

一维晶化束的非线性动力学 (II)*

邵明珠

重庆交通学院, 重庆, 630073; 西南师范大学, 重庆, 630715

I. HOFMANN

GSI, 6100 Darmstadt, FRG

罗诗裕

重庆交通学院, 重庆, 630073; 西南师范大学, 重庆, 630715

1989年8月28日收到

本文导出了参数激励的横向相干振动方程。用多重尺度法求出了系统的近似解, 用经典方法讨论了它的稳定性, 导出了系统的临界梯度场公差和频率响应曲线。此外, 还利用 Melnikov 方法讨论了系统的全局分叉并以储存环 ESR 为例进行了详细分析。

PACC: 2920

一、引言

1988年10月在联邦德国召开了第一届晶化束国际会议^[1]。在这次会议上人们对一维库仑系统的动力学问题给予了充分的重视, 但是, 至今还没有人对这种系统进行过完整的研究。一维库仑系统是一类简单而又有代表性的系统, 它包含了束流晶化现象的若干重要特征, 在束流晶化的研究中占有很重要的地位。但是, 由于实验和诊断手段的限制, 人们对这种系统的研究还处在初始阶段。在文献[2]中讨论了外激励和常数冷却力情况, 把横向相干振动方程化为熟知的 Duffing 方程, 并导出了临界磁场公差和系统的频率响应曲线。本文对系统的参数激励和常数冷却力情况进行研究, 把横向相干振动方程化为 Duffing 型的参数激励方程, 并用多重尺度法求解了这个方程, 用经典方法讨论了系统的稳定性。此外, 还用 Melnikov 方法讨论了系统的局部分叉和全局分叉。以联邦德国重离子研究中心的实验储存环 (ESR) 为例进行分析, 导出了 ESR 的共振曲线和临界梯度场公差。

二、运动方程

假设离子只有横向位移, 而相邻离子间的距离是严格相等的; 如果再假设只有磁体的

* 国家自然科学基金资助的课题。

聚焦力(线性的)和库仑力(非线性的)作用在离子上,则离子的横向相干振动方程化为

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X + \alpha X^3 = 0, \quad (1)$$

见文献[2]的(17)式. 式中 $\dot{X} = dX/dt$, $X = x/l$, 而

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{m\gamma} \left\{ \kappa - A_1 \left(S_1 - \frac{9a^2}{2l^2} S_3 \right) \right\}, \\ \alpha &= \frac{3A_1 l}{2m\gamma} (S_7 - 3S_3), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\kappa = m\gamma Q_0^2 \Omega^2, \quad A_1 = \frac{z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 l^3}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{4}{p^3} \lambda(3) - 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right) \xi(3), \\ S_7 &= \frac{16}{p^5} \lambda(5) + 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right)^3 \xi(5), \\ S_3 &= 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{p} \right) \cdot \xi(5), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\xi(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(mp + 1)^n}, \quad \lambda(n) = (1 - 2^{-n})\zeta(n), \quad \zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \quad (5)$$

Q_0 是自由振动数, Ω 是离子回旋频率, m 是离子质量, ze 是离子电荷, γ 是相对论因数, l 是相邻离子间距, p 是整数(与系统的振动模式有关), $\zeta(n)$ 是辐角为 n 的 Riemann zeta 函数. a (在零级近似下)由初值确定.

假设磁场不理想,并具有如下形式的梯度公差:

$$f_g = Q^2 m \delta X \cos m\theta, \quad (6)$$

式中

$$\delta = \frac{R_0}{\langle B_0 \rangle} \frac{\partial(\Delta b)}{\partial x} = \frac{R_0}{\langle B_0 \rangle} b_p, \quad (7)$$

