

# 弱相对论捕获电子哨声模不稳定性\*

卞伯达 林景

福州大学物理系,福州,350002

郭世宠<sup>1)</sup> 蔡诗东<sup>2)</sup>

中国科学院物理研究所,北京,100080

1989年4月10日收到

本文讨论了弱相对论的捕获电子在磁镜位形中对哨声波不稳定性的影响。在简化的箱子模型下<sup>[1]</sup>,用摄动法求解了带有弱相对论捕获电子效应的本征方程。发现各向异性热电子可以驱动哨声模不稳定性,而相对论效应使不稳定性的各向异性阈值升高,增长率的最大值减小并使不稳定性向低频方向移动。

PACC: 5235

## 一、引言

由于在皱褶环 EBT 和串联磁镜 TMX 装置上较为成功的磁约束实验,给理论工作带来许多令人感兴趣的课题,其中之一就是哨声波不稳定性问题。

在上述磁镜装置中的电子回旋共振加热,结果产生一具有高 $\beta$ 各向异性分布的热电子环,其垂直分量温度 $T_{\perp}$ 要比平行分量温度 $T_{\parallel}$ 高出许多。因此,哨声波不稳定性可能会对这种等离子体产生很大影响。近些年,有人对原哨声波不稳定性理论进行了补充发展,以考察哨声波不稳定在这类等离子体中所起的作用。如 Gladd<sup>[2]</sup>考虑了平板模下相对论效应,在局域近似下,他的理论结果表明回旋频率的相对论展宽效应可以减弱哨声波不稳定性,同时,相对论性使速度空间的共振线弯曲,结果使更多的高能电子表现共振吸收。这虽然可以用来解释目前类似于 EBT 装置中的一些哨声模现象,但 Gladd 没有考虑捕获电子的效应,当热电子的捕获频率接近于回旋或哨声模频率时,捕获效应就变得很重要。Guzdar 和 Marchand 首先考虑了这个问题,他们用箱子模型简化磁场位形,结果表明当 $T_{\perp}/T_{\parallel} > 1$ 时,电子的捕获共振使哨声模发生不稳,不过他们的理论被限制在非相对论情况。另外,Garner 等人<sup>[3]</sup>和 Jacquinet 等人<sup>[4]</sup>还考虑不同的电子分布函数下哨声波的模态以及不稳定性问题。

本文将要讨论弱相对论电子在捕获情况下对哨声波不稳定性的影响。首先从相对论回旋动力论方程出发求出哨声模本征方程,然后考虑系统为大量冷电子背景下存在少量

\* 国家自然科学基金资助的课题。

1)2) 中国高等科学技术中心(世界实验室)。

弱相对论热电子组成的二分量电子系统,用摄动法写出实频的本征值和模的不稳定性增长率,并采用 Guzdar 和 Marchand 的简化磁场位形,在忽略电子平行于磁场方向的相对论效应下求出不稳定性增长率,再用 EBT 的典型参数,对不稳定性增长率进行讨论,分析相对论效应的稳定性影响.结果表明,相对论可以减弱由各向异性捕获电子驱动的哨声模不稳定性,并使不稳定性向低频方向移动,使不稳定性各向异性阈值升高.

## 二、本征方程及其近似解

考虑以正离子提供中性背景,而电子由冷背景电子和少量弱相对论热电子组成的二分量电子系统,其分布函数分别为

$$F_{0c} = n_c \delta(u), \quad (1)$$

$$F_{0h} = \frac{n_h}{\pi^{3/2} V_{\perp}^2 V_{\parallel}} \exp \left[ -\frac{u_{\perp}^2}{v_{\perp}^2} - \frac{u_{\parallel}^2}{v_{\parallel}^2} \right], \quad (2)$$

指标 c, h 分别表示冷、热电子部分;  $n_i$  表电子密度;  $v_{\perp}, v_{\parallel}$  分别表垂直和平行于磁场方向的热速度.

