

注入信号激光系统的不稳定性分析*

杨 国 健

北京师范大学低能核物理研究所, 北京, 100875

胡 岗

北京师范大学物理系, 北京, 100875

1990 年 2 月 22 日收到

根据由半经典 Maxwell-Bloch 方程模拟的单模注入信号激光的稳定性判据, 讨论系统的稳定性问题, 着重分析系统 Hopf 失稳时所对应参数区域的整体结构, 并解析地得到不稳定区的边界. 发现并讨论了主动腔情况下的完整双稳输出及这种输出产生的条件.

PACC: 4265P; 4255B; 4260; 4260F

一、引 言

相干光学系统的稳定性对外界条件的变化很敏感. 例如一个光学双稳系统 (OB), 当控制参数改变时, 它原来的稳定输出光场就会发展成规则的或无规则的(混沌状的)自发振荡形式^[1,2]. 注入信号激光 (LIS) 是由外信号驱动的、工作在激光阈值以上的普通激光振子. 它构成了激光类型的双稳系统, 也会产生同样的甚至更为丰富的动力学现象^[3,4].

LIS 的不稳定性来自于外信号与激光振子相互竞争的结果. 当外场很弱时, 激光腔内的场是信号场与自由运转激光场的叠加, 系统的输出将作拍频为 $|\omega_0 - \omega_A|$ 的小幅度振荡 (ω_0 是信号频率, ω_A 是自由运转激光频率). 当外场加强时, 振荡随之加剧, 最后导致具有各种时间结构的自发脉冲产生. 若外场足够强, 激光振子完全被外场所锁控, 输出随输入作稳定的变化. 过去人们主要关心如何用外场对激光进行锁控以便激光系统工作在稳定状态上^[5-8], 最近又详细地讨论了输出随外场变化的时间相关行为^[9-12], 在文献 [13] 中, 针对均匀展宽、两原子能级、平面波近似和平均场极限条件下的 LIS 提出了判断实现这种锁控作用的判据函数. 本文根据这一判据, 系统地考察 LIS 的不稳定性在整个参数空间的分布情况. 发现实现主动腔条件下的双稳输出现象及其对应的参数区域的分布规律. 这一结果为在今后实际应用中研制主动腔型光学双稳器件, 以及其它具有一定稳定性要求的激光器件提供了理论依据.

二、模型与定态解

采用传统的近似方法^[1], 得到以 Maxwell-Bloch 方程模拟的 LIS 模型方程

* 国家自然科学基金及博士点基金资助的课题.

$$\dot{x} = -k[(1 + i\theta)x - Y + 2CP], \quad (1a)$$

$$\dot{P} = Dx - (1 + i\Delta)P, \quad (1b)$$

$$\dot{D} = -r[(x^*P + xP^*)/2 + D + 1]. \quad (1c)$$

方程(1)中的所有参数及变量均具有传统意义^[3].

定态时,输入外场强度 Y 和输出强度 $|x|$ 有如下关系:

$$Y = |x| \left[\left(1 - \frac{2C}{1 + \Delta^2 + |x|^2} \right)^2 + \left(\theta + \frac{2\Delta C}{1 + \Delta^2 + |x|^2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2)$$

适当地选取参数 Δ, θ 和 C , 在 $|x|$ - Y 平面上, 定态解呈“s”曲线. 等式

$$dY/d|x| = 0, \quad d^2Y/d|x|^2 = 0 \quad (3)$$

是(2)式产生“s”曲线所必须满足的临界条件. 从(3)式中消去 $|x|$, 经过简单运算, 可以得到临界条件(3)式的参数表达形式

$$\frac{27}{4}(1 + \Delta^2)(1 + \theta^2)C/(C + 1 - \Delta\theta)^3 = 1. \quad (4)$$

应该注意此临界条件并不充分, 因为并非所有满足(4)式的参数都具有物理意义. 以下分析将会看到这一点.

