

非线性漂移波在行波扰动下的 绕数分岔与超级结构

贺 凯 芬

北京师范大学低能核物理研究所, 北京, 100875

A. SALAT

Max-Planck Institute of Plasma Physics, F.R.G.

1989 年 3 月 7 日收到

在文献[1]中, 数字计算揭示出在时空周期场驱动下, 有阻尼的非线性漂移波方程其分岔图显示出某种标度的超级结构. 本文指出, 漂移波方程的扰动解与未扰系统的解之间的共振和因此而引起的绕数分岔, 是出现这种超级结构的原因. 由此计算的波数与频率之间的标度关系, 与数字实验结果符合.

PACC: 5235

一、引 言

在非均匀的磁化等离子体中允许有漂移波传播. 漂移波的色散与非线性效应平衡时, 可以产生相干结构, 例如, 在存在温度梯度时, 空间一维的非线性漂移波方程有类似孤波形式的解^[2]. 由于这些性质, 特别是在托卡马克实验上观察到漂移波湍流谱, 漂移波方程引起了许多人的兴趣. 前些年因重整化理论未能成功解释实验观测到的频谱, 一些作者提出了关于湍流的孤子气模型, 把漂移波湍流看成是由大量孤立子组成的体系^[4]. 因此, 深入研究漂移波方程的动力学性质就显得更为必要. 在文献[1,3]中数字研究了非线性漂移波方程在行波扰动下的一个模型. 本文对其结果作了进一步的分析.

二、参量空间中的超级结构和绕数分岔

在文献[1,3]中研究了空间一维非线性漂移波在时空周期场扰动下的动力学性质. 在空间周期 2π 的边界条件下, 数字求解了下列方程:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2 \partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\gamma \phi - \varepsilon \sin(\kappa y - \Omega t). \quad (1)$$

这里已对电子采用了绝热近似, $n_e(\mathbf{r}, t) = n(x) \exp[e\phi(\mathbf{r}, t)/T_e(x)]$. 方程(1)等号右边第 1 项为线性阻尼, 第 2 项描写例如电磁波的扰动, 或者其它不由该方程描写的孤立波

的模式扰动。混合导数项来自电子的极化漂移,物理上要求 $a < 0$ 。 c 为线性漂移速度, f 描写因等离子体电子温度 ($T_e(x)$) 梯度引起的非线性效应的大小。

在一个空间周期中波的能量定义为

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[\phi^2(y, t) - a \left(\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial y} \right)^2 \right] dy. \quad (2)$$

没有扰动时 ($\gamma = \varepsilon = 0$), $E(t)$ 为运动常数。

当用振幅不大的未扰系统的孤波解 $\phi_0(y, t)$ 作为初始条件时,以 $t \rightarrow \infty$ 时能量 $E(t)$ 的行为(定态、周期、准周期、混沌)来区分,文献[1]得到了在 (Q, ε) 参量空间中方程(1)的动力学行为的概图。可见随着 Q 减小,出现一系列尺度和间隔不断减小的“元胞”。在元胞之内如何分岔还有待于数字计算的精细研究^[1],本文要讨论的首先是这种超级结构出现的原因。

下面讨论限于 $E(\infty)$ 是定态的情形,图1中有复杂分岔行为的超级结构的根源,在能量为定态时就可以找到。这时方程的解是行波, $\phi(y, t) = \phi(\kappa y - Q t)$,在图1中用圆点·表示。

