

半导体中的双激子压缩态及其复合辐射

黄 洪 斌

东南大学物理系, 南京, 210018

1990 年 2 月 23 日收到

本文引进双激子压缩态, 在单激子“非玻色近似”和玻色近似两种情形下, 讨论了量子关联和空间关联的双激子的压缩特性、二阶相关特性及其复合辐射光的压缩特性。说明两种情形下双激子玻色近似分别相当于 $SU(2)$ 群和 $SU(1, 1)$ 群到谐振子群的收缩, 并给出这种收缩所带来的结果。

PACC: 7135; 4250

一、引 言

近年来, 由于压缩光具有较低的量子噪声引起了人们的极大兴趣^[1], 并在实验上通过非线性光学过程产生压缩光^[2-6]。这种压缩态也存在于其它量子体系中。Wódkiewicz 和 Eberly^[7] 曾研究了 $SU(2)$ 和 $SU(1, 1)$ 李代数生成元的压缩效应。Barnett 和 Dupertuis^[8] 研究了双原子 $SU(2)$ 压缩态的特性。但都没说明压缩效应在什么条件(非位相条件)下消失, 也未见文献报道。处在 $SU(2)$ 压缩态的力学体系可辐射压缩光^[8-11], 但压缩的力学体系是否一定辐射压缩光还未见文献讨论。

另外, 原子或分子可产生关联辐射, 原子或分子的动力学行为及其辐射光的性质因这种关联性而具有新的内容^[8, 12]。如许多处在制备态的 Rydberg 原子在其微波激射器中可关联辐射较强的压缩光^[14]。这也是压缩态研究中值得重视的一个方面。

本文以半导体中的 Wannier 激子为对象, 类似于双光子压缩态^[13]和双原子压缩态^[8], 引进双激子压缩态, 研究在单激子“非玻色近似”和玻色近似两种情形下, 量子关联和空间关联的两个激子的压缩特性和二阶相关特性, 分析了复合辐射光的压缩特性和关联双激子压缩特性的关系, 指出两种情形下双激子的玻色近似分别相当于 $SU(2)$ 群和 $SU(1, 1)$ 群到谐振子群的收缩, 并给出了这种收缩对双激子压缩特性和二阶相关特性的影响。

二、量子关联的双激子压缩态

定义双激子的压缩算符

$$S(\zeta) = \exp(\zeta^* D_{\mathbf{k}_1} D_{\mathbf{k}_2} - \zeta D_{\mathbf{k}_1}^\dagger D_{\mathbf{k}_2}^\dagger), \quad (1)$$

式中 $D_{\mathbf{k}_i}$ ($D_{\mathbf{k}_i}^\dagger$) 为单激子的产生(湮没)算符^[11], $\zeta = \theta / 2 e^{i\varphi}$ 为复压缩参数。下面分两种

情形讨论量子关联双激子的压缩态.

1. 单激子“非玻色近似”下关联双激子的压缩态

在此情形下, 有^[1]

$$[D_{k_1}^+, D_{k_2}] = \delta_{k_1, k_2} (2D_{k_1}^+ D_{k_2} - 1). \quad (2)$$

定义

$$J_+ = D_{k_1}^+ D_{k_2}^+, \quad J_- = D_{k_1} D_{k_2}, \quad J_3 = \frac{1}{2} (D_{k_1}^+ D_{k_1} + D_{k_2}^+ D_{k_2} - 1), \quad (3)$$

则 J_+ , J_- , J_3 满足 $SU(2)$ 李代数的对易关系

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2J_3. \quad (4)$$

双激子压缩态为

$$|\zeta\rangle_I = \exp(\zeta^* D_{k_1} D_{k_2} - \zeta D_{k_1}^+ D_{k_2}^+) |0\rangle \quad (5a)$$

$$= \exp(\zeta^* J_- - \zeta J_+) |0\rangle \quad (5b)$$

$$= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle - \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |+\rangle, \quad (5c)$$

式中 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. $|0\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2$, $|+\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_2$ 分别为双激子的基态和激发态. 显然 $|\zeta\rangle_I$ 正是双激子的 $SU(2)$ 压缩态. 量子

关联的双激子算符作用在两个激子空间上, 因此对两个激子的量子关联性较敏感, 而双激子的压缩效应就来源于这种关联性.