处在临界条件下的“s”曲线的负斜率段一定缩为一点, 由(3)式可以知道该点所对应的定态输出为

$$|x_M|^2 = [4C^2(1 + \Delta^2)^2/(1 + \theta^2)]^{1/3} - (1 + \Delta^2). \quad (5)$$

固定参数 θ, C , 从(4)式中解析地求出 Δ 的三个解 $\Delta_i (i = 1, 2, 3)$ 并代入(5)式, $|x_M|$ 相应地变成 $|x_{M_i}| (i = 1, 2, 3)$. 图1在 Δ - θ 参数平面上描绘了与 $|x_{M_i}|$ 相应的 M_i 点的变化曲线. 不难证明其中两条曲线在点

$$-\theta = \Delta = (2C - 1)^{1/2}, \quad |x| = 0 \quad (6)$$

处相交(该点在图1中以A点表示. 由于(4)式关于 $\Delta, \theta \rightarrow -\Delta, -\theta$ 变换不变性, 所以可把讨论仅限于左半平面). 直接验证表明

$$\begin{aligned} |x_{M_1}^+|^2 &> 0, \quad |x_{M_1}^-|^2 < 0, \\ |x_{M_2}^+|^2 &> 0, \quad |x_{M_2}^-|^2 < 0, \quad |x_{M_3}|^2 > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

因为 $|x_{M_i}|^2$ 必须为正值, 所以 $|x_{M_i}^-|^2$ 或 M_i^- 是不能实现的非物理情况, 应排除. 因此, 在 Δ - θ 参数平面上定态解出现“s”曲线的区域(简称s区)的边界应由曲线 M_1^+, M_2^+ 和 M_3 围成. 在这个区域以外, 定态解是单值的. 当曲线在A点由 M_1^+ 跳到 M_2^+ 或反过来, 边界线的斜率就会出现不连续变化. A点是一个余维数为3的相变点. 在文献[14]中已经

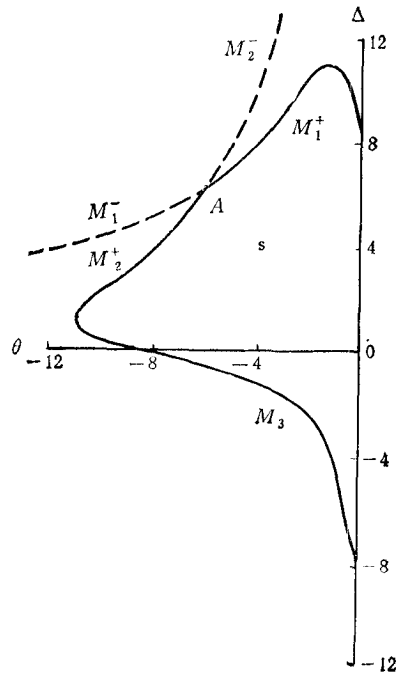


图 1

$C = 20$, M_i^- 与 $|x_{M_i}^-|^2 < 0 (i = 1, 2)$ 相对应, 图中以虚线表示, 它应排除; s 区由曲线 M_1^+, M_2^+ 及 M_3 和纵坐标轴共同围成

仔细讨论了在该点及其附近系统的动力学性质.

三、LIS 的 Hopf 不稳定区在参数空间的全局分布

LIS 是一个通过 6 个参数 $\Delta, \theta, C, k, \gamma$ 及 Y 与外界耦合的耗散系统, 参数的选取决定它的稳定性. 本节着重讨论系统定态解的 Hopf 不稳定性问题.

将微分方程组(1)围绕定态解(2)式作线性稳定性分析, 得到它的特征方程

$$\lambda^5 + A_1\lambda^4 + A_2\lambda^3 + A_3\lambda^2 + A_4\lambda + A_5 = 0. \quad (8)$$

这里 $A_i = A_i(\Delta, \theta, C, k, \gamma, |x|)$ ($i = 1, \dots, 5$) 已在附录中给出. 文献[13]中提出判断定态解是否发生 Hopf 失稳的判据函数

$$F = (A_1A_2 - A_3)(A_3A_4 - A_2A_5) - (A_1A_4 - A_5)^2. \quad (9)$$

当 $F < 0$ 时, 定态解是 Hopf 不稳定的. $F = 0$ 对应分支点情况, 由它可以确定输入对输出产生锁控作用的阈值 Y_c (或 $|x_c|$), 它们之间通过(2)式相联系).

