

整体正规 Schwarzschild 时空的 Newman-Penrose 表述

强 稳 朝

西安冶金建筑学院基础课部, 西安, 710055

1990 年 2 月 23 日收到

分别在 Schwarzschild 和 Kruskal 坐标中给出整体正规 Schwarzschild 时空的 Newman-Penrose 表述. 结果表明这种时空有整体代数性质, 它是 Petrov D 型. 对 Weyl 张量的标架分量、自旋系数和零矢量的行为也作了讨论.

PACC: 0420; 0490; 0290

一、引 言

Schwarzschild 度规是 Einstein 场方程的第一个精确解, 也是最简单的黑洞模型. 但是 Schwarzschild 时空有一个物理奇点 $r = 0$. 近几年随着非奇性黑洞的研究, 文献[1]提出了整体正规解的概念, 并且给出 Schwarzschild 和 Reissner-Nordström 黑洞的整体正规解, 继而作者又在文献[2, 3]中对整体正规 Schwarzschild 黑洞作了一些研究. 但是整体正规 Schwarzschild 时空代数性质的研究还未见报道. 在这一方面, Newman-Penrose (N-P) 表述最能有效地抓住时空的固有对称性, 并揭示其丰富的解析内容^[4]. 因此, 本文将给出整体正规 Schwarzschild 时空的 N-P 描述.

二、Schwarzschild 坐标中的 N-P 描述

整体正规 Schwarzschild 时空在 Schwarzschild 坐标中的线元为^[1]

$$ds^2 = \Phi(r)dt^2 - \Phi^{-1}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$
$$\Phi(r) = \begin{cases} \Phi_e(r) = 1 - \frac{R_s}{r} > 0 & R_s \leq r < \infty; \\ \Phi_i(r) = 1 - r^2/R_s^2 > 0 & 0 \leq r \leq R_s, \end{cases} \quad (1)$$

式中 $R_s = 2m$ 为 Schwarzschild 半径. 将(1)式写成对称形式

$$ds^2 = [dt - \Phi^{-1}dr] \frac{\Phi}{2} [dt + \Phi^{-1}dr] + \frac{\Phi}{2} [dt + \Phi^{-1}dr][dt - \Phi^{-1}dr]$$
$$- \frac{r}{\sqrt{2}} [d\theta + i \sin \theta d\varphi] \frac{r}{\sqrt{2}} [d\theta - i \sin \theta d\varphi]$$

$$-\frac{r}{\sqrt{2}}[d\theta - i \sin \theta d\varphi] \frac{r}{\sqrt{2}}[d\theta + i \sin \theta d\varphi], \quad (2)$$

与线元的零标架形式^[2]

$$ds^2 = (L_\mu dx^\mu)(n_\nu dx^\nu) + (n_\mu dx^\mu)(L_\nu dx^\nu) - (\bar{m}_\mu dx^\mu)(\bar{m}_\nu dx^\nu) - (\bar{m}_\mu dx^\mu)(m_\nu dx^\nu). \quad (3)$$

比较得零标架矢量的协变分量

$$\begin{aligned} L_\mu &= (L_t, L_r, L_\theta, L_\varphi) = (1, -\Phi^{-1}, 0, 0); \\ n_\mu &= (n_t, n_r, n_\theta, n_\varphi) = \frac{1}{2}(\Phi, 1, 0, 0); \\ m_\mu &= (m_t, m_r, m_\theta, m_\varphi) = \frac{r}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, i \sin \theta); \\ \bar{m}_\mu &= (\bar{m}_t, \bar{m}_r, \bar{m}_\theta, \bar{m}_\varphi) = \frac{r}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -i \sin \theta). \end{aligned} \quad (4)$$

相应的逆变分量为

$$\begin{aligned} L^\mu &= (\Phi^{-1}, 1, 0, 0); n^\mu = \frac{1}{2}(1, -\Phi, 0, 0); \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}r}(0, 0, -1, -i \csc \theta); \bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}(0, 0, -1, i \csc \theta). \end{aligned} \quad (5)$$

容易验证:

$$\begin{aligned} L \cdot L = n \cdot n = m \cdot m = \bar{m} \cdot \bar{m} = L \cdot m = L \cdot \bar{m} = n \cdot m = n \cdot \bar{m} = 0, \\ L \cdot n = -m \cdot \bar{m} = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