定义双激子的关联算符

$$D_+ = D_{k_1}^+ + e^{ix} D_{k_2}^+, \quad D_- = D_{k_1} + e^{-ix} D_{k_2}. \quad (6)$$

相因子 x 可用来表示在单模行波中两个关联激子的空间间隔. 关联双激子的复合辐射光特性由算符 D_1 , D_2 决定 ($D_{\pm} = D_1 \pm iD_2$), D_1 , D_2 满足对易关系

$$[D_1, D_2] = iD_3 = i2J_3. \quad (7)$$

易证在态 $|\zeta\rangle$ 上

$$\langle D_3 \rangle = -\cos \theta, \quad (8a)$$

$$\Delta D_1^2 = \frac{1}{2} [1 - \sin \theta \cos(x - \varphi)], \quad (8b)$$

$$\Delta D_2^2 = \frac{1}{2} [1 + \sin \theta \cos(x - \varphi)]. \quad (8c)$$

由测不准关系 $\Delta D_1 \Delta D_2 \geq \frac{1}{2} |\langle D_3 \rangle|$ 知, 若 $\Delta D_i^2 < \frac{1}{2} |\langle D_3 \rangle|$ ($i = 1, 2$), 则 D_i 分量被压缩. 由(8)式知, D_1 分量被压缩的条件为

$$1 - \sin \theta \cos(x - \varphi) < |\cos \theta|. \quad (9)$$

(9) 式可由调整压缩参数 ζ 而满足. 若 $\cos(x - \varphi) = 1$, 则对任意 θ 值都有

$$\Delta D_1 \Delta D_2 = \frac{1}{2} |\langle D_3 \rangle|,$$

即双激子压缩态 $|\zeta\rangle_j$ 同时又是理想态^[7] (Intelligent states), 进而取 $\theta = \frac{1}{2} n\pi$ ($n = 1, 3, \dots, (m+1), \dots$), 则态 $|\zeta\rangle_j$ 又为最小测不准态。

由 (5c) 式易得单激子的二阶相关函数为

$$g_{D_{k_i}} = \frac{\langle D_{k_i}^\dagger D_{k_i}^\dagger D_{k_i} D_{k_i} \rangle}{|\langle D_{k_i}^\dagger D_{k_i} \rangle|^2} = 0 \quad (\theta \neq 0). \quad (10)$$

同非关联单激子的情形一样^[11], 关联的单激子也具有反聚束效应。但 $g_D = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} > 1$,

有聚束效应。

下面讨论关联双激子的复合辐射光的压缩特性与关联双激子压缩特性的关系。为简明起见, 假定体系是封闭的, 且是单模共振辐射, 在旋转波近似下, 相互作用表象中的唯哈氏量为

$$H = g(D_+ a + a^\dagger D_-), \quad (11)$$

式中 $a^\dagger(a)$ 为复合辐射模的产生(湮没)算符, g 为激子与辐射的有效耦合系数^[11]。假定在初始时刻($t=0$)模 a 和关联双激子是非关联的, 则由 Heisenberg 方程可算得

$$\Delta a_i^2(t) = \Delta a_i^2 + g^2 t^2 (\Delta D_i^2 + 2\langle D_3 \rangle \Delta a_i), \quad (12)$$

设 $t=0$ 时, 模 a 处在相干态, 则有

$$\Delta a_i^2(t) = \frac{1}{4} + g^2 t^2 \left(\Delta D_i^2 + \frac{1}{2} \langle D_3 \rangle \right) \quad (13a)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} g^2 t^2 [1 - \sin \theta \cos(x - \varphi) - \cos \theta]. \quad (13b)$$

由(13)式可以看出, 若 D_1 分量被压缩, 则 $\Delta a_i^2(t) < 1/4$, 即关联双激子的复合辐射光也具有压缩效应。当 $\cos(x - \varphi) = 1$, $\theta = \pi/4$ 时, 压缩效应最大, 压缩量为 $200(\sqrt{2}-1)g^2 t^2\%$ 。不过载流子与电场的带内作用 (g 变小)^[11] 会使压缩效应有所减小。

2. 单激子玻色近似下关联双激子的压缩态

在此情形下 $D_{k_i}^\dagger, D_{k_i}$ 满足玻色子的对易关系

$$[D_{k_i}, D_{k_i}^\dagger] = \delta_{ii}. \quad (14)$$

定义

$$K_+ = D_{k_i}^\dagger D_{k_i}^\dagger, \quad K_- = D_{k_i} D_{k_i}, \quad K_3 = \frac{1}{2} (D_{k_i}^\dagger D_{k_i} + D_{k_i} D_{k_i}^\dagger), \quad (15)$$