从相对论迴旋动力论方程出发<sup>[3]</sup>,不难求得捕获情况下,电子扰动分布函数的解

$$\delta F_i = \delta F_{si} + \sum_l \exp(-il\alpha) \left[ \langle \delta H_i \rangle_l - \frac{q}{m_0} \frac{\partial}{B \partial \mu} F_{0i} \langle \delta \varphi \rangle_l \right] \quad i = c, h, \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} \langle \delta \varphi \rangle_l = & \left( \gamma \delta \phi - \frac{u_{\parallel}}{c} \delta A_{\parallel} \right) \delta_{l,0} - \frac{u_{\perp}}{2c} \\ & \cdot [(\delta_{l,1} + \delta_{l,-1}) \delta A_{\perp 1} + i(\delta_{l,1} - \delta_{l,-1}) \delta A_{\perp 2}], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\langle \delta H_c \rangle_l = -\frac{q}{m_0} \frac{\langle \delta \varphi \rangle_l}{(\omega - l\Omega)} \left( \omega \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + l\Omega \frac{\partial}{B \partial \mu} \right) F_{0c}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta H_h \rangle_l = & -\frac{q}{m_0} \frac{\left( \omega \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + l\Omega \frac{\partial}{B \partial \mu} \right) F_{0h}}{\sin I_l(z_0, -z_0)} \\ & \cdot \left\{ \int_{-z_0}^{z_0} \cos I_l(z', z_0) \cos I_l(z, -z_0) \right. \\ & \left. + \int_{-z_0}^{z_0} \cos I_l(z', -z_0) \cos I_l(z, z_0) \right\} \cdot \frac{\langle \delta \varphi \rangle_l}{|u_{\parallel}|} dz'. \end{aligned} \quad (6)$$

上述诸式中  $z$  为沿磁场  $\mathbf{B}$  方向的空间坐标,且坐标原点处于磁镜正中;  $\pm z_0$  分别为捕获电子的两个对称的反射点;  $q$  为电子电荷;  $m_0$  为电子静质量;  $\alpha$  为迴旋相角;  $\mu = u_{\perp}^2/2B$ ;  $\varepsilon = m_0 \gamma c^2$ ;  $\gamma = (1 + u^2/c^2)^{1/2}$ ;  $\Omega = qB/m_0 c$ ;  $\delta_{l,n}$  为 Kronecker 的  $\delta$  符号;  $\delta \phi$  表示扰动电势;  $\delta A_{\perp 1}, \delta A_{\perp 2}$  为垂直于磁场的两个互相垂直的扰动磁势;  $\delta F_{si}$  为一与相角  $\alpha$  无关的函数,它对最后的本征方程没有贡献.

将(3)式代入以下 Maxwell 方程:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \begin{pmatrix} \delta A_{\perp 1} \\ \delta A_{\perp 2} \end{pmatrix} = - \sum_i \frac{4\pi q}{c} \int \frac{B d\mu d\varepsilon}{|u_{\parallel}|} \int d\alpha \delta F_i \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad i = c, h. \quad (7)$$

取右旋波(哨声波)部分,经过一些计算后,可得到一包含弱相对论捕获电子效应的积分微分本征方程

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}\delta A_{\perp R} = & \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega\omega_{pe}^2}{c^2(\omega - Q)} + \frac{4\pi^2 q^2}{c^2 m_0} \frac{B d\mu d\varepsilon}{|u_{\parallel}|} u_{\perp}^2 \frac{\partial}{B \partial \mu} F_{0h} \right] \delta A_{\perp R} \\ & + \frac{4\pi^2 q^2}{c^2 m_0} \int \frac{B d\mu d\varepsilon}{|u_{\parallel}|} u_{\perp}^2 \left( \omega \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + Q \frac{\partial}{B \partial \mu} \right) F_{0h} \\ & \cdot \left\{ \int_{-z_0}^{z_0} \cos I_1(z', z_0) \cos I_1(z, -z_0) + \int_{-z_0}^{z_0} \cos I_1(z', -z_0) \cos I_1(z, z_0) \right\} \\ & \cdot \frac{\delta A_{\perp R}}{|u_{\parallel}|} dz' = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

式中  $\delta A_{\perp R} = \delta A_{\perp 1} + i\delta A_{\perp 2}$ ,  $\omega_{pe}$  为冷电子分量的等离子体频率。

方程(8)可以用摄动法近似求解。为此,注意到热电子分量往往只占一小部分,对哨声模实频,背景电子起着主导作用。因此,在求哨声模的实频时,可以忽略高能分量的影响,而高能分量只出现在高阶项中,它提供了模的增长率,影响实频模的稳定与否。即可以认为

$$\frac{n_h}{n_c} = o(\varepsilon). \quad (9)$$

这里  $\varepsilon$  为一小参量。则零级本征方程为

$$\hat{\mathcal{D}}^{(0)}\delta A_{\perp R}^{(0)} = 0, \quad (10)$$

式中

$$\hat{\mathcal{D}}^{(0)} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega\omega_{pe}^2}{c^2(\omega - Q)}. \quad (11)$$

进一步假设在电子的捕获区域内,磁场变化很小,可以把磁场近似看作常数,即用“箱子”模型处理<sup>[1]</sup>,同时认为“箱子”的长度即电子的反弹点间距不是电子速度的函数。这样,零级方程(10)的解可写成如下简单形式:

$$\delta A_{\perp R}^{(0)} = \overline{\delta A_{\perp R}^{(0)}} \exp(ikz), \quad (12)$$