文献[1]中已说明,每个元胞都有一条分岔线“支撑”,它们大约从每个元胞的两个指状突起之间穿入元胞中部。在图1中两个较大元胞处相应的分岔线已用虚线画出。当参数 (Q, ε) 的值从右下方跨越这条线时,波的定态能量 E ,突然从滞后回线(hysteresis)的下半分支跳跃到上半分支(见文献[1]中图1(a)),相应的电势 ϕ 的波形和频谱也发生突变。以图1中右边第一元胞下方能量定态的情形为例,在分岔线(虚线)的右下方,频谱 $\phi(\omega)$ 中除主频 Q 外,谐波中以 $n = 2$ 的强度最大,甚至可以超过 $n = 1$ 的峰(图2(a)),波形 $\phi(y)$ 有2个驼峰,相图 $\phi(0) - d\phi(0)/dy$ 有2周(见文献[1]中图12(a),图14(a))。在定态能量出现跃迁时(跨越第一条分岔线), $n = 2$ 的强度突然减弱, $n = 3$ 峰陡然增强,远高于 $n = 2$ 的峰(图2(b))。相应地, $\phi(y)$ 由2个驼峰突变为3个驼峰,相图 $\phi(0) - d\phi(0)/dy$ 由2周($n = 2$ 的相)突变为3周($n = 3$ 的相)。依次地,在跨越右边第二个元胞下方的分岔线时,电势 ϕ 从 $n = 3$ 的相突变为 $n = 4$ 的相(图2(c));……以后,沿 Q 减小的方向,每跨越一个新的分岔线时, $\phi(\omega)$ 的次主峰向高频推进一位($n \rightarrow n + 1$), $\phi(y)$ 的驼峰增加一个,相图 $\phi - d\phi/dy$ 增加一周。图3给出几个不同 (Q, ε) 值时的相图,它们是能量已达定态时画的(固定 $y = 0$,每隔小时间间隔 Δt 记录 $\phi(0)$ 和 $d\phi(0)/dy$)。在 (Q, ε) 值刚刚跨过分岔线的一个例子中,还曾记录过包括瞬态行为在内的结果,即从 $t = 0$ 开始,每隔 Δt 记录下 $\phi(0)$ 和 $d\phi(0)/dy$,一直到定态。在这样得到的图中可以清楚地看到,波曾经短时间经过 $n = 2$ 的相,这时相点散布在一个2周的极限圈附近,然后突然离开它,被吸引到另一个极限圈,

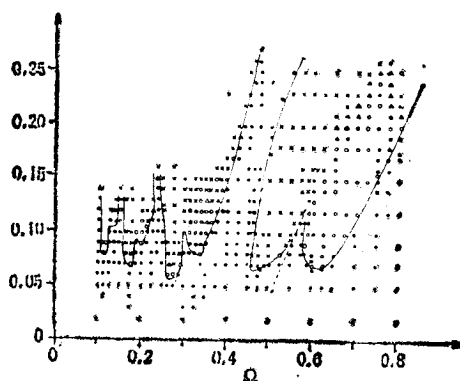


图1 能量 $E(t)$ 的渐近行为作为参数 (Q, ε) 的函数的概图
●表示能量的定态;○为单周期;×为混沌;△为单周期与混沌之间的过渡状态;计算中使用的参数为 $a = -0.28711$; $c = 1$; $f = -6$; $\gamma = 0.1$; 初始条件见文献[1]

在它的右边尖角处开始发展第 3 周 (见图 3(a)), 即 $n=3$ 的相, 相应的能量也跳跃到滞后的上半分支. 称这个波形突变现象为“绕数分岔”, 参量空间中的超级结构就是由 $d\phi/dy$ 这个分岔引起的.