则 K_+, K_-, K_3 满足 $SU(1,1)$ 李代数的对易关系

$$[K_3, K_\pm] = \pm K_\pm, \quad [K_+, K_-] = -2K_3. \quad (16)$$

双激子压缩态为

$$|\zeta\rangle_K = \exp \left[\frac{1}{2} \theta (e^{-i\varphi} K_- - e^{i\varphi} K_+) \right] |K, 0\rangle_K, \quad (17)$$

式中 $-\infty \leq \theta \leq \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |K, 0\rangle$ 为双激子的基态。 $|\zeta\rangle_K$ 正是双激子 $SU(1,1)$ 压缩态。

我们知道^[11], 在玻色近似下, 非关联单激子不能形成压缩态, 下面讨论两个单激子间有量子关联的情形。类似(6)式在双激子空间定义

$$D_+ = D_{k_1}^\dagger + e^{ix} D_{k_2}^\dagger, \quad D_- = D_{k_1} + e^{-ix} D_{k_2}, \quad (18)$$

分量 $D_1 = \frac{1}{2}(D_- + D_+)$, $D_2 = \frac{1}{2i}(D_- - D_+)$ 满足对易关系

$$[D_1, D_2] = i, \quad (19)$$

测不准关系为

$$\Delta D_1 \Delta D_2 \geq \frac{1}{2}. \quad (20)$$

由(17)式并利用

$$S^\dagger D_{k_1, k_2} S = D_{k_1, k_2} \cosh \frac{\theta}{2} - D_{k_1, k_2}^\dagger e^{i\varphi} \sinh \frac{\theta}{2} \quad (21)$$

及^[12]

$$K_+ |K, m\rangle = [(m+1)(m+2K)]^{\frac{1}{2}} |K, m+1\rangle, \quad (22a)$$

$$K_- |K, m\rangle = [m(m+2K-1)]^{\frac{1}{2}} |K, m-1\rangle, \quad (22b)$$

$$K_3 |K, m\rangle = (K+m) |K, m\rangle, \quad (22c)$$

$$K_- |K, 0\rangle = 0, \quad (22d)$$

式中 $S = \exp \left[\frac{\theta}{2} (e^{-i\varphi} K_- - e^{i\varphi} K_+) \right]$ $K > 0, m = 0, 1, 2, \dots$ 易得

$$\Delta D_1^2 = K [\cosh \theta - \sinh \theta \cos(x - \varphi)], \quad (23a)$$

$$\Delta D_2^2 = K [\cosh \theta + \sinh \theta \cos(x - \varphi)]. \quad (23b)$$

调整压缩参数使得 $\cos(x - \varphi) = 1$, 则由(23)式得 $\Delta D_1^2 = K e^{-\theta}$. 对双激子 $K = 1/2$, 因此有 $\Delta D_1^2 = \frac{1}{2} e^{-\theta} < \frac{1}{2}$, 即 D_1 分量有压缩效应。且有 $\Delta D_1 \Delta D_2 = 1/2$, 即双激子压缩态同时又是理想态。

从上面的讨论知, 在单激子玻色近似下, 关联双激子有压缩效应, 这种效应来源于两个激子的关联性。这是和单激子不同的地方。比较上面单激子“非玻色近似”和玻色近似的结果可以看出, 若 $\cos(x - \varphi) = 1$, 则两种情形下的双激子压缩态都又是理想态。但在玻色近似下, 若 $\cos(x - \varphi) = 1$, D_1 分量总有压缩效应, 但无极值; 在“非玻色近似”下, D_1 分量在 $\theta = \pi/4$ 时压缩效应最大, 但是否有压缩效应依赖于 θ 值。

在态 $|\zeta\rangle_K$ 上, 单激子的二阶相关函数为

$$g_{D_{k_1}} = \frac{1}{2}. \quad (24)$$

双激子的二阶相关函数为

$$g_D = \frac{2\sinh^4 \frac{\theta}{2} + \frac{5}{2} \sinh^2 \theta + 3(\cosh \theta - 1)}{(\cosh \theta - 1)^2}. \quad (25)$$

显见单激子具有反聚束效应,而双激子具有聚束效应。这与“非玻色近似”的情形一样。

在玻色近似下,单激子不能复合辐射压缩光^[11]。下面看关联双激子的情形,同求(12)式,可得

$$\Delta a_i^2(t) = \Delta a_i^2 + (\Delta D_i^2 - \Delta a_i^2) \sin^2 gt \quad (26a)$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\Delta D_i^2 - \frac{1}{4} \right) \sin^2 gt. \quad (26b)$$