R_0 是储存环的平均半径, $\langle B_0 \rangle$ 是平衡轨道上的平均磁场强度, b_p 是 p 次谐波的磁场梯度公差振幅, θ 是围绕储存环中心的方位角. 把方程(6)代入方程(1)中,可得系统的参数振动方程

$$\ddot{X} + (\omega_0^2 + g \cos Q_p t) X + \alpha X^3 = 0, \quad (8)$$

式中

$$g = Q^2 \delta, \quad Q_p = p\omega_0. \quad (9)$$

引入常数冷却力

$$F = -2\mu m \gamma dx/dt, \quad (10)$$

式中

$$\mu = \mu_0 \eta, \quad \mu_0 = \frac{2\pi L r_e r_p j z^2}{e \gamma^2 A \beta} \left(\frac{c}{v^*} \right)^3, \quad (11)$$

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}, \quad r_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_p c^2}, \quad j = en_e \beta c, \quad (12)$$

$$L \approx \ln \left(\frac{\lambda_D \left(\frac{v^*}{c} \right)^2}{2\pi r_e} \right), \quad \eta = \Delta\theta/\pi, \quad (13)$$

r_e 是经典电子半径, r_p 是经典质子半径, m_e, m_p 分别是电子和质子质量; n_e 是电子密度, j 是电流密度, v^* 是离子和电子之间的相对热速度, η 是冷却器长度与储存环周长之比^[2]. 将(10)式代入方程(8)可得

$$\ddot{X} + 2\mu\dot{X} + (\omega_0^2 + g \cos \Omega_p t)X + \alpha X^3 = 0. \quad (14)$$

方程(14)描写一维库仑链的参数振动.

三、动力学分析

利用多重尺度法对方程(14)进行分析. 为了看出方程(14)中各项的数量级, 从实际出发, 假设方程(14)等式第二项和第四项是 $O(\epsilon)$, 而第五项是 $O(\epsilon^2)$ 数量级, 于是方程(14)可改写为

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X + 2\mu\epsilon\dot{X} + \epsilon g X \cos \Omega_p t + \epsilon^2 \alpha X^3 = 0 \quad (15)$$

(只须在结果中令 $\epsilon = 1$ 即可). 利用多重尺度法^[3], 可将方程(15)的解表示为

$$X(t, \epsilon) = X_0(T_0, T_1, T_2) + \epsilon X_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 X_2(T_0, T_1, T_2) + \dots, \quad (16)$$

式中 $T_0 = t, T_1 = \epsilon t, T_2 = \epsilon^2 t$. 将(16)式代入方程(15), 分别令 ϵ^0, ϵ^1 和 ϵ^2 的系数相等, 可得

$$D_0^2 X_0 + \omega_0^2 X_0 = 0, \quad (17)$$

$$D_0^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 = -2D_0 D_1 X_0 - 2\mu D_0 X_0 - g X_0 \cos \Omega_p T_0 \quad (18)$$

$$D_0^2 X_2 + \omega_0^2 X_2 = -2D_0 D_2 X_0 - D_1^2 X_0 - 2D_0 D_1 X_1 - 2\mu D_0 X_1 - 2\mu D_1 X_0 - g X_1 \cos \Omega_p T_0 - \alpha X_0^3. \quad (19)$$

分析表明, 当 $\Omega_p \approx 2\omega_0$ 时, 在解 X_1 中包含了小除数项和久期项, 于是, 方程(15)将出现共振, 这种共振称为参数共振. 对于共振线附近的行为, 可引入简谐因数 σ 来描述. 令

$$\Omega_p = 2\omega_0 + \epsilon\sigma, \quad (20)$$

利用多重尺度法可求得一阶静态解

$$X = a \cos \left[\frac{1}{2} (\Omega_p t - \gamma) \right] + \frac{g\alpha}{2\Omega_p(\Omega_p + 2\omega_0)} \cos \left[\frac{1}{2} (3\Omega_p t - \gamma) \right], \quad (21)$$

对于平凡解, 上式中的

$$a = 0. \quad (22)$$

对于非平凡解, 振幅 a 满足下列方程:

$$\alpha_e a^2 = \frac{1}{2} \sigma - \frac{3g^2}{64\omega_0^3} + \frac{\mu^2}{2\omega_0} \pm \left\{ \frac{g^2}{16\omega_0^2} \left(1 - \frac{\sigma}{2\omega_0} \right)^2 - \mu^2 \right\}^{1/2}, \quad (23)$$