零标架基矢

$$\begin{aligned} e^{(1)} = e_{(2)} = n, \quad e^{(2)} = e_{(1)} = L, \\ e^{(3)} = -e_{(4)} = -\bar{m}, \quad e^{(4)} = -e_{(3)} = -m. \end{aligned} \quad (7)$$

本文用括号内角标表示标架指标. 为了求自旋系数可先求文献[4]所定义的 λ 符号, 即

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = e_{(a)}^i [e_{(b)i,i} - e_{(b)i,i} e_{(c)}^i]. \quad (8)$$

令 $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$, 将(4),(5)式代入(8)式得非零的 λ 符号为

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)(2)(2)} &= -\frac{1}{2}\Phi, r, \quad \lambda_{(1)(3)(4)} = \frac{1}{r}, \\ \lambda_{(2)(3)(4)} &= -\frac{\Phi}{2r}, \quad \lambda_{(3)(3)(4)} = -\frac{1}{\sqrt{2}r} \cot \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

根据 λ 符号与 Ricci 旋转系数的关系

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} [\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)}], \quad (10)$$

可得非零的 Ricci 旋转系数为

$$\begin{aligned} \gamma_{(1)(2)(2)} &= \lambda_{(1)(2)(2)}, \quad \gamma_{(1)(3)(4)} = \text{Re}[\lambda_{(1)(3)(4)}], \\ \gamma_{(2)(3)(4)} &= \text{Re}[\lambda_{(2)(3)(4)}]. \end{aligned} \quad (11)$$

将(1)式代入(9)式, 由(10)式和自旋系数的定义^[4]可得 Schwarzschild 坐标中非零的自旋

系数

$$\rho = -\frac{1}{r}, \mu = \frac{1}{2r} \left(\frac{r^2}{R_s^2} - 1 \right), \gamma = -\frac{r}{2R_s^2},$$

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}r} \cot \theta \quad 0 \leq r \leq R_s, \quad (12)$$

$$\rho = -\frac{1}{r}, \mu = \frac{1}{2r} \left(\frac{R_s}{r} - 1 \right), \gamma = \frac{R_s}{4r^2},$$

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}r} \cot \theta \quad R_s \leq r. \quad (13)$$

(13)式中除 α, β 与文献[4]中 α, β 差一正负号外,其它均一致,这种符号的差别来自我们所取的 m 及 $\bar{m}$ 与文献[4]中的相应量差一正负号,而这并不影响问题的结果. 由于在整体正规 Schwarzschild 时空中自旋系数 $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = \varepsilon = \pi = \tau = 0$, 因此根据 Goldberg-Sachs 定理的推论^[4]知,这种时空是代数特殊的并且是 Petrov D 型, Weyl 张量的复标架分量中唯一不为零的是 ϕ_2 , 其表达式^[4]为

$$\phi_2 = -C_{(1)(3)(4)(2)} = -R_{(1)(3)(4)(2)} - \frac{1}{12} R, \quad (14)$$

式中

$$R = \eta^{(a)(b)} R_{(a)(b)} = 2(R_{(1)(2)} - R_{(3)(4)}), R_{(a)(e)} = \eta^{(b)(d)} R_{(a)(b)(e)(d)}, \quad (15)$$

$$R_{(a)(b)(e)(d)} = -\gamma_{(a)(b)(e)(d)} + \gamma_{(a)(b)(d)(e)} + \gamma_{(b)(a)(f)} [\gamma_{(e)(d)}^{(f)} - \gamma_{(d)(e)}^{(f)}] \\ + \gamma_{(f)(a)(e)} \gamma_{(b)(d)}^{(f)} - \gamma_{(f)(a)(d)} \gamma_{(b)(e)}^{(f)}. \quad (16)$$

将(11),(9),(1)式代入上式可得对求 ϕ_2 有用的 $R_{(a)(b)(e)(d)}$,

$$R_{(1)(3)(4)(2)} = R_{(1)(2)(3)(4)} = R_{(3)(4)(4)(3)} = -\frac{1}{R_s^2} \quad 0 \leq r \leq R_s, \quad (17)$$

$$R_{(1)(3)(4)(2)} = \frac{R_s}{2r^3}, \quad R_{(1)(2)(3)(4)} = R_{(3)(4)(4)(3)} = -\frac{R_s}{r^3} \quad R_s \leq r. \quad (18)$$