显然 $\Delta a_i^2 < 1/4$, 因为 $\Delta D_i^2 < 1/2$, 即关联双激子的复合辐射光有压缩效应。

前面提到,在单激子玻色近似下,压缩效应来源于两个激子的关联性。这一点不难理解,因为由(16)式可以看出,关联双激子作为一个整体已不再具有玻色性,尽管单个激子具有玻色性,而这种非玻色性恰是压缩效应的来源。后面还要进一步讨论这个问题。

三、空间关联的双激子压缩态

定义空间关联的双激子算符

$$B_+ = D_{k_1}^+ D_{k_2}^+, \quad B_- = D_{k_1} D_{k_2}. \quad (27)$$

(27)式与 $J_{\pm}, K_{\pm}$ 的定义式是一样的,不过此处 B_+ 和 B_- 是作为一个整体算符,双激子的压缩特性及其复合辐射光的压缩特性是由 $B_+(B_-)$ 决定,而不是由 $D_{k_i}^+(D_{k_i})$ 决定。(27)式有点类似于两个独立原子形成一个双原子分子时波函数的叠加。实际上,当两个激子的波函数在空间上有一定重叠时,在一定近似下,两个激子所形成的激子分子的上升和下降算符即可由(27)式表达,对这个问题及有关的问题将另文讨论。类似第二部分,仍分单激子“非玻色近似”和玻色近似两种情形讨论。

1. 单激子“非玻色近似”下关联双激子的压缩态

令

$$B_{\pm} \leftrightarrow J_{\pm}, \quad B_1 \leftrightarrow J_3, \quad (28)$$

则双激子压缩态仍由(5)式给出。由(5)式容易求得

$$\langle \zeta | B_{\pm} | \zeta \rangle = -\frac{1}{2} \sin \theta e^{\mp i \varphi}, \quad (29a)$$

$$\langle \zeta | B_3 | \zeta \rangle = -\frac{1}{2} \cos \theta, \quad (29b)$$

$$\Delta B_1^2 = \frac{1}{4} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi), \quad (29c)$$

$$\Delta B_2^2 = \frac{1}{4} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi). \quad (29d)$$

由(29)式得 B_1 分量被压缩的条件为

$$1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi < |\cos\theta|, \quad (30)$$

当 $\varphi = 0$ 时, 无论 θ 为何值, B_1 分量都被压缩, 当 $\theta = \pi/3$ 时, 压缩效应最大.

双激子在态 $|\zeta\rangle$ 上的二阶相关函数为

$$g_B = \frac{\langle B_+ B_+ B_- B_- \rangle}{|\langle B_+ B_- \rangle|^2} = 0, \quad (31)$$

即空间关联的双激子具有反聚束效应.

空间关联的双激子的复合辐射可通过产生一个光子(假定是单模)和一个末态单激子(假定是“非玻色近似”)实现(在 CuCl 中末态单激子是 Γ_{2T} 激子). 设体系是闭合的, 相互作用表象中体系的唯象哈氏量为

$$H = \chi(B_- D^+ a^+ + B_+ D a), \quad (32)$$

式中 χ 为耦合系数, $D^+(D)$, $a^+(a)$ 分别为末态激子和复合辐射光的上升(下降)算符. 利用 Heisenberg 方程叠代求解精确到 χt 的二阶有

$$a(t) = a - i\chi t B D^+ - \chi^2 t^2 B_+ D_3 a + \chi^2 t^2 D D^+ B_3 a, \quad (33)$$

$$\Delta a_i^2(t) = \Delta a_i^2 + \chi^2 t^2 (\Delta X_i^2 - 2\Delta a_i^2 \langle B_+ B_- D_3 - D^+ D B_3 \rangle) \quad (34a)$$

$$= \frac{1}{4} + \chi^2 t^2 \left(\Delta X_i^2 - \frac{1}{2} \langle B_+ B_- D_3 - D^+ D B_3 \rangle \right), \quad (34b)$$

式中 $\Delta x_i^2 = \frac{1}{4} \langle (B_- D^+ + B_+ D)^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle B_- D^+ + B_+ D \rangle^2$, 并假定 $t = 0$ 时辐射模处在相干态.