理论分析表明, 在 LIS 情况中, Hopf 不稳定性总是从“s”定态曲线的最低端 ($|x| = 0$) 延伸到分支点处, 而且在共振条件下 ($\Delta = \theta = 0$), 最低端总是 Hopf 不稳定的. 由(9)式知道, 此时 $F < 0$. 可以合理地推想: 具有 Hopf 不稳定性的参数区一定是一个与包括点 $\Delta = \theta = |x| = 0$ 及其邻域在内相连通的单连域. 在这个区域内, 任何一条定态曲线上都存在着 $F < 0$ 的失稳段落 $0 \leq |x| < |x_c|$. 这个区的边界方程为

$$F_{\min} = 0. \quad (10)$$

不难证明

$$\left. \frac{\partial F_{\min}}{\partial |x|} \right|_{|x|=|x_c|=0} > 0. \quad (11)$$

它表明在边界上, 定态解曲线满足 $|x| > 0$ 的部分是稳定的. (10)式的直观形式为

$$F(\Delta, \theta, C, k, \gamma, |x|)|_{|x|=|x_c|=0} = 0. \quad (12)$$

若把特征方程(8)中各系数 A_i ($i = 1, \dots, 5$) 中的各项按是否含有参数 γ 而分归成两部分 $A_i = a_i + a_{i\gamma}$ (注意 $a_5 = a_{5\gamma}$), (12)式也可以相应地分成含 γ 和不含 γ 的两部分:

$$F|_{|x_c|=0} = F'|_{|x_c|=0} + F'_\gamma|_{|x_c|=0} = 0, \quad (13)$$

式中 $F' = F'(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 不含 γ , 而 $F'_\gamma = F'_\gamma(a_1, a_2, a_3, a_4, a_{1\gamma}, a_{2\gamma}, a_{3\gamma}, a_{4\gamma}, a_{5\gamma})$ 含 γ .

不难证明 $F'_\gamma|_{|x_c|=0} = 0$, 所以边界方程简化为

$$F'|_{|x_c|=0} = 0. \quad (14a)$$

它的具体形式为

$$(a_1a_2 - a_3)a_3 - a_4^2a_4 = 0, \quad (14b)$$

式中 $a_1 = 2(1 + k)$, $a_2 = k^2(1 + \theta^2) + 4k(1 - C) + 1 + \Delta^2$,

$$a_3 = 2k[(k + 1)(1 - 2C) + k\theta^2 + \Delta^2],$$

$$a_4 = k^2[(1 + \Delta^2)(1 + \theta^2) + 4C(C + \Delta\theta - 1)]. \quad (15)$$

将系数 a_i ($i = 1, \dots, 4$) 代入(14b)式, 经过冗长的代数运算, (14)式大大简化为如下方程:

$$\Delta = k\theta \pm (k + 1)\sqrt{2C - 1}. \quad (16)$$

(16) 式代表两条斜率为 k , 间距为 $\frac{2}{\sqrt{k^2+1}} (k+1)(2C-1)^{1/2}$ 的相互平行直线.

令人惊奇的是 Hopf 不稳定区就位于这两条平行线之间. (16) 式的提出为我们认清 LIS Hopf 不稳定区的整体结构提供了极大的方便. 这对按实际需要控制 LIS 的稳定性具有重要意义.

根据(4)和(16)两式, 图 2 在 Δ - θ 参数平面上描绘了 LIS 稳定性全局分布图. 图形关于原点的反射对称性来自于这两个方程的 $\Delta, \theta \rightarrow -\Delta, -\theta$ 变换不变性. 在封闭虚线圈内, 定态解呈“s”状. 圈外为单值定态解区. 在两平行直线之间, 定态解曲线部份段落 Hopf 失稳. 在其外边, 定态解全部稳定. 这两种区域的套合, 把整个平面分成如图 2 所示的四个区域, 它们分别是: 稳定的单值区 I; 双稳区 II; 具有 Hopf 失稳的 s 区 III 和具有 Hopf 失稳的单值区 IV. 在前两个区域中取参数, 系统输出在相空间中为一定点. 而在后两个区域取参数, 对应于适当的输入光场强度, 输出中将自发出现时间相关的振荡. 人们通常研究 LIS 的稳定性随外场的变化, 以及外场对激光振子的锁控作用, 就是针对这两个区域而言的.