式中振幅  $\overline{\delta A_{\perp R}^{(0)}}$  与  $z$  无关。

从(8)式的一级项可得到不稳定性增长率

$$\omega_i = - \frac{\text{Im} \int_{-z_0}^{z_0} \delta A_{\perp R}^{(0)*} \hat{\mathcal{D}}^{(1)} \delta A_{\perp R}^{(0)} dz}{\int_{-z_0}^{z_0} \delta A_{\perp R}^{(0)*} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \hat{\mathcal{D}}^{(0)} \right) \delta A_{\perp R}^{(0)} dz}, \quad (13)$$

式中  $\hat{\mathcal{D}}^{(1)} = \hat{\mathcal{D}} - \hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ 。经一些计算后得到

$$\hat{\mathcal{D}}^{(1)} = 2\pi \frac{\omega_{ph}^2}{c^2} \int du_{\parallel} du_{\perp} \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \left[ (1 - \eta) + \frac{Q_1 + |u_{\parallel}| \Theta}{u_{\parallel}^2 k^2 - Q_1^2} (Q_1 + Q\eta) \right] \frac{F_{0h}}{n_h v_{\parallel}^2}, \quad (14)$$

式中

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{-k}{\sin 2k_1 z_0} \{ \sin(k + k_1)z_0 \exp[-iz(k - k_1)] \\ & + \sin(k - k_1)z_0 \exp[-iz(k + k_1)] \}, \end{aligned}$$

而  $\eta = T_{\parallel}/T_{\perp} = v_{\parallel}^2/v_{\perp}^2$ ,  $k_{\parallel} = Q_{\parallel}/|u_{\parallel}|$ ,  $\omega_{ph}^2$  为热电子分量的等离子体频率. (14) 式中的速度积分受如下捕获条件限制:

$$\begin{aligned} u_{\parallel}^2 &\leq -2\mu B_m + c^2(\gamma^2 - 1), \\ 0 &= -2\mu B_M + c^2(\gamma^2 - 1), \end{aligned} \quad (15)$$

式中  $B_m, B_M$  分别为“箱内”和“箱外”的磁场强度.

从 (14) 式可以看出, 之所以存在  $\text{Im}\mathcal{D}^{(1)}$ , 是因为存在极点  $u_{\parallel}^2 k^2 - Q_{\parallel}^2 = 0$  和  $\sin 2k_{\parallel} z_0 = 0$ , 可以证明, 极点  $u_{\parallel}^2 k^2 = Q_{\parallel}^2$  的留数为零, 这说明迴旋共振导致哨声模不稳定性的机制, 在捕获情况下是不存在的. 而  $\sin 2k_{\parallel} z_0 = 0$  实际上表示捕获电子与哨声模发生共振的条件. 因此, 从这一点可以看出, 在我们的情况下, 哨声模不稳定性被看作由电子的捕获共振效应导致的. 另外, 相对论的修正既被包含在共振条件中, 又被包括在 (14) 式的其他因子中.

由于 ECRH 的结果使热电子存在着高度各向异性, 其垂直于磁场方向的温度很大, 具有相对论性质, 而平行于磁场方向的温度较小, 可以看作非相对论情况处理, 即可以把  $\gamma$  看做只是  $u_{\perp}$  的函数. 将  $\sin 2k_{\parallel} z_0$  在极点附近展开

$$\sin 2k_{\parallel} z_0 = (-1)^{m+1} 2z_0 \left( \frac{\lambda_m}{Q_{\parallel}} \right)^2 Q_{\parallel} \left( |u_{\parallel}| - \frac{Q_{\parallel}}{\lambda_m} \right), \quad (16)$$

并注意到

$$\int_{-z_0}^{z_0} \Theta dz = - \frac{2}{1 - \left( \frac{\lambda_m}{k} \right)^2} [(-1)^m - \cos 2kz_0],$$

式中  $\lambda_m = m\pi/2z_0$ , 采用留数技术, 最后可得到捕获电子共振效应导致的哨声波不稳定性增长率如下:

$$\begin{aligned} \omega_I = & - \frac{2n_h(\omega - Q)^2}{\sqrt{\pi} n_c \eta k^2 z_0 Q v_{\parallel}} [\omega - (1 - \eta)(1 - R)Q] \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^m \cos 2kz_0}{m \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_m}{k} \right)^2 \right]^2} \cdot \frac{\exp \left[ - \left( \frac{\omega - Q}{\lambda_m v_{\parallel}} \right)^2 \right]}{\left\{ 1 + R \left[ 1 - \frac{\omega}{Q} \left( 1 + \frac{1}{2} R \right) \right] \frac{\omega Q}{\lambda_m^2 v_{\parallel}^2} \right\}^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中  $R = v_{\perp}^2/c^2$ .