变量 $x = x_1 + ix_2$ 的实部 $x_1 = \frac{1}{2}(B_- D^+ + B_+ D)$ 与虚部 $x_2 = \frac{1}{2i}(B_- D^+ - B_+ D)$ 满足对易关系

$$[x_1, x_2] = i(B_+ B_- D_3 - D^+ D B_3), \quad (35)$$

测不准关系为

$$\Delta x_1 \Delta x_2 \geq \frac{1}{2} |\langle B_+ B_- D_3 - D^+ D B_3 \rangle|. \quad (36)$$

x_i 分量被压缩的条件为

$$\Delta x_i^2 < \frac{1}{2} |\langle B_+ B_- D_3 - D^+ D B_3 \rangle|. \quad (37)$$

由(34)式知, 若 x_1 分量被压缩, 则 $a_i(t)$ 分量也被压缩. 因 $\Delta B_i^2 < \frac{1}{2} |\langle B_3 \rangle|$ 并不能保证(37)式成立, 所以空间关联双激子有压缩效应并不能保证其复合辐射光也有压缩效应. 不准备对此问题作详细讨论, 下面给出特殊情形下的说明. 假定 $|\langle D^+ D \rangle| \approx |\langle D^{+2} \rangle| \approx |\langle D^2 \rangle| \approx d^2$, $|\langle D^+ \rangle| \approx |\langle D \rangle| \approx d$, 则

$$\Delta x_i^2 = d^2 \Delta B_i(\varphi_D) - \frac{1}{2} \langle B_+ B_- D_3 \rangle, \quad (38)$$

式中 $\varphi_D = \arg(D)$. 将(38)式代入(34)式得

$$\Delta a_i^2(t) = \frac{1}{4} - \chi^2 t^2 \langle B_+ B_- D_3 \rangle + \chi^2 t^2 d^2 \left(\Delta B_i^2(\varphi_D) + \frac{1}{2} \langle B_3 \rangle \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \chi^2 r^2 |\langle B_+ B_- D_3 \rangle| + \chi^2 r^2 d^2 \left(\Delta B_1^2(\varphi_D) + \frac{1}{2} \langle B_3 \rangle \right). \quad (39)$$

由(39)式知, $\Delta B_1^2(\varphi_D) < \frac{1}{2} |\langle B_3 \rangle|$ 并不能保证 $\Delta a^2(t) < 1/4$, 要使 $a_2(t)$ 分量有压缩效应, 须关联双激子有较大的压缩效应, 即须

$$\Delta B_1^2(\varphi_D) < \frac{1}{2} |\langle B_3 \rangle| - 1/d^2 |\langle B_+ B_- D_3 \rangle|. \quad (40)$$

这是与量子关联双激子不同的。

2. 单激子玻色近似下关联双激子的压缩态

令

$$C_{\pm} \longleftrightarrow K_{\pm}, \quad C_3 \longleftrightarrow K_3, \quad (41)$$

则单激子玻色近似下空间关联双激子的压缩态仍由(17)式给出。

由(17)(21)和(22)式易得

$$\langle C_{\pm} \rangle = -K \sinh \theta e^{\mp i \varphi}, \quad (42a)$$

$$\langle C_3 \rangle = K \cosh \theta, \quad (42b)$$

$$\Delta C_1^2 = \frac{1}{2} K (1 + \sinh^2 \theta \cos^2 \varphi), \quad (42c)$$

$$\Delta C_2^2 = \frac{1}{2} K (1 + \sinh^2 \theta \sin^2 \varphi). \quad (42d)$$

测不准关系为

$$\Delta C_1 \Delta C_2 \geq \frac{1}{2} |\langle C_3 \rangle|. \quad (43)$$

由(42)和(43)式知, 若

$$1 + \sinh^2 \theta \cos^2 \varphi < \cosh \theta, \quad (44)$$

则 C_1 分量被压缩。当 $\varphi = \pi/2$ 时, 对任意 θ 值, (44)式都成立, 即 C_1 分量有压缩效应。

类似前面的讨论, 可得

$$\Delta a_1^2(t) = \frac{1}{4} + \chi^2 r^2 \left(\Delta x_1^2 - \frac{1}{4} \langle 2C_3 D^+ D - C_+ C_- \rangle \right). \quad (45)$$

同(34)式, 在计算(45)式时假定了在初始时刻, $C_{\pm}, D, a$ 非关联, 且 $D(D^+)$ 作了玻色近似。变 $x = C_- D^+ = x_1 + i x_2$ 的实部和虚部满足对易关系

$$[x_1, x_2] = i \left(C_3 D^+ D - \frac{1}{2} C_+ C_- \right). \quad (46)$$

显然当 $\Delta x_1^2 < \frac{1}{4} |\langle 2C_3 D^+ D - C_+ C_- \rangle|$ 时, x_1 分量被压缩。由(45)式知, 若复合辐射光有压缩效应, 须 x_1 分量有压缩效应。但 $\Delta C_1^2 < \frac{1}{2} |\langle C_3 \rangle|$ 并不能保证 x_1 分量有压缩效应,