双稳区 II 的发现很有意义. 若从这个区中取参数, 一定可以观察到一个共存于两支稳定定态解曲线之间的完整迟滞回线. 这是主动腔条件下的光学双稳现象. 过去人们在计算中或许遇到过它, 但是由于出现这种输出的参数区在整个参数空间所占比例较小, 有时甚至为零(例如当 $k \approx 1$ 时), 加上人们对该区的分布规律不了解, 所以很难观察到它. 即使发现, 参数选取也是盲目的. II 区分布规律的发现, 为今后设计主动腔光学双稳器件打下了理论基础.

作为图 2 的补充, 根据原始判据函数(9)式, 在 Δ - $|x|$ 平面上直接观察 LIS 的稳定性随外场的变化情况. 图 3 给出计算结果. 图 3 中符号 I, II, III 和 IV 所代表的含意同

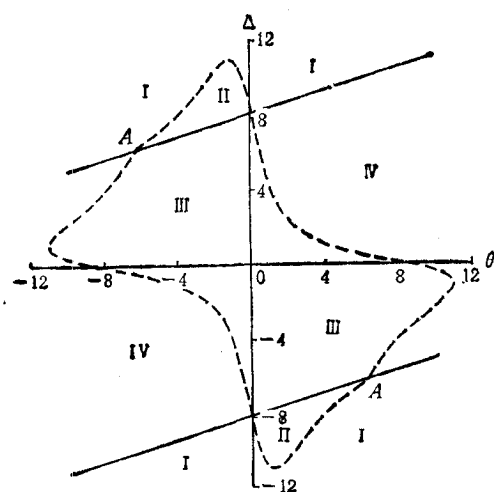


图 2 LIS 的 Hopf 失稳区在 Δ - θ 参数平面上的分布图 其它参数为 $C=20$; $k=0.3$; $r=0.2$; s 区与 Hopf 失稳区的边界交界点 A 是一个余维数为 3 的临界点

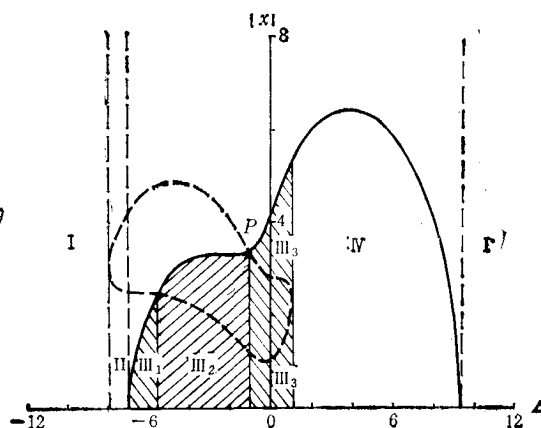


图 3 相应于外场变化的 Hopf 失稳区分布图 它直接给出对应于每一个 Δ 值, Hopf 失稳段在定态解曲线上的长度; 三种不同的阴影区代表 III 区的三个子域; $\theta = 4$, 其它参数同图 2

图 2. 虚线圈围成的区域为 s 曲线的负斜率区, 它由 $A_3 = 0$ 给出. s 曲线负斜率段的不稳定性已为人们所熟知. 粗实线是 Hopf 分岔阈值曲线, 它由 $F = 0$ 给出. 在这条曲线的下方, 定态解是 Hopf 不稳定的. 很显然, 子域 III_1 表示 Hopf 失稳现象仅仅出现在 s 曲线的下支. III_2 表示出现这种失稳现象的失稳段从 $|x| = 0$ 一直延伸到 s 曲线的负斜率区中. 在 III_3 中, Hopf 失稳阈值必落在 s 曲线的上支, 从而使 s 曲线的整个下支和部分上支失稳. 此时双稳现象完全消失.