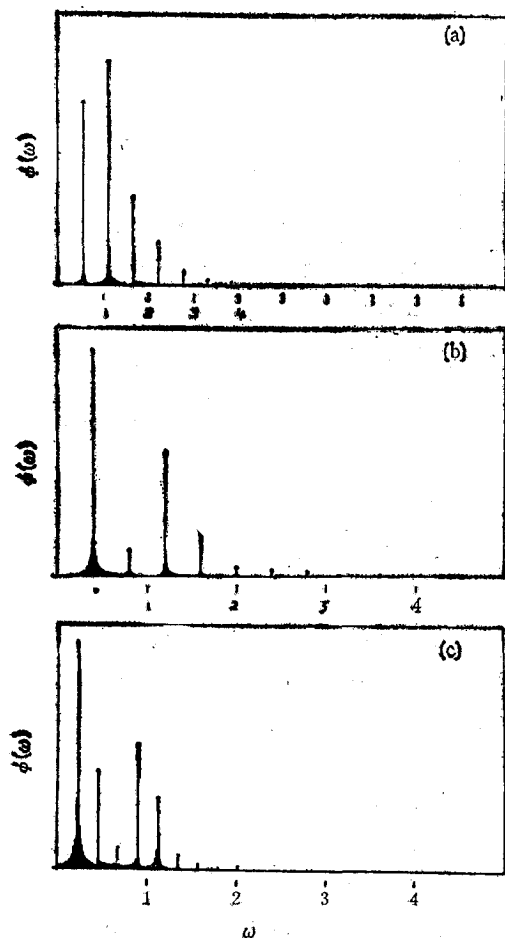


图 2 能量为定态时电势的频谱 $\phi(\omega)$

(a) 为 $\Omega = 0.55, \varepsilon = 0.07$; (b) 为 $\Omega = 0.4, \varepsilon = 0.1$; (c) 为 $\Omega = 0.225, \varepsilon = 0.1$

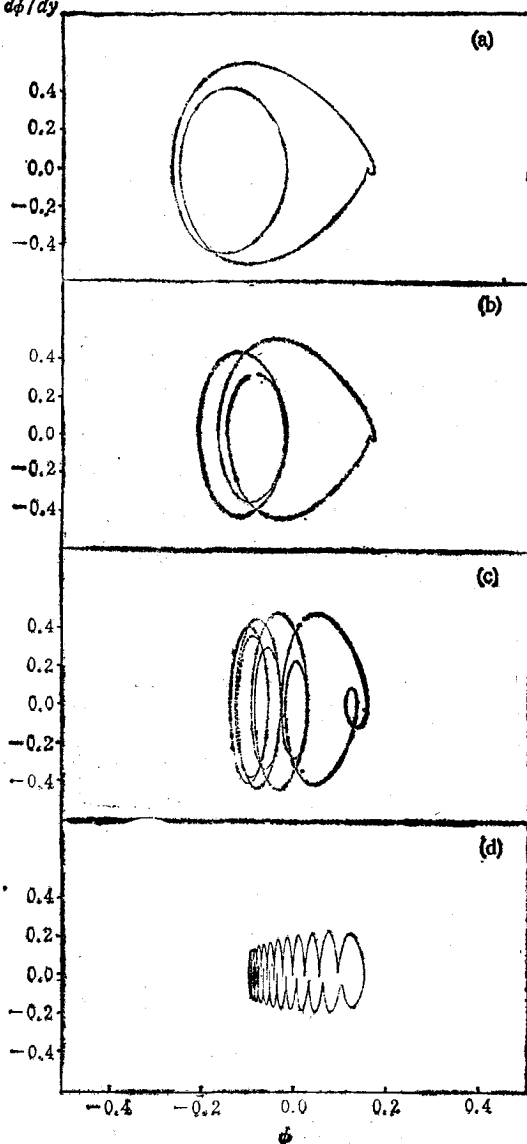


图 3 能量为定态时的相图 $\phi - d\phi/dy$

(a) 为 $\Omega = 0.4, \varepsilon = 0.1$; (b) 为 $\Omega = 0.225, \varepsilon = 0.1$; (c) 为 $\Omega = 0.05, \varepsilon = 0.1$; (d) 为 $\Omega = 0.005, \varepsilon = 0.1$

三、扰动解与未扰解的共振, 标度关系

这一节将分析说明, 上述绕数分岔现象是由于方程(1)的行波解与未扰动的漂移波方

程 ($\gamma = \varepsilon = 0$) 的解共振引起的. 如上节指出的, 在能量为定态时, 方程(1)的解为行波, 其波速与外加行波的速度相等, $\phi(y, t) = \phi(\kappa y - \Omega t)$ (与图 1 参数一致, 下面取 $\kappa = 1$). 一般地, 扰动解可展开为

$$\phi(y - \Omega t) = \sum_n A_n e^{ik_n(y - \Omega t)}. \quad (3)$$

另一方面, 未扰系统具有行波形式的解 $\phi_0(y, t)$ 允许有不同的波速. 但可以推测, 能与(3)式发生共振的必然有与它相同的波速. 因此要寻求 $\phi_0(y, t) = \phi_0(\xi \equiv y - \Omega t)$ 形式的解. 这时未扰方程化为

$$-\Omega \frac{d\phi_0}{d\xi} - a\Omega \frac{d^3\phi_0}{d\xi^3} + c \frac{d\phi_0}{d\xi} + f\phi_0 \frac{d\phi_0}{d\xi} = 0. \quad (4)$$