即保证复合辐射光有压缩效应。这可由下面的讨论得出。假定末态激子在初始时刻处在相干态 $D|d\rangle = d|d\rangle$, 则(45)式变为

$$\Delta a_i^2(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \chi^2 t^2 \langle C_+ C_- \rangle + \chi^2 t^2 d^2 \left(\Delta C_i^2(\varphi_D) - \frac{1}{2} \langle C_3 \rangle \right). \quad (47)$$

显然 $\Delta C_i^2(\varphi_D) < \frac{1}{2} \langle C_3 \rangle$ 并不能保证 $\Delta a_i^2(t) < 1/4$. 要使复合辐射光有压缩效应, 须满足

$$\Delta C_i^2(\varphi_D) < \frac{1}{2} \langle C_3 \rangle - \frac{1}{2d^2} \langle C_+ C_- \rangle. \quad (48)$$

从上面的讨论可以看出, 压缩的力学体系并不一定能产生压缩光, 这是与第二部分所讨论的情形不同的. 因为本节所讨论的过程是非线性过程, 而第二节所讨论的过程是线性过程.

在态 $|\zeta\rangle_K$ 上, 双激子的二阶相关函数为

$$g_c = \frac{\langle C_+ C_+ C_- C_- \rangle}{|\langle C_+ C_- \rangle|^2} = \frac{2K+1}{K} \frac{\tanh^4 \frac{\theta}{2} + 2(2K+1)\tanh^2 \frac{\theta}{2} + K(2K+1)}{\left(\tanh^2 \frac{\theta}{2} + 2K \right)^2}. \quad (49)$$

当 $K = 1/2$ 时, $g_c = 4 \left[1 + 2 \tanh^2 \frac{\theta}{2} / \left(\tanh^2 \frac{\theta}{2} + 1 \right)^2 \right] > 1$, 即空间关联双激子有聚束效应. 与单激子“非玻色近似”的情形不同.

四、双激子玻色近似与 $SU(2)$ 群及 $SU(1,1)$ 群的收缩

单激子玻色近似相当于 $SU(2)$ 群到谐振子群的收缩^[11]. 这种收缩的结果使单激子及其复合辐射光的压缩效应消失. 对双激子亦有类似的情形. 下面仍分两种情形讨论.

1. 单激子“非玻色近似”下双激子的玻色近似与 $SU(2)$ 群的收缩

令

$\mathbf{A} = A, A^+, A_3(A^+A), A_0$ (单位元), 为谐振子李代数的生成元, 则 $SU(2)$ 的生成元 $\mathbf{J} = J_+, J_-, J_3, J_0$ (单位元) 通过一个奇异变换可变换为 $\mathbf{A}$ ^[11], 即 $SU(2)$ 群可变换为谐振子群. (详细讨论见文献[14, 11]). 在本文中, 这种收缩相当于双激子玻色近似, 因为文献[11]中

$$\lim_{c \rightarrow 0} {}_J \langle \zeta | C^2 J_3 | \zeta \rangle_J = -\frac{1}{2}, \quad (50)$$

这正是 $J_3(B_3)$ 略去 $D_{k_1}^+ D_{k_1} + D_{k_2}^+ D_{k_2}$ 项的结果, 这恰是本文中所讲的双激子玻色近似. 下面列出这种收缩对前面所讨论结果的影响.

(5)式变为

$$\lim_{c \rightarrow 0} |\zeta\rangle = |\alpha\rangle = (1 + |\alpha|^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - \alpha D_{k_1}^+ D_{k_1}^+) |0\rangle, \quad (51)$$

式中 $\alpha = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\theta}{2C} e^{i\varphi}$.

(7)式变为

$$[D_1, D_2] = -i, \quad (52)$$

(8)式变为

$$\langle D_3 \rangle = \frac{2|\alpha|^2}{1+|\alpha|^2} - 1 \rightarrow -1, \quad (53a)$$

$$\Delta D_1^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2|\alpha|}{1+|\alpha|^2} \cos(x-\varphi) \right) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad (53b)$$

$$\Delta D_2^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2|\alpha|}{1+|\alpha|^2} \cos(x-\varphi) \right) \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (53c)$$

(10)式变为

$$g_{D_{k_i}} = \frac{1}{|\alpha|^2} \rightarrow \infty. \quad (54)$$

可以看出,量子关联的双激子作为一个整体若呈玻色特性,则其压缩效应消失,进而复合辐射光的压缩效应也消失.单激子的反聚束效应也同时消失.