在图 3 中 P 点处, Hopf 分岔阈值与 s 曲线的上拐点重合, 这时 $F = 0$ 与 $A_3 = 0$ 同时成立, 立即得到

$$F = [A_3(A_1A_2 - A_3) - A_1A_4]A_4 = 0, \quad (17)$$

在这样的条件下, LIS 系统有可能出现诸如倍周期分岔、混沌以及调制自脉冲波包和高尖峰脉冲输出^[3]等有趣现象. 所以由 F 函数和 A_3 的零值超曲面, 有可能解析地推断光场分岔和混沌的产生.

下面在图 2 的基础上, 通过观察 LIS 的 Hopf 不稳定性受参数 k, γ 和 c 变化的影响来描绘发生这种不稳定时对应的参数空间的整体结构.

1. 腔弛豫系数 k

图 2 和(16)式清楚地表明, 不稳定区的边界总是从 s 区边界的不连续点 A 上穿过, 而且无论 k 怎样变化, 它一定以该点为轴转动. 例如当 k 从零增大时, 边界线从平行 θ 轴的位置开始作逆时针转动. 这一事实导致如下简单结论: 好腔 ($k \rightarrow 0$)、坏腔 ($k \rightarrow \infty$) 极限条件下, 不稳定区被分别限制在

$$(-\infty < \theta < \infty, -\sqrt{2C-1} < \Delta < \sqrt{2C-1})$$

和
$$(-\sqrt{2C-1} < \theta < \sqrt{2C-1}, -\infty < \Delta < \infty)$$

这样两条相互垂直、宽为 $2\sqrt{2C-1}$ 的无限长窄带内. 这两条窄带把 Δ - θ 参数平面分成三种区域(见图 4). 其中位于图形中央的方域 H_1 的 Hopf 不稳定性和对角域 H_2 的不失稳性不随 k 的变化而变. 而由 H_3 代表的区域的稳定性视 k 而定. k 增大, 不稳定区也增大; 反之则减小.

双稳区位于敏感区 H_3 中, 好、坏腔两种极限情况下, 它们面积相等, 并且最大. 当 $k \approx 1$ 时, 它们几乎完全消失. 这时整个 s 区都变成 Hopf 不稳定区.

2. 原子弛豫系数 γ

图 2 和(16)式表示 LIS 的 Hopf 不稳定区分布与参数 γ 无关. 换言之, 在给定稳定性的区域内, 系统相应的稳定性不因 γ 变化而改变. 此时 LIS 的稳定性对 γ 是不敏感的. 实际上, 自由运转激光平庸定态解的稳定性也应由方程(12)描写. LIS 的不稳定定态解就是从这个平庸定态解发展而来的.

3. 双稳参数 C

参数 C 决定了不稳定带的带宽和 s 区的大小. C 值上升, 两种区域均扩大, 图 2 中各

子域也相应扩大,反之则减小. 当 $C \leq 1/2$ 时,带域因两直线边界重合而消失,系统在全参数空间稳定. 此时,定态解实际上已为单值,所以对低小信号增益系数值的单模 LIS,人们常常只能得到无任何迟滞效应的稳定强度的单值输出.

图 2 和(16)式给出定态解可能失稳的参数区域. 但若关心在什么样的外场条件下定态解失稳时,讨论应扩充到包括 γ, k, C 和 $|x|$ 所有 6 个参数的空间里. 如图 3 那样,可以利用判据函数 F 的原始形式(9)式,在任意给定的参数平面上立即给出随外场变化定态解失稳规律. 在 $\theta-|x|$ 平面上,举例讨论这一规律受参数 k 变化的影响.

先看极限情况. 好腔近似时,

$$F \propto A_1 \propto 1 + \Delta^2 + |x|^2 - 2C(1 + \Delta^2)/(1 + \Delta^2 + |x|^2). \quad (18)$$