两次积分后得

$$\sqrt{\frac{f}{3a\Omega}} d\xi = \frac{d\phi_0}{\sqrt{\phi_0^3 + \frac{3}{f}(c - \Omega)\phi_0^2 + g\phi_0 + e}}, \quad (5)$$

g, e 为两个积分常数. 方程(5)满足周期边界条件的一个孤波解为

$$\phi_0(y - \Omega t) = (\varphi_b - \varphi_a) \operatorname{sn}^2[C_s(y - \Omega t), q] + \varphi_a. \quad (6)$$

这里

$$C_s \equiv \sqrt{\frac{f(\varphi_c - \varphi_a)}{12a\Omega}} \quad (7)$$

和

$$q \equiv \sqrt{\frac{\varphi_b - \varphi_a}{\varphi_c - \varphi_a}}, \quad (8)$$

式中 $\varphi_a \leq \phi_0 \leq \varphi_b \leq \varphi_c$, $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ 为(5)式等号右边分母的零点, 与初始条件有关, 并满足

$$\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c = \frac{3(\Omega - c)}{f}. \quad (9)$$

(6)式虽然在形式上类似于 KdV 方程在周期边界条件下的解, 但却有重要差别. 差别之一是, C_s 依赖于波的传播速度 Ω , 因此, 不仅解的振幅而且空间周期 ($2\pi/C_s$) 也依赖于波速. 而对 KdV 方程, $\partial^3/\partial y^2 \partial t \rightarrow \partial^3/\partial y^3$, 相应于 C_s 的量不直接依赖于 Ω , 所以 KdV 孤波解的空间周期与波速没有直接关系 (仅通过 φ_c, φ_a 与之相关). 由此, 并结合下面的分析, 可以理解为什么在同样扰动下的 KdV 方程虽然也出现了定态能量的滞后回线^[3], 却没有观察到类似漂移波方程的标度关系.

未扰系统的孤波解(6)式可以展开为^[6]

$$\phi_0(y - \Omega t) = (\varphi_b - \varphi_a) \frac{1}{q^2} \left\{ \frac{K - E}{K} - \frac{\pi^2}{K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos [n\pi C_s(y - \Omega t)/K]}{\operatorname{sh}(n\pi K'/K)} \right\} + \varphi_a, \quad (10)$$

式中 $K(q)$ 和 $E(q)$ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分,

$$K'(q) = K(\sqrt{1 - q^2}).$$

(10)式表明, 未扰系统存在一个本征波数 $k_0 \equiv \pi C_s/K(q)$ (或本征频率 $\pi C_s \Omega/K(q)$, 在

行波条件下,两者仅相差因子 Ω).如果方程(1)的行波解(3)式的谐波 k_n 与这个本征波数(或频率)发生共振,则共振条件为

$$k_n = \frac{\pi C_s}{K(q)}. \quad (11)$$

这是一种二次共振.

现在讨论决定本征波数 $\pi C_s/K(q)$ 的条件.参数 $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ 中,扰动解 $\phi(y - \Omega t)$ 与未扰解 ϕ_0 的波速相等和波数共振给出两个限定条件(9)和(11)式,这样

$$k_n = \frac{\pi}{K(q)} \sqrt{\frac{3(\Omega - C) - f(\varphi_b + 2\varphi_a)}{12a\Omega}}. \quad (12)$$

第三个条件不易解析得出,合理的假设是,共振发生时扰动解的振幅应和与它共振的未扰解的幅度有关,后者也依赖于 φ_a, φ_b .于是,在弱非线性时,可设 $|f\varphi_{a,b}| \ll |c|$ 及 $q \ll 1$, $K(q) \rightarrow \pi/2$.利用(12)式,在 $\Omega \rightarrow 0$ 时找到发生共振的谐波波数随频率的变化为

$$k_n \propto \frac{1}{\sqrt{\Omega}}. \quad (13)$$

这和数字计算得到的定标一致.其物理意义是,当 $\Omega \rightarrow 0$ 时,未扰孤波解的空间周期以 $\Omega^{-1/2}$ 减小,因此它只能渐次地与扰动解 ϕ (3)式的更高级的谐波发生共振.而对KdV方程,如上所述,不存在这样的性质.