式中 $\alpha_e = \frac{3\alpha}{8\omega_0}$; 对 GSI 的实验储存环 ESR, 选择如下的一组参数: $U^{92+}, E=500\text{MeV/A}$, $Q_0 = 2.3$, $\eta = 1/50$, $n_e = 10^{15}\text{m}^{-3}$, $v^*/c = 10^{-2}$ 和 $g = 10^{11}$, 方程(14)的频率响应曲线如图 1 所示.

从图 1 可以看出, 当 σ 增加时, 振幅 a 总是等于零, 参数共振没有被激励; 当 $\sigma =$

-3.4×10^3 时,离子开始穿越禁带,而后,离子的振幅沿着左边分支变化,直到峰值(由于系统的极值点比较大,图中未划出);接着振幅 a 突然下降到零,系统再回到新的平凡状态。当 σ 从大到小变化时,有类似的跳跃现象出现。

根据静态解的稳定性,可以找到系统的临界参数。对于平凡解,临界梯度场公差

$$g_c = \pm \left(\frac{2b_1b_2 + a_1}{2b_2^2} \right)^{1/2}, \quad (24)$$

式中

$$a_1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sigma}{2\omega_0} \right)^2, \\ b_1 = \sigma\omega_0 + \mu^2, \quad b_2 = \frac{3}{32\omega_0^2}. \quad (25)$$

以 ESR 为例,选择 $\langle B_0 \rangle = 2000\text{G}$, $\sigma = 10^4$, 可以找到临界梯度场公差 $g_c = 6.8\text{G/cm}$ (其他参数与上面相同)。结果表明,当场梯度公差小于 6.8G/cm 时,系统是稳定的。

对于非平凡解,系统的临界参数

$$g_c = \pm \left\{ \frac{32\omega_0^3}{3} \left(\sigma + \frac{\mu^2}{\omega_0} - 2a_0a_0' \right) \right\}^{1/2}, \quad (26)$$

式中

$$a_0 = a - a_1', \quad (27)$$

a_0 是系统的静态解, a_1' 是与静态解的小偏差。

如果 σ_1 和 σ_2 是方程(23)的两个根,则方程(14)的禁带宽度可表示为

$$\Delta\sigma = |\sigma_2 - \sigma_1|. \quad (28)$$

四、系统的全局分叉

上面讨论了系统的局部分叉,现在讨论它的全局分叉性质。

令

$$x_1 = \omega_0 a^{-1/2} X, \quad \tau = \omega_0 t, \quad (29)$$

方程(14)可改写为

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 + x_1^3 = -\lambda_2 x_1 \cos Q_2 \tau - \delta \dot{x}_1, \quad (30)$$

式中

$$\delta = 2\mu\omega_0^{-2}, \quad \lambda_2 = g\omega_0^{-2}, \quad Q_2 = Q_p/\omega_0. \quad (31)$$

为了看出各项的数量级,从实际出发假定方程(30)等式右端两项有 $O(\epsilon)$ 的数量级,于是,方程(30)可改写为

$$\ddot{x}_1 + x_1 + x_1^3 = -\epsilon \lambda_2 x_1 \cos Q_2 \tau - \epsilon \delta \dot{x}_1. \quad (30')$$

方程(30')是一个弱参数激励的非线性系统,要研究这个系统的全局分叉,首先分析无扰

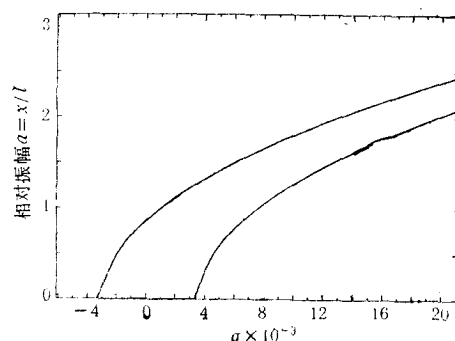


图1 对于 GSI 实验储存环 ESR 的频率响应曲线
 $\mu = 0.025 \times 10^3$

动系统

$$\dot{x}_1 = y, \quad \dot{y} = -x_1 - x_1^3 \quad (32)$$

的特征。方程(32)是哈密顿系统, 哈密顿量由公式

$$H(x_1, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{4} x_1^4 = h \quad (33)$$