代入(15),(14)式得

$$\phi_2 = \begin{cases} \frac{2}{R_s^2} = \frac{1}{2m^2} & 0 \leq r \leq R_s; \\ -\frac{m}{r^3} & R_s \leq r. \end{cases} \quad (19)$$

三、Kruskal 坐标中的 N-P 描述

文献[3]用 Kruskal 坐标给出整体正规 Schwarzschild 时空的最大和完备的解析延拓,其线元为

$$ds^2 = f^2(u, v)(dv^2 - du^2) - r^2(u, v)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (20)$$

式中

$$f^2 = \begin{cases} f_c^2 = \frac{4R_s^3}{r} e^{-r/R_s} & R_s \leq r; \\ f_i^2 = e^{-1} R_s^2 \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2 & r \leq R_s, \end{cases} \quad (21)$$

$$u^2 - v^2 = \begin{cases} \left(\frac{r}{R_s} - 1\right) e^{r/R_s} & R_s \leq r; \\ e \left(\frac{1 - r/R_s}{1 + r/R_s}\right) & r \leq R_s. \end{cases} \quad (22)$$

令 $x^0 = v, x^1 = u, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$, 取零标架基矢

$$\begin{aligned} L_\mu &= (L_v, L_u, L_\theta, L_\varphi) = \langle 1, 1, 0, 0 \rangle, \\ n_\mu &= \langle n_v, n_u, n_\theta, n_\varphi \rangle = \frac{f^2}{2} \langle 1, -1, 0, 0 \rangle, \\ m_\mu &= (m_v, m_u, m_\theta, m_\varphi) = \frac{r}{\sqrt{2}} \langle 0, 0, 1, i \sin \theta \rangle, \\ \bar{m}_\mu &= \langle \bar{m}_v, \bar{m}_u, \bar{m}_\theta, \bar{m}_\varphi \rangle = \frac{r}{\sqrt{2}} \langle 0, 0, 1, -i \sin \theta \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

其逆变分量为

$$\begin{aligned} L^\mu &= f^{-2} \langle 1, -1, 0, 0 \rangle, \quad n^\mu = \frac{1}{2} \langle 1, 1, 0, 0 \rangle, \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2} r} \langle 0, 0, -1, -i \csc \theta \rangle, \quad \bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2} r} \langle 0, 0, -1, i \csc \theta \rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

对于 Kruskal 坐标, (6)–(8), (11), (14)–(16) 式仍适用, 采用与上一节同样的步骤, 用 (21), (22) 式并注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^2}{\partial r} &= -\frac{4R_s^2(R_s + r)}{r^2} e^{-r/R_s}, \quad \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{2R_s^2}{r} e^{-r/R_s} u, \\ \frac{\partial r}{\partial v} &= -\frac{2R_s^2}{r} e^{-r/R_s} v \quad r \geq R_s, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^2}{\partial r} &= -2e^{-1}(R_s + r), \quad \frac{\partial r}{\partial u} = -\frac{(R_s + r)^2 e^{-1}}{R_s} u, \\ \frac{\partial r}{\partial v} &= \frac{(R_s + r)^2 e^{-1}}{R_s} v \quad r \leq R_s. \end{aligned} \quad (26)$$

可得非零的自旋系数

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2R_s r} (u + v), \quad \alpha = -\beta = \frac{1}{2\sqrt{2} r} \cot \theta, \\ \mu &= \frac{R_s^2}{r^2} (u - v) e^{-r/R_s}, \quad \gamma = \frac{R_s(R_s + r)}{2r^2} (u - v) e^{-r/R_s} \quad R_s \leq r, \quad (27) \\ \rho &= -\frac{1}{R_s r} (u + v), \quad \alpha = -\beta = \frac{1}{2\sqrt{2} r} \cot \theta, \end{aligned}$$

$$\mu = -\frac{(R_s + r)^2 e^{-1}}{2R_s r} (u - v), \quad \gamma = -\frac{(R_s + r)e^{-1}}{2R_s} (u - v) \quad r \leq R_s. \quad (28)$$