下面讨论共振发生的临界频率.先考虑 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的情形,这时 $\varphi_a = \varphi_b = 0$ 应给出在 $\varepsilon = 0$ 轴上的共振临界频率 $\Omega_n(0)$.由(9),(11)式,得波数为 n 的临界频率为

$$\Omega_n(0) = \frac{c}{1 - an^2}. \quad (14)$$

用图1的参数, $a = -0.28711$, $c = 1$,对于 $n = 2, 3, 4, 5$,分别得到 $\Omega_n(0)$ 为0.465, 0.279, 0.178, 0.122.如果将图1中各元胞对应的绕数分岔线延长至 $\varepsilon = 0$ 轴,交点的 Ω 值与上面计算的结果符合得很好.

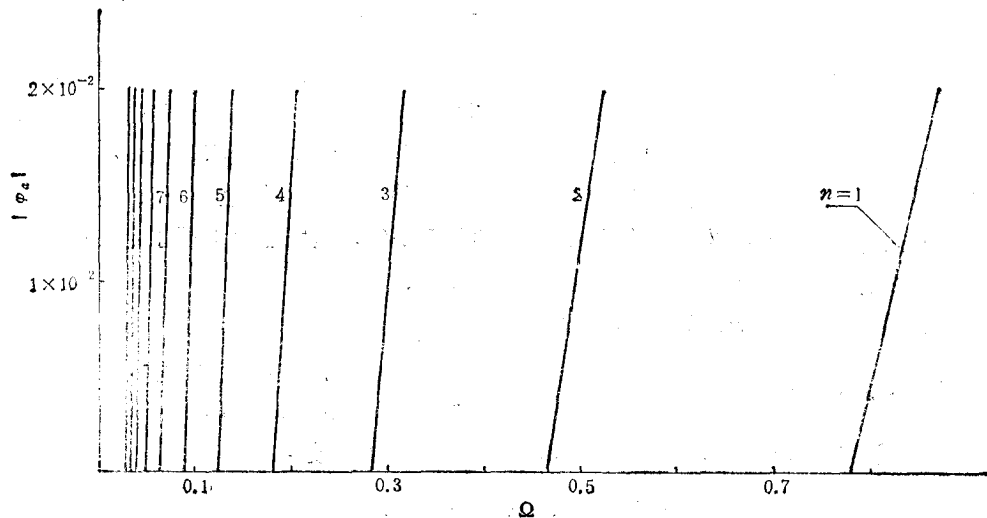


图4 从共振条件计算的对应于不同 n 值, $|\varphi_a|$ 作为 Ω 的函数 只画了 $\varphi_a < 0$ 的部分

进一步试图讨论 (Q, ε) 图上的分岔线. 在 ε 不大时, 能量定态时电势的水平大体上和它成正比, 如从滞后的下半分支可以看到, 在 ε 相当大的范围内近似有 $\varepsilon \propto E_1^{1/2}$. 这样, φ_a, φ_b 不为零时临界频率 Q_c 的变化, 定性上应与分岔线走向一致. 从(11)式可得

$$\varphi_b = \varphi_a + \frac{12aQ}{f} \frac{n^2}{\pi^2} q^2 K^2(q) \quad (15)$$

或

$$\varphi_c = \varphi_a + \frac{12aQ}{f} \frac{n^2}{\pi^2} K^2(q). \quad (16)$$

代入(9)式, 得到在共振时应满足

$$\varphi_a = \frac{Q - c}{f} - \frac{4aQ}{f} \frac{n^2}{\pi^2} (1 + q^2) K^2(q). \quad (17)$$