显然, Hopf 分岔阈值是平行于 θ 轴的直线, Hopf 不稳定区位于 $0 < |x| <$

$\{[2C(1 + \Delta^2)]^{1/2} - (1 + \Delta^2)\}^{1/2}$ 的无限长窄带内. 坏腔近似时,

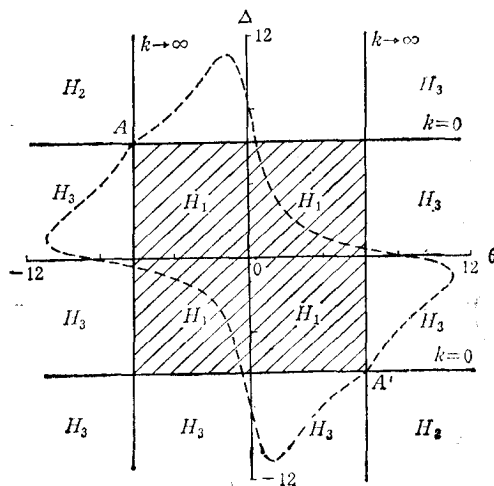


图 4

封闭的虚线圈内是 s 区; Hopf 不稳定区被分别限制在两条相互垂直的带域内,其中水平带域边界相应于 $k = 0$, 垂直带域边界相应于 $k \rightarrow \infty$; 其它参数同图 2

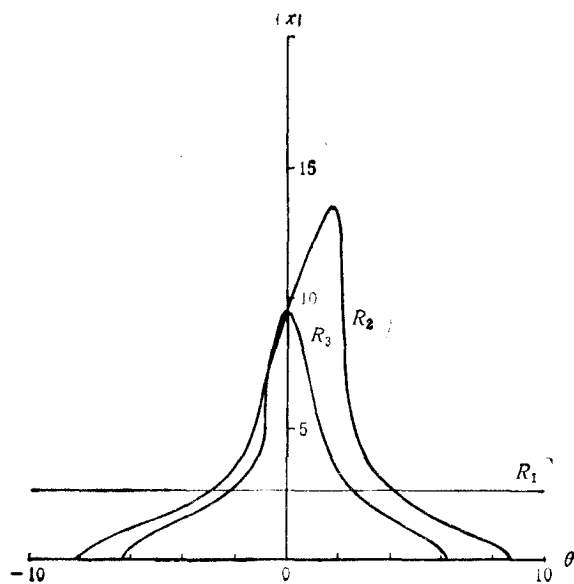


图 5

各曲线下方的区域是 Hopf 不稳定区;除好腔极限情况外,它们都是封闭的; $k_1 = 0$; $k_2 = 3$; $k_3 = 200$; $\gamma = 0.2$; $C = 20$; $\Delta = 1$

$$F \propto A_3 A_4 - A_2 A_5, \quad (19)$$

其中系数 $A_i (i = 2, \dots, 5)$ 可由附录中相应的系数 A_i 作 $k \rightarrow \infty$ 近似而得到。此时不稳定区边界与 θ 轴分别交于点 $\pm \sqrt{2C-1}$ 处, 并且根据关系式 $\left. \frac{d|x|}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0$ 和

$$\left. \frac{d^2|x|}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} < 0$$

得知, 系统在 $|x|$ 轴上取得最大分岔阈值。在这两个极限之间, 随着 k 从零值逐渐增大, 原来好腔近似时敞开的不稳定区随之慢慢合拢收缩, 最后达到坏腔极限时的情况。图 5 清楚地反映这一变化过程。

四、结 论

在文献[15,16]中, 对单、多模 OB 的不稳定性作了整体分析。发现单模 LIS 的稳定性和单模 OB 的相比有很大不同, 这种不同性可由描述两者的数学模型的差别反映出来。在 LIS 中, 方程 (1c) 中的常数项为 +1, 它表示在初始时, 腔内工作介质处于主动状态, 即无外信号时, 腔内已存在稳定的激光光场。在 OB 中, 模型方程可由 (1c) 式中的 +1 换成 -1 得到。-1 表示初始时腔内工作介质处于被动状态, 或者说它的工作状态只有在外场激励下才能达到。正是因为这一常数项的差别, 造成了这两种不同性质的光学系统稳定性的极大差别。

本文主要结果是:

1. 分析了 LIS 系统在定态时, 输出随输入变化呈“s”形曲线参数所应满足的充分必要条件。
2. 从稳定性判据函数出发, 方便地描绘了 LIS 定态解可能出现 Hopf 不稳定性的参数空间的整体结构, 得到了不稳定区边界的解析表达式。另外, 运用稳定性判据函数, 观察了 LIS 定态解随外场变化发生 Hopf 失稳情况, 从而揭示了自由运转激光受外场锁控的规律。
3. 在 LIS 中实现了完整的双稳输出, 分析了这种输出所对应的参数区域的分布情况。这对实现可能的新型主动腔双稳器件提供了理论依据。