根据(27),(28)式可得同样的结论,即这种时空是代数特殊的,并且是 Petrov D 型,这正说明时空的代数性质与所用的坐标系无关. 这时对求 ϕ_2 有用的 $R_{(a)(b)(c)(d)}$ 为

$$R_{(1)(2)(2)(1)} = R_{(1)(3)(4)(2)} = R_{(3)(4)(4)(3)} = -\frac{1}{R_s^2} \quad r \leq R_s, \quad (29)$$

$$R_{(1)(2)(2)(1)} = R_{(3)(4)(4)(3)} = -\frac{R_s}{r^3};$$

$$R_{(1)(3)(4)(2)} = \frac{R_s}{2r^3} \quad R_s \leq r. \quad (30)$$

唯一不为零的 Weyl 张量的标架分量为

$$\phi_2 = \begin{cases} \frac{2}{R_s^2} & r \leq R_s; \\ -\frac{R_s}{2r^3} = -\frac{m}{r^3} & R_s \leq r. \end{cases} \quad (31)$$

从上边可以看出,尽管自旋系数在两种坐标系中的表达式不同,但 $R_{(a)(b)(c)(d)}$ 和 ϕ_2 的表达式却相同.

四、讨 论

首先,从上面的计算可知,对于整体正规 Schwarzschild 时空,整个时空具有统一的代数性质. 而且黎曼张量的标架分量和 Weyl 张量的复标架分量在 Schwarzschild 和 Kruskal 坐标系中有相同的表达式. 但 ϕ_2 在 $r = R_s$ 处不连续.

$$\lim_{r \rightarrow R_s^-} \phi_2 = \frac{2}{R_s^2}, \quad \lim_{r \rightarrow R_s^+} \phi_2 = -\frac{m}{R_s^3} = -\frac{1}{2R_s^2}. \quad (32)$$

尽管从(17),(18),(29),(30)式知, ϕ_2 在 $r = R_s$ 处的间断性来自 $R_{(1)(3)(4)(2)}$ 在同一处的间断性,但 $R_{(1)(3)(4)(2)}$ 在两种坐标系中的间断性却是不相同的. 从(16),(11)式和自旋系数的定义可求得

$$\begin{aligned} R_{(1)(3)(4)(2)} &= -\lambda_{(1)(3)(4),0} n^1 - \lambda_{(1)(3)(4),1} n^1 - \lambda_{(1)(3)(4)} [\lambda_{(2)(3)(4)} + \lambda_{(1)(2)(2)}] \\ &= \rho_{,0} n^0 + \rho_{,1} n^1 + \rho(\mu - 2\gamma). \end{aligned} \quad (33)$$

在 Schwarzschild 坐标系中,从(12),(13),(5)式知,自旋系数 ρ 在 n 方向的方向导数

$$\rho_{,(2)} = \rho_{,0} n^0 + \rho_{,1} n^1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{r} \right) + \left(-\frac{\Phi}{2} \right) \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{r} \right) = -\frac{\Phi}{\phi_2}. \quad (34)$$

在 $r = R_s$ 处连续,自旋系数 ρ, μ 在 $r = R_s$ 处也连续,而 r 在 $r = R_s$ 处间断. 因此, ϕ_2 在 Schwarzschild 坐标系中的不连续性的原因在于 r 而不在于 ρ, μ 或其方向导数.

在 Kruskal 坐标系中,所有的自旋系数在 $r = R_s$ 处都连续. 但从(27),(28),(24)式知,自旋系数 ρ 在 n 方向的方向导数为

$$\rho_{(2)} = \rho_{(2)}^0 + \rho_{(2)}^1 = \begin{cases} -\frac{R_s}{2r^3} e^{-r/R_s} (u^2 - v^2) + \frac{1}{2R_s r} & R_s \leq r; \\ -\frac{e^{-1}(R_s + r)^2}{2R_s^2 r^2} (u^2 - v^2) - \frac{1}{R_s r} & r \leq R_s. \end{cases} \quad (35)$$

$r = R_s$ 时从(22)式知, $u^2 - v^2 = 0$, 因此 $\rho_{(2)}$ 在 $r = R_s$ 处不连续, 这就使 ϕ_2 在同一处不连续.

从上述可知, 整体正规 Schwarzschild 时空是 Petrov D 型, 自旋系数 σ 在两种坐标系中均为零. 另外从 r, u, v 都是实数和(12), (13), (27), (28)式知, ρ 也是实的, 因此唯一不为零的光学标量为^[4] $\theta = -\text{Re}\rho = -\rho$. 自旋系数 ρ 在 n 方向的方向导数在两种坐标系中的不同行为, 说明光学标量 θ 在 n 方向的方向导数的行为在两种坐标系中不同.