在 $q \ll 1$ 近似下,

$$\varphi_a \approx \frac{1}{f} [-c + (1 - an^2)Q]. \quad (18)$$

根据(18)式在图4上画出 $n = 1$ 至 11 时 $|\varphi_a|$ 作为 Q 的函数, $Q \rightarrow 0$ 时还有无穷多条分岔线没有画出. 此外, 只画了共振线的 $\varphi_a < 0$ 部分, 在 $Q > 0.78$ 时这是唯一可能的选择. 可以看到, 图4的分岔线与图1的分岔线的标度、走向都一致, 且在小 n 时更为倾斜, 这在定性上也与图1一致. 在图1上 $Q > 0.8$ 处是否可以找到一个对应于 $n = 1$ 的元胞还有待研究. 共振线 $\varphi_a > 0$ 的部份没有在图4上画出, 它们向另一方向倾斜, 并可与 $Q = 0$ 轴相交. 数字实验表明, $Q < 0$ 与 $Q > 0$ 时的动力学行为不对称, 在 $Q < 0$ 时, 能量出现非定态解的临界 ε 值迅速上升, 这时观察到的混沌行为可能与聚集在 $Q \rightarrow +0$ 的无穷多(对应于 $\varphi_a > 0$ 的)分岔线延伸到 $Q < 0$ 的区有关. 这样, 混沌区以超级结构的形式分布在 $Q \sim -0 - c$ 附近的扇形区域内. 可以看到, 非零的漂移速度 c 在出现混沌行为方面起重要作用. 而在 KdV 方程的情况下, 它可以通过简单的平移变换消去.

需要说明的是, 在导出(18)式时, 用了 $q \ll 1$ 的条件, 现在还不清楚使用这个条件的根据, 需要进一步研究.

四、讨 论

本文讨论了在时空周期场扰动下, 漂移波方程的解的动力学行为在参量空间中显示的超级结构和绕数分岔, 指出这是扰动解与未扰系统的解共振所引起的. 根据共振条件计算的解的特征谐波波数随频率变化的标度关系, 与数字实验符合得很好. 对绕数分岔的分岔线也作了定性分析. 同时说明了在同样扰动下 KdV 方程不显示类似标度关系的原因.

本文的系统与 Duffing 方程有密切关系. 事实上, 如果仅略去耗散项 ($\gamma = 0$), 并假设行波解 $\phi = \phi(\xi = y - Qt)$, 方程(1)仍可积分一次, 化作一个在周期外力驱动下的有三次势的 Duffing 方程类型的哈密顿系统

$$H(\phi, P, \xi) = \frac{P^2}{2} - \frac{1}{aQ} \left[\frac{1}{2} (c - Q)\phi^2 + \frac{f}{6} \phi^3 \right] + \frac{\varepsilon}{aQ} \phi \cos \xi. \quad (19)$$

在重新加入适当的耗散项后,得到

$$\frac{d\phi}{d\xi} = P, \quad (20)$$

$$\frac{dP}{d\xi} = \frac{1}{aQ} \left\{ (c - Q)\phi + \frac{f}{2} \phi^2 \right\} - \frac{\varepsilon}{aQ} \cos \xi + \frac{\gamma}{aQC_s^2} P. \quad (21)$$

代替(1)式中的 $\gamma\phi$, (21) 式等号右边以 γP 作为阻尼,因此在系数中引入了 C_s^{-2} .

在无扰动 ($\gamma = \varepsilon = 0$) 时, (20), (21) 式的一个解就是(6)式(一般地, H 还含有 ϕ 的一次项)在 $q \rightarrow 1$ ($\varphi_b = \varphi_c$) 的极限下,它趋于孤立子解(即分界线, separatrix)

$$\phi_{xx}(\xi) = \varphi_c - (\varphi_c - \varphi_a) \operatorname{sech}^2[C_s(\xi - \xi_0)]. \quad (22)$$

由此可以计算 Melnikov 函数 $M(\xi_0)^{[7]}$, 它表示分界线在扰动下稳定与不稳定轨道之间的距离在法向矢量上的投影. 当 $M(\xi_0)$ 有简单零点时, 出现同宿相切并导致混沌. 对于方程(20), (21), 求得

$$M(\xi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{xx}(\xi) \left\{ -\frac{\varepsilon}{aQ} \cos(\xi + \xi_0) + \frac{\gamma}{aQC_s^2} P_{xx}(\xi) \right\} d\xi. \quad (23)$$