给出, 其中 h 是能量常数, 由系统的初值确定, 对于不同的 h , 有不同的轨道; 在相平面上, 方程(33)给出一簇围绕中心(0,0)的闭合轨道, 这些轨道由方程

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= \left(\frac{2\kappa^2}{1-2\kappa^2} \right)^{1/2} \operatorname{cn} u \\ y(\tau) &= -\frac{(2\kappa^2)^{1/2}}{1-2\kappa^2} \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{dn} u \end{aligned} \quad (34)$$

给出; 式中 $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{sn} u$ 和 $\operatorname{dn} u$ 是 Jacobian 椭圆函数, 而

$$\mu = \tau / (1 - 2\kappa^2)^{1/2}. \quad (35)$$

离子的运动周期

$$T(\kappa) = 4(1 - 2\kappa^2)^{1/2} K(\kappa), \quad (36)$$

式中

$$\kappa^2 = h(1 - 2\kappa^2)^2 / \kappa'^2, \quad \kappa'^2 = 1 - \kappa^2, \quad \kappa \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \quad (37)$$

而 $K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \xi}}$ 是 Jacobian 全椭圆积分。上式表明, 当 $h \rightarrow \infty$ 时, $\kappa \rightarrow \sqrt{2}/2$; 当 $h \rightarrow 0$ 时, $\kappa \rightarrow 0$, 而 $T(\kappa) = T(0) = 2\pi$ 。离子的运动周期随能量增加而减少。

由于系统不存在同宿轨, 可以预期系统不出现混沌现象。下面用 Melnikov 方法讨论方程(30')的全局分叉性质。

构造下列 Melnikov 函数:

$$M^{m/n}(\tau_0) = \int_0^{nT} y(\tau) \{ \delta y(\tau) + \lambda_2 x_1 \cos Q_2(\tau + \tau_0) \} d\tau, \quad (38)$$

式中 $T = \frac{m}{n} \frac{2\pi}{\omega_2}$, 而 $y(\tau)$ 由(34)式给出。完成积分^[4]可得

$$M^{m/n}(\tau_0) = I_\delta(m, n)\delta + \lambda_2 I_\lambda(m, n) \sin Q_2 \tau_0, \quad (39)$$

式中

$$I_\delta(m, n) = \frac{8n}{3\sqrt{1-2\kappa^2}} \left(\frac{1-\kappa^2}{1-2\kappa^2} K(\kappa) - E \right), \quad (40)$$

$$I_\lambda(m, n) = \begin{cases} 2\pi Q_2 \cosh(Q_2 K' \sqrt{1-2\kappa^2}) & n=1, m \text{ 为偶数;} \\ 0 & n \neq 1, m \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad (41)$$

E 是第二类 Jacobian 椭圆积分, $K' = K(\kappa')$ 。定义下列临界值:

$$\begin{aligned} R_c(m) &= I_\delta(m, 1) / I_\lambda(m, 1) \\ &= \frac{16K^2(\kappa)\sqrt{1-2\kappa^2}}{3m^2\pi^2} \left\{ \frac{\kappa'^2}{1-2\kappa^2} K(\kappa) - E \right\} \operatorname{sh} \frac{m\pi K'}{2K(\kappa)}. \end{aligned} \quad (42)$$