本文中所采用的方法完全可以方便地应用到多模激光、多模 LIS 及多光子条件下的类似激光系统。另外, 在已确定的不稳定区内, 观察在具体参数条件下输出的时间结构是有意义的^[4]。现在这项工作可以在本文所做的稳定性整体分析基础上更系统地进行。

附 录

$$\begin{aligned} A_1 &= 2k + r + 2, \\ A_2 &= k^2(1 + \theta^2) + 2r + 1 + \Delta^2 + r|x|^2 + 2k(2 + r + 2CD), \\ A_3 &= r(1 + \Delta^2) + |x|^2 + 2k(2r + 1 + \Delta^2 + r|x|^2) + (1 + \theta^2)(r + 2) + 4kCD(r + k + 1) \\ &\quad - 2rkCD|x|^2/(1 + \Delta^2), \\ A_4 &= 2rk(1 + \Delta^2 + |x|^2) + k^2(1 + \theta^2)(2r + 1 + \Delta^2 + r|x|^2) + 2kCD[2k(1 - \Delta\theta) + 2r(k + 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + r|x|^2] + 2D|x|^2[krC\Delta(\Delta + k\theta) - 1 - k]/(1 + \Delta^2) + 4k^2C^2D^2, \\
 A_s = & rk^2[4C^2D^2(1 - |x|^2) + (1 + \theta^2)(1 + \Delta^2 + |x|^2) + 4CD(1 - \Delta\theta)], \\
 D = & -(1 + \Delta^2)/(1 + \Delta^2 + |x|^2).
 \end{aligned}$$

- [1] L. A. Lugiato, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, Vol. XXI, (1984), p. 71.
- [2] H. M. Gibbs, *Optics Bistability: Controlling Light with Light*, edited by Paul. F. Liao and Paul Kelly, Academic, New York, (1985).
- [3] L. A. Lugiato, L. M. Narducci, D. K. Bandy and C. A. Pennise, *Opt. Commun.*, **46**(1983), 64.
- [4] Y. Gu, D. K. Bandy, J. M. Yuan and L. M. Narducci, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 354.
- [5] H. L. Stover and W. H. Steier, *Appl. Phys. Lett.*, **8**(1966), 91.
- [6] C. J. Buczek and R. J. Freiberg, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-8**(1972), 643.
- [7] P. Burlamacchi and R. Salimbeni, *Opt. Commun.*, **17**(1976), 6.
- [8] R. W. Dunn, S. T. Hendow, W. W. Chow and J. Small, *Opt. Lett.*, **8**(1983), 3191.
- [9] T. Yamada and R. Graham, *Phys. Lett.*, **53A**(1975), 77.
- [10] D. K. Bandy, L. M. Narducci, C. A. Pennise and L. A. Lugiato, in *Coherence and Quantum Optics*, V, L. Mandel and E. Wolf, eds. Plenum, New York, (1984), p. 585.
- [11] J. R. Tredicce, F. T. Arecchi, G. L. Lippi and P. Puccioni, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(1985), 173.
- [12] D. K. Bandy, L. M. Narducci and L. A. Lugiato, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(1985), 148.
- [13] G. Hu and G. J. Yang, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 1979.
- [14] G. Hu and G. J. Yang, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 834.
- [15] G. J. Yang and G. Hu, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 2514.
- [16] G. Hu and H. Haken, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 1899.

INSTABILITY ANALYSIS OF LASER WITH AN INJECTED SIGNAL

YANG GUO-JIAN

Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University, Beijing, 100875

HU GANG

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing, 100875

(Received 22 February 1990)

ABSTRACT

Based on the instability criterion of semi-classical Maxwell-Bloch equations of single-mode laser with an injected signal, we investigated the instability of this system. In particular, we examined the global structure of Hopf instability domain in the entire parameter space and derived the boundary of this domain analytically. We also found a full hysteresis loop between the bistable states of the output laser intensity in the active cavity case and discussed the condition of occurrence of such phenomenon.

PACC: 4265P; 4255B; 4260; 4260F