### 三、不稳定性分析

从 (17) 式可以看出, 当

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} > \sigma_c = \frac{Q}{Q - \omega(1 + R)}$$

时, 哨声模是不稳定的, 其中  $\sigma_c$  为不稳定性的各向异性阈值. 加大相对论效应的修正因子  $R$ , 将使不稳定性阈值升高, 也就是说相对论效应具有减小不稳定性的趋势, 这是因为当电子进入相对论后, 其迴旋频率  $qB/m_0\gamma c$  将随相对论效应的增加而减小, 结果使阈

值上升,而在同一频率下的增长率减小.

除此之外,(17)式中的另一因子

$$\left\{1 + R \left[1 - \frac{\omega}{Q} \left(1 + \frac{1}{2} R\right)\right] \frac{\omega Q}{\lambda_{\perp}^2 v_{\parallel}^2}\right\}^{-2}$$

也表现了相对论效应的另一影响,即随着  $R$  的增加,在高频区的不稳定性增长率将发生减小,结果使不稳定性向低频区移动的同时也被降低.

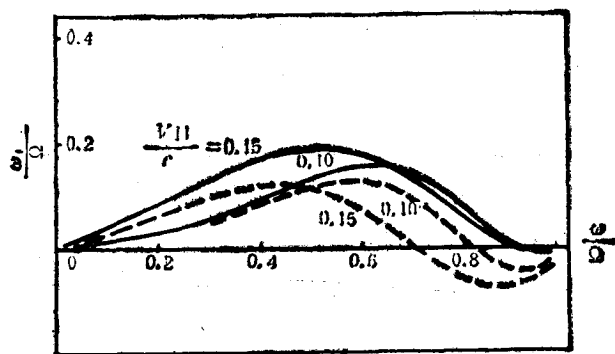


图1 不同热电子温度  $v_{\parallel}/c$  下, 不稳定性增长率与实频的关系  
 $\eta = 0.2$ ;  $c/z_0 Q = 0.5$ ;  $\omega_{ph}^2/Q^2 = 5$ ;  $n_h/n_c = 0.1$ ;  
 实线为非相对论;虚线为相对论

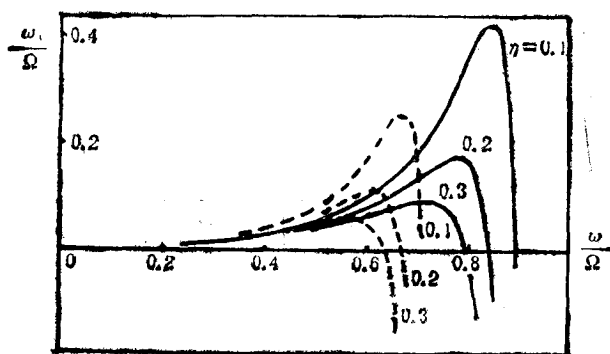


图2 不同各向异性  $\eta$  下不稳定性增长率与实频的关系  
 $v_{\parallel}/c = 0.2$ ;  $c/z_0 Q = 0.2$ ;  $\omega_{ph}^2/Q^2 = 30$ ;  $n_h/n_c = 0.1$ ;  
 实线为非相对论;虚线为相对论

图1表示在典型的 EBT 参数下, (17)式给出的两组不同热电子温度的不稳定性增长率与实频的关系. 从曲线可以看出, 热电子温度具有增强不稳定性而相对论性具有减小这种不稳定性的作用. 图2则表示了不同  $\eta$  下, 不稳定性增长率与实频的关系. 图2中也显示相对论有减小不稳定性的趋势, 同时也使不稳定向低频移动, 而各向异性则增加不稳定性增长率. 特别是当  $R = 0$  时, 结果可以退回到 Guzdar 和 Marchand 的情形.

#### 四、小结与讨论

本文建立了弱相对论捕获电子与哨声模不稳定性的理论关系。从相对论回旋动力论方程出发,用摄动法将弱相对论捕获电子分量做为修正项来考虑,在零级项中求出占多数的背景电子确定的哨声模本征频率,而少量的弱相对论捕获电子作为提供多余的自由能来源,在一级项中与模的不稳定性发生关系。在简化的箱子模型下,忽略电子在平行于磁场方向的相对论效应,解析求出了不稳定增长率。在典型的 EBT 参数下分析了相对论效应对不稳定性的影响,结果发现相对论效应对由各向异性捕获电子驱动的哨声模不稳定性具有稳定作用,使不稳定性的各向异性阈值升高,同时使不稳定性区域向低频方向移动。

本文由于采用箱子模型来简化磁场位形,给理论结果带来一定的限制,但它作为了解捕获电子共振对哨声模不稳定性的影响是成功的。同时还可以看出相对论效应的影响。由于箱子模型具有强化捕获共振的作用,因此,实际的不稳定性应该要比本理论结果小些。进一步详细的工作将可以用更切合实际的磁场位形来代替。

本工作得到等离子体研究会的帮助,深致谢忱。

- [1] P. N. