{\xi x}^{(0)}}{c} + \frac{(N + n^{(0)})cG - (v^{(0)} + V - c)F}{(v^{(0)} + V - c)^2 - 3T(N + n^{(0)})^2}. \quad (25)$$

(24)式等号左方括号中项可化为 $N \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^{(0)2}} = \phi_{\xi\xi\xi}^{(0)}/c^2 \phi_\xi^{(0)}$, 故

$$(\phi_\xi^{(1)}\phi_\xi^{(0)} - \phi^{(1)}\phi_{\xi\xi}^{(0)})_\xi = c^2 H \phi_\xi^{(0)}. \quad (26)$$

对上式由 $\xi = -\infty$ 到 ∞ 积分, 可得零阶量的又一方程

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ - \left[\frac{(\phi_\xi^{(0)})^2}{c} \right]_x + cGn_\xi^{(0)} + cFv_\xi^{(0)} \right\} d\xi = 0. \quad (27)$$

利用(21), (23)式分部积分上式, 得到

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} [c^2 n^{(0)} v^{(0)} - (\phi_\xi^{(0)})^2/c]_x \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} c n^{(0)} [(1 - \gamma)v^{(0)} - (V + v^{(0)})(N + n^{(0)})^{-\gamma} + VN^{-\gamma} - Rv^{(0)}] d\xi. \end{aligned} \quad (28)$$

(10), (15), (28) 式构成确定有限振幅孤子的 $n^{(0)}$, $v^{(0)}$, $\phi^{(0)}$ 和传播速度 c 空间依赖的基本关系式, 而(16)式决定孤子的幅度 $\phi_m^{(0)}$.

四、小振幅孤子解

对于小振幅孤子 $\phi^{(0)} \ll 1$, 可将(15)式中 f 对 $\phi^{(0)}$ 展开

$$f \approx \frac{(\phi^{(0)})^2}{2} \left\{ \frac{(c-V)^2 - 3TN^2 - 1}{(c-V)^2 - 3TN^2} + \frac{1}{3} \phi^{(0)} \frac{3(c-V)^2 + 3TN^2}{[(c-V)^2 - 3TN^2]^2} \right\}, \quad (29)$$

得到

$$\phi_m^{(0)} = \frac{3[(c-V)^2 - 3TN^2]^2 [(c-V)^2 - 3TN^2 - 1]}{3[(c-V)^2 + TN^2] - [(c-V)^2 - 3TN^2]^3}. \quad (30)$$

将(29)式代入(15)式积分可得孤子解

$$\phi^{(0)} = \phi_m^{(0)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{W} c(\xi - \xi_0) \right], \quad (31)$$

宽度为

$$W = \frac{2}{\sqrt{N}} \left[\frac{(c-V)^2 - 3TN^2}{(c-V)^2 - 3TN^2 - 1} \right]^{1/2}. \quad (32)$$

将(10)式对 $\phi^{(0)}$ 展开得

$$n^{(0)} \approx \frac{N\phi^{(0)}}{(c-V)^2 - 3TN^2 - 2\phi^{(0)}}, \quad \nu^{(0)} \approx \frac{(c-V)\phi^{(0)}}{(c-V)^2 - 3TN^2 - \phi^{(0)}}. \quad (33)$$

代入(28)式, 仅保留 $(\phi^{(0)})^2$ 项, (28)式变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[c^2 N \frac{c-V}{A_1^2} (\phi^{(0)})^2 \right]_x d\xi = c \int_{-\infty}^{\infty} \{ [(1-\gamma)(c-V)N - RN(c-V)] \\ - N^{1-\gamma} [(c-V) - \gamma V] \} \frac{(\phi^{(0)})^2}{A_1^2} d\xi,$$

式中 $A_1 = (c-V)^2 - 3TN^2$, 代入(31)式积分则方程变为

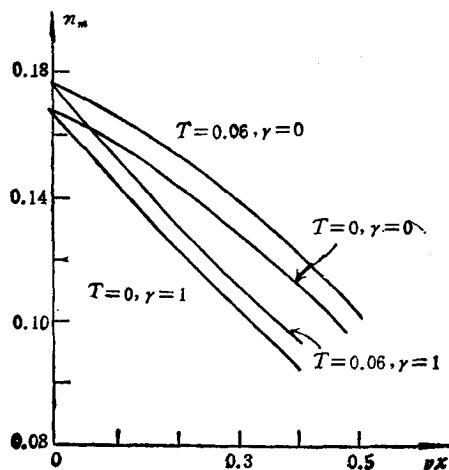


图2 孤子幅度 $n_m(X)$
 $\nu = 0.01; \mu = 0$

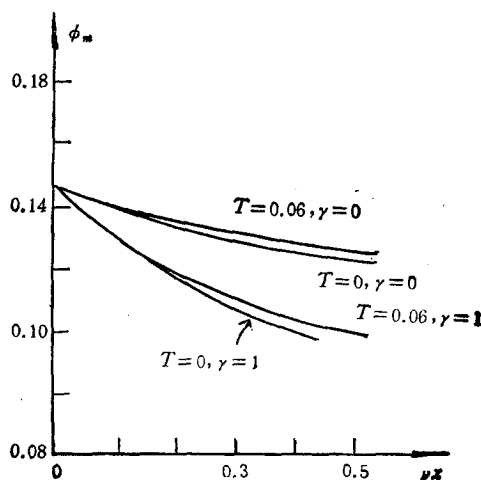


图3 孤子幅度 $\phi_m(X)$
图注同图2

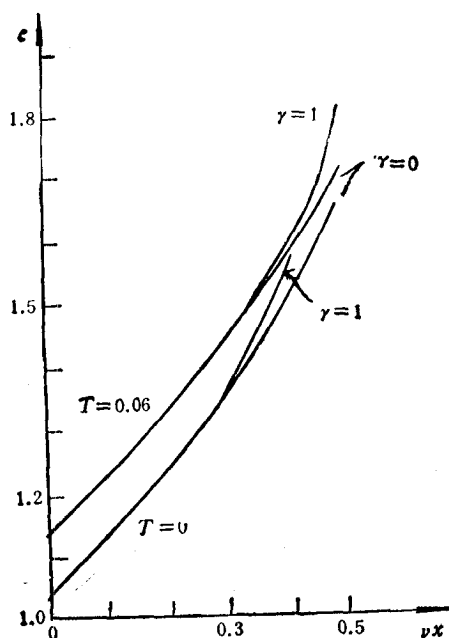
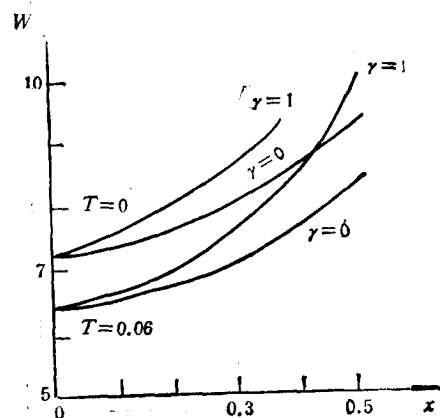
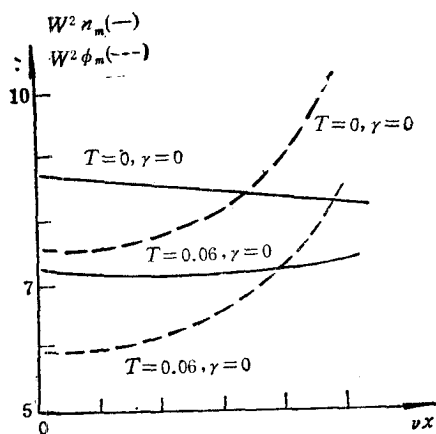
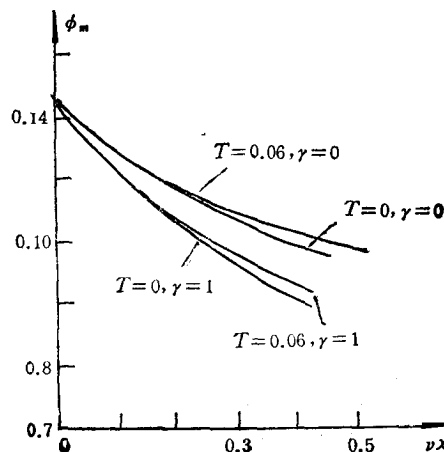
图4 孤子速度 $c(X)$ 图注同图2图5 孤子宽度 $W(X)$ 图注同图2