对空间关联的双激子有

$$\langle B_3 \rangle = -\frac{1}{2}, \Delta B_1^2 = \Delta B_2^2 = \frac{1}{4}, g_B = 1, \quad (55)$$

压缩效应和反聚束效应消失.

2. 单激子玻色近似下双激子的玻色近似与 $SU(1,1)$ 群的收缩

$SU(1,1)$ 群的生成元 K 通过奇异变换可变换为 A (见附录),即 $SU(1,1)$ 群收缩到谐振子群. 因为

$$\lim_{c \rightarrow 0} \kappa \langle \zeta | C^2 K_3 | \zeta \rangle_K = \frac{1}{2}, \quad (56)$$

所以这种收缩相当于双激子的玻色近似,因 K_3 略去 $D_{k_1} D_{k_2} + D_{k_2}^+ D_{k_1}^+$ 项即为(56)式的结果. 这种收缩使得

(17)式变为双激子 Glauber 相干态波函数

$$|\alpha\rangle = \lim_{c \rightarrow 0} |\zeta\rangle_K = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha D_{k_1}^+ D_{k_2}^+} |0\rangle, \quad (57)$$

式中 $\alpha = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\theta}{2C} e^{i\varphi}$.

(23)式变为

$$\Delta D_1^2 = \frac{1}{2} (1 - 2|\alpha| \cos(x-\varphi)) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad (58a)$$

$$\Delta D_2^2 = \frac{1}{2} (1 + 2|\alpha| \cos(x-\varphi)) \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (58b)$$

(24)和(25)式变为

$$g_{D\mathbf{k}_i} = 1, g_D \rightarrow \infty. \quad (59)$$

压缩效应和反聚束效应消失.

对空间关联的双激子有

$$\Delta C_1^2 = \Delta C_2^2 = \frac{1}{2} |\langle C_1 \rangle| = \frac{1}{4}. \quad (60)$$

压缩效应也消失.

从本节的讨论看出,在双激子玻色近似下,不论是量子还是空间关联的双激子,不论是在单激子“非玻色近似”和玻色近似下,双激子作为一个整体因呈“完全”的玻色特性而压缩效应和反聚束效应消失,进而复合辐射光的压缩效应也自然消失.

五、结 论

在单激子“非玻色近似”下,双激子压缩态是 $SU(2)$ 压缩态.处在此态的量子关联的双激子可具有压缩效应和聚束效应,而单激子是反聚束效应,且压缩的双激子一定产生压缩光.处在此态的空间关联的双激子也可具有压缩效应,但压缩的双激子不一定复合辐射压缩光,只有在压缩效应较大时才复合辐射压缩光.在此态上,空间关联的双激子呈反聚束效应.双激子的玻色近似相当于 $SU(2)$ 群到谐振子群的收缩,这种收缩使有关量的压缩效应和反聚束效应消失.

在单激子玻色近似下,双激子压缩态是 $SU(1,1)$ 压缩态,除了空间关联双激子呈聚束效应外,其它讨论完全类似于 $SU(2)$ 压缩态.双激子玻色近似相当于 $SU(1,1)$ 群到谐振子群的收缩,这种收缩,类似于 $SU(2)$ 群的收缩,使得一切非经典效应消失.

附 录

$SU(1,1)$ 群到谐振子群的收缩

谐振子李代数的生成元为 $A^+, A^-, A^+ A^- = A_1, A_0$ (单位元), K_+, K_-, K_3, K_0 为 $SU(1,1)$ 的生成元,收缩由下列变换实现:

$$\begin{bmatrix} A^+ \\ A^- \\ A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2C^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_+ \\ K_- \\ K_3 \\ K_0 \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

当 $C \rightarrow 0$ 时,变换是奇异的,但下面的对易关系是确定的:

$$[A_1, A^\pm] = \pm A^\pm, [A^-, A^+] = 2C^2 A_1 + A_0, [A_1, A_0] = 0, \quad (A.2)$$

且有

$$\begin{aligned} A^\pm &= \lim_{C \rightarrow 0} C K_\pm, \quad A_1 = \lim_{C \rightarrow 0} \left(K_3 - \frac{1}{2C^2} K_0 \right), \\ \alpha &= \lim_{C \rightarrow 0} \frac{\theta}{2C} e^{i\varphi}, \quad \alpha^* = \lim_{C \rightarrow 0} \frac{\theta}{2C} e^{-i\varphi}, \end{aligned} \quad (A.3)$$

而

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left(K, -\frac{1}{2C^2} \right) |K, 0\rangle = \lim_{c \rightarrow 0} \left(K - \frac{1}{2C^2} \right) |K, 0\rangle, \quad (\text{A.4})$$

取基态能量为零,则有

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left(K - \frac{1}{2C^2} \right) = 0. \text{ 即当 } C \rightarrow 0 \text{ 时, } 2KC^2 = 1.$$

下面给出收缩的几个例子.

例 1: $m=n$ 一定时,有

$$A_+ |n\rangle = \lim_{c \rightarrow 0} \left(K_+ - \frac{1}{2C^2} \right) |K, m\rangle = \lim_{c \rightarrow 0} \left(K - \frac{1}{2C^2} + m \right) |K, m\rangle = n |n\rangle, \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} A^+ |n\rangle &= \lim_{c \rightarrow 0} (K_+ |K, m\rangle = \lim_{c \rightarrow 0} [(m+1)(mC^2 + 2KC^2)]^{1/2} |K, m+1\rangle \\ &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} A_- |n\rangle &= \lim_{c \rightarrow 0} (K_- |K, m\rangle = \lim_{c \rightarrow 0} [m(mC^2 - C^2 + 2KC^2)]^{1/2} |K, m-1\rangle \\ &= \sqrt{n} |n-1\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

例 2: $SU(1,1)$ 压缩态收缩到 Glauber 相干态,

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \lim_{c \rightarrow 0} |\xi\rangle_K = \lim_{c \rightarrow 0} \left(1 - \tanh \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \right)^K \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(m+2K)}{m! \Gamma(2K)} \right]^{1/2} \left(-\tanh \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \right)^m |K, m\rangle \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \left(1 - C^2 \frac{\theta^2}{2C^2} \right)^{1/2C^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(m-1+2K)(m-2+2K)\cdots(m-m+2K)C^{2m}}{m!} \right]^{1/2} \\ &\quad \times \left(-\frac{\theta}{2C} e^{i\varphi} \right)^m |K, m\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha A^\dagger} |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

- [1] Squeezed States of the Electromagnetic Field, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**(1987), (special issue); Squeezed Light, *J. Mod. Opt.*, **34**(1987), (special issue). Squeezing is Reviewed by R. Loudon and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.*, **34**(1987), 709.
- [2] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz and J. F. Valley, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2409.
- [3] R. M. Shelby, M. D. Levenson, S. H. Perlmutter, R. G. DeVoe and D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 691.
- [4] L. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall and H. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 2520.
- [5] M. G. Raizen, L. A. Orozco, M. Xiao, T. L. Boyd and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 198; L. A. Orozco, M. G. Raizen, Min Xiao, R. J. Brecha and H. J. Kimble, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**(1987), 1490.
- [6] A. Heidmann, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre and G. Camy, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 2555.
- [7] K. Wódkiewicz and J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(1985), 458.
- [8] S. M. Barnett and M. -A. Dupertuis, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**(1987), 505.
- [9] D. F. Walls and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 709.
- [10] P. L. Knight, *Phys. Scr.*, **T12**(1986), 51.
- [11] 黄洪斌, 物理学报, **38**(1989), 1958.
- [12] H. M. Nussenzveig, Introduction to Quantum Optics, London, Gordon and Breach, (1973).
- [13] B. L. Schumaker and C. M. Caves, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 3068, 3093.
- [14] A. Heidmann, J. M. Raimond and S. Reynaud, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 326.
- [15] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, *Phys. Rev.*, **A6**(1972), 2211.

TWO-EXCITON SQUEEZED STATES AND ITS RECOMBINATION RADIATION IN SEMICONDUCTOR

HUANG HONG-BIN

Department of Physics, Southeast University, Nanjing, 210018

(Received 23 February 1990)

ABSTRACT

This paper introduces two-exciton squeezed states. For the two cases of “non-Bose” and Bose approximations of one-exciton, the squeezings and the second correlations of quantum and space correlated pairs of excitons, and the squeezings of its recombination radiations are discussed. It is shown that, in these two cases, the Bose approximations of the two-exciton correspond to the contractions of group $SU(2)$ and group $SU(1,1)$ to the group of harmonic oscillator, respectively. The influences of the contractions on the squeezings and correlations of the two-exciton are also given.

PACC: 7135; 4250