这里

$$P_{xx}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \phi_{xx}.$$

利用(22)式,有

$$\begin{aligned} M(\xi_0) &= -\frac{2\varepsilon C_s}{aQ} (\varphi_c - \varphi_a) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(C_s \xi) \operatorname{th}(C_s \xi) \cos(\xi + \xi_0) d\xi \\ &\quad + \frac{4\gamma}{aQ} (\varphi_c - \varphi_a)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(C_s \xi) \operatorname{th}^2(C_s \xi) d\xi \\ &= \frac{\varphi_c - \varphi_a}{aQC_s^2} \left\{ \frac{\varepsilon \sin \xi_0}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2C_s}} + \frac{16\gamma}{15} C_s (\varphi_c - \varphi_a) \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

所以,当

$$\varepsilon \geq \frac{16\gamma}{15} (\varphi_c - \varphi_a) C_s \operatorname{sh} \frac{\pi}{2C_s} \quad (25)$$

时, $M(\xi_0)$ 有简单零点. 等号应给出(20), (21)式出现混沌的充分条件.

现在用图 1 的参数作一比较, $\varphi_c = 0.125$, $\varphi_a = 0$, 当 $Q \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon_c = 0.021$, 随 Q 增加, ε_c 逐渐增大至无穷. 特别当 Q 与初始孤波速度(图 1 计算中取为 0.625)相等时, $\varepsilon_c \approx 0.056$. 这些值低于元胞下方定态能量基底的 ε 范围, 但数量级大体一致. 当然, 偏微分方程的性质不能简单地由在行波假设下积分得到的方程来描写, 而且即使在行波解时, 本文的系统与方程(20), (21)也不完全等价. 因此, 由 Melnikov 函数得到的 ε_c 对本文的系统究竟意味着什么, 仅从上面的结果还很难作出肯定的结论. 关于 Duffing 方程的 Melnikov 函数的讨论, 还可见文献[8].

方程(1)与 Duffing 方程的类似性还表现在非线性行为上。如后者也出现了二次共振引起的超级结构^[2]。本文因引入了空间维, 现象远比 Duffing 方程丰富, 例如可以给出特征波数随频率变化的标度关系等。同时, 通过讨论共振条件, 得到了与数字实验符合的一些定量结果, 这使我们对超级结构出现原因的分析更加可信。此外, 图 1 中各元胞的精细分岔行为是否也存在相似结构, 是一个有趣的问题, 有赖于大量数字实验的研究。总之, 漂移波方程, Duffing 方程的这些结果, 以及其它的一些物理现象表明, 二次共振现象在自然界中普遍存在, 它可能制约混沌的总体行为。

本文的计算机结果是作者在联邦德国 Max-Planck 等离子体物理研究所合作研究时完成的。

- [1] He Kaifen, A. Salat, *Plasma Phys. and Control. Fusion*, **31**(1989), 123; 参考 IPP 6/275(1988); IPP 6/280(1989).
- [2] H. Tasso, *Phys. Lett.*, **24A**(1967), 618.
- [3] Kaifen He, A. Salat, *Phys. Lett.*, **132A**(1988), 175.
- [4] J. D. Meiss, W. Horton, Jr., *Phys. Rev. Lett.*, **18**(1982), 1362.
- [5] U. Parlitz, W. Lauterborn, *Phys. Lett.*, **107A**(1985), 351.
- [6] Y. Chen, S. Wen, *J. Math. Anal. and Appl.*, **127**(1987), 226.
- [7] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, Berlin, (1983).
- [8] J. M. T. Thompson, S. R. Bishop, L. M. Leung, *Phys. Lett.*, **A121**(1987), 116.

WINDING NUMBER BIFURCATION AND SUPERSTRUCTURE IN NONLINEAR DRIFT WAVES DRIVEN BY A TRAVELING WAVE

HE KAI-FEN

Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University, Beijing, 100875

A. Salat

Max-Planck Institute of Plasma Physics, F. R. G.

(Received 7 March 1989)

ABSTRACT

In ref. [1], numerical experiment reveals scaled superstructures in the bifurcation diagram for the damped nonlinear drift-wave driven by a traveling wave. In this paper, it is shown that the resonance between the solution of driven-damped equation and that of the unperturbed system is the cause of winding number bifurcation and hence of the superstructure. The scaling law for the wavenumbers and frequencies calculated accordingly is in agreement with the numerical results.

PACC: 5235