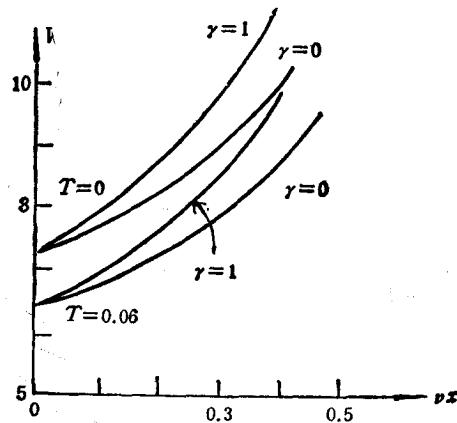
图6 孤子宽度平方乘幅度 图注同图2

图7 孤子幅度 $\phi_m(X)$ $\nu = 0.01$; $\mu = 0.01$

$$\left[\frac{cN(c-V)}{A_1^2} w(\phi_m^{(0)})^2 \right]_x = - \left[\frac{cN(c-V)}{A_1^2} w(\phi_m^{(0)})^2 \right] \frac{1}{c} \left[\frac{\gamma(1-V) + \frac{3}{2} TN^2}{N(1 + \frac{3}{2} TN^2)} + R \right].$$

最后得到

$$\phi_m^{(0)} = \phi_{m0}^{(0)} \left[\frac{\left(1 + \frac{3}{2} T\right)^4}{1 + 6T} \right]^{1/3} \left[\frac{(1 + 6TN^2)^{1/2}}{\left(1 + V + \frac{3}{2} TN^2\right) \left(1 + \frac{3}{2} TN^2\right)} \right]^{2/3} N^{-1/3} e^{-\frac{4}{3} \nu}, \quad (34)$$

图8 孤子宽度 $W(X)$ $\nu = 0.01$; $\mu = 0.01$

$$Y = \int_0^X \frac{1}{c} \left[\frac{\gamma}{N} \frac{(1-V) + \frac{3}{2} TN^2}{1 + \frac{3}{2} TN^2} + R \right] dX, \quad (35)$$

$\phi_m^{(0)}$ 为 $X=0$ 处孤子幅度。

取初值 $\phi_m^{(0)} = 0.1446$, $\nu = 0.01$, 由 (34), (30), (32), (10) 式进行数值计算可得孤子参量对位置的依赖, 结果见图 2 至图 8。

由计算结果可知: 1) 计及离子的有限温度, 幅度 $n_m^{(0)}$ 和 $v_m^{(0)}$ 降低, 而宽度明显变窄(减小 12%), 这与实验相符^[1,2]。计及碰撞, 幅度随 $N(x)$ 的下降更快衰减, 宽度更快增加。2) 离子温度对孤子速度有影响, 如 $T = 0.06$ 时, 在 $x = 0$ 附近孤子速度比 $T = 0$ 时增大了 10%, 而 $\mu \neq 0$ 对孤子速度影响不大。3) Kuehl 在粗糙近似下得到 $W^2 n_m^{(0)} = \text{const}$, 可以看到 $W^2 n_m^{(0)}$ 曲线缓慢变化, $W^2 \phi_m^{(0)}$ 曲线随 x 明显上升 ($W^2 v_m^{(0)}$ 曲线亦类似), 故非均匀等离子体中孤子宽度平方与幅度之积不再为常量。

- [1] Yoshiharu Nakamura, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-10(1)(1982), 180.
- [2] H. L. Pecseli, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-13(1985), 53.
- [3] M. Q. Tran, *Physica Scripta*, 20(1979), 317.
- [4] H. H. Kuehl, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-13(1985), 595.
- [5] K. Nishihawa and P. K. Kaw, *Phys. Lett.*, A50(1975), 455.
- [6] Y. Gell and L. Gomberoff, *Phys. Lett.*, A60(1977), 125.
- [7] L. Martina and P. M. Santini, *Lettere al Nuovo Cimento*, 29(1980), 513.
- [8] H. H. Kuehl and K. Imen, *Phys. Fluids*, 28(1985), 2375.
- [9] L. Schott, *Phys. Fluids*, 18(1975), 645.

THE PROPAGATION PROPERTY OF ION-ACOUSTIC SOLITON IN AN INHOMOGENEOUS PLASMA

ZHU JIA-ZHEN WANG GENG-GUO

Department of Physics, XiDian University, Xi'an, 710071

(Received 24 June 1988)

ABSTRACT

The propagation property of ion-acoustic soliton in a weakly inhomogeneous plasma caused by ionization is studied. Finite ion temperature and ion-neutral collisions are considered the self consistent, stationary distribution $N(x)$, $V(x)$ and the corresponding soliton solution are obtained, numerical results of soliton amplitude, speed and width dependent on position are given, which are reasonable and consistent with experiments.

PACC: 5235