当 $|\lambda_2/\delta| > R_c(m)$ 时, (即参数激励比较强, 而系统的衰减比较弱时) Melnikov 函数 (39) 有两个简单零点, 这就表明, 方程 (30) 有两类 m 阶的子谐解 (m 是偶数); 相反, 当 $|\lambda_2/\delta| < R_c(m)$ 时, 由于强阻尼, 方程 (30) 没有任何子谐解存在. 注意到 $T(\kappa) = 2m\pi/Q_2$, 而 $T \in (0, 2\pi)$, 可导出 $m \leq [Q_2]$, 这里 $[Q_2]$ 表示比 Q_2 小的最大整数; 对于给定的参数激励 (主要关心的是给定 Q_2), 扰动系统 (30) 式有有限个偶阶子谐解; 当 $Q_2 < 2$ 时, 方程 (30) 没有任何子谐解出现; 当 $Q_2 \in (m, m+2)$ 时, 方程 (30) 没有 $m+2, m+4$ 等更高阶的子谐解存在.

注意到 $R_c^*(Q_2)$ 定义在区间 (m, ∞) , 下列极限将存在:

$$\lim_{Q_2 \rightarrow \infty} R_c(Q_2) = \lim_{\kappa \rightarrow \sqrt{2}} R_c(Q_2) = \infty,$$

$$\lim_{Q_2 \rightarrow m} R_c(Q_2) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} R_c(Q_2) = \begin{cases} 2 & m=2; \\ \infty & m=4, 6, \dots \end{cases} \quad (43)$$

以 ESR 为例, 并取上面一组参数可求得临界值 $R_c(3) = 31.68$ 和 $\lambda_2/\delta = 2.0 \times 10^{14}$, 显然 $\lambda_0/\delta > R_c(3)$, 这就表明方程 (30) 有两个三阶子谐解, 其中一个是鞍点型子谐解, 一个是结点型子谐解.

五、结果与讨论

用多重尺度法和 Melnikov 方法讨论了系统的局部分叉和全局分叉, 并利用经典方法讨论了系统的稳定性, 导出了系统的共振曲线和临界参数^[5-7]. 对于联邦德国 GSI 的实验储存环 ESR, 当 U^{92+} 的单核能为 500 MeV 时, 导出了临界磁场梯度公差 6.8 G/cm. 结果表明, 当梯度场公差小于 6.8 G/cm 时, 系统是稳定的.

上面的讨论 (包括文献[2]) 仅涉及了常数冷却力情况. 事实上, 由于束流的周期冷却, 问题将更加复杂. 此外, 在冷却器中, 由于离子被电子包围, 电子的屏蔽效应也没有考虑. 文献[8]将在线性近似下, 对这两种情况进行分析.

- [1] R. W. Hass, I. Hofmann and D. Liesen, Proc Workshop on Crystalline Ion Beam, Darmstadt, West Germany, (1988).
- [2] 邵明珠等, 本刊本期.
- [3] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, Nonlinear Oscillations, John Wiley and Sons, New York, (1979).
- [4] I. S. Gradshteyn et al., Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York, (1980).
- [5] I. Hofmann and S. Y. Luo, GSI Reports 89-1, (1989).
- [6] S. Y. Luo and I. Hofmann GSI Reports 89-21, (1989).
- [7] Luo Shiyu and Shao Mingzhu, Radiation Effects Express, 2 (1980), 45.
- [8] 邵明珠等, 本刊本期.

NONLINEAR DYNAMICS OF ONE-DIMENSIONAL CRYSTALLINE BEAM (II)

SHAO MING-ZHU

Chongqing Institute of Communications, Chongqing, 630073;

South-West Normal University, Chongqing, 630715

I. HOFMANN

GSI, 6100 Darmstadt, FRG

LUO SHI-YU

Chongqing Institute of Communications, Chongqing, 630073;

South-West Normal University, Chongqing, 630715

(Received 28 August 1989)

ABSTRACT

An equation for coherent oscillation excited by parameters for one-dimensional Coulomb chain has been derived, which includes constant cooling force. An approximate solution of the system has been found using a multiple scale method, and its stability discussed by classical method. Besides, we have also discussed global bifurcation of the system by Melnikov method, and derived a critical error of gradient field for ESR at GSI.

PACC: 2920