其次, 讨论自旋系数 γ 的物理意义. 文献[4]给出

$$L_{i,j} L^j = (\varepsilon + \varepsilon^*) L_i - \kappa \bar{m}_i - \kappa^* m_i. \quad (36)$$

同样可求出

$$n_{i,j} n^j = -(\gamma + \gamma^*) n_i + \nu^* \bar{m}_i + \nu m_i. \quad (37)$$

这里“*”表示复共轭. 由于对整体正规 Schwarzschild 时空, ε, κ, ν 在两种坐标系中均为零, 所以有

$$L_{i,j} L^j = 0, \quad (36')$$

$$n_{i,j} n^j = -(\gamma + \gamma^*) n_i. \quad (37')$$

由于测地线方程可以写成^[4]

$$U^i_{,k} u^k = \phi u^i. \quad (38)$$

其中当测地线仿射参数化时 ϕ 为零, 反之是不为零的标量函数. 因此两种坐标系中的零标架矢量 L 和 n 都是零测地线的切矢量, 而且 L 在两种坐标系中都是仿射参数化的. 但自旋系数 γ 在两种坐标系中都不为零, 因此 n 在两种坐标系中都不是仿射参数化的. 另外, 在 Schwarzschild 坐标系中 γ 在 $r = R_s$ 处不连续, 因此 n 在其自身方向的方向导数在 $r = R_s$ 处也不连续. 但在 Kruskal 坐标系中, 由于 γ 连续, n 在其自身方向的方向导数在 $r = R_s$ 处也连续. 这一结论对 L 在 n 方向的方向导数也成立.

再者, 文献[4]指出, 当自旋系数 ρ 为实数, 且 $\alpha^* + \beta = \tau$ 时, 零矢量是某一标量场的梯度. 而从上述的计算知, 整体正规 Schwarzschild 时空的 $\rho, \alpha, \beta, \tau$ 正好满足这些条件. 可以直接验证在 Schwarzschild 坐标系中, 这一标量函数为

$$\phi_s = \begin{cases} t + \frac{R_s}{2} \ln \left(\frac{R_s - r}{R_s + r} \right) + C_1, & 0 \leq r \leq R_s; \\ t - r - R_s \ln(r - R_s) + C_2, & R_s \leq r, \end{cases} \quad (39)$$

式中 C_1, C_2 为积分常数. 可以看出, 对任何有限的时间 t ,

$$\lim_{r \rightarrow R_s^-} \phi_s = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow R_s^+} \phi_s = +\infty. \quad (40)$$

ϕ_s 在 $r = R_s$ 处不连续.

在 Kruskal 坐标中, 要求的标量函数

$$\phi_K = u + v + C_3, \quad (41)$$

C , 为积分常数, (41) 对整个时空均成立, 显然 ϕ_K 在 $r = R_s$ 处连续, 这显示出 Kruskal 坐标的又一优点.

- [1] Shen wenda and zhu shitong, *Gen. Rel. Grav.*, **17** (1985), 739.
- [2] 朱蔚通, 沈文达, 物理学报, **35**(1986), 819.
- [3] 沈文达, 朱蔚通, 物理学报, **37**(1988), 959.
- [4] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon Press. Oxford University Press, New York, (1983), p. 37—63; 134—135.
- [5] M., Carmeli. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*, John Wiley & Sons, New York, (1982). p. 185.

THE DESCRIPTION OF GLOBALLY REGULAR SCHWARZSCHILD SPACE-TIME IN A NEWMAN-PENROSE FORMALISM

QIANG WEN-CHAO

Department of Basic Courses, Xi'an Institute Metallurgy and Construction Engineering Xi'an, 710055

(Received 23 February 1990)

ABSTRACT

The description of globally regular Schwarzschild space-time in a Newman-Penrose formalism is given in the Schwarzschild coordinate and the Kruskal coordinate respectively. It is shown that this space-time has the global algebraic property. Globally it is of Petrov type-D. The behaviours of tetrad components of the Weyl tensor, the spin coefficients and null vectors are also discussed.

PACC: 0420; 0490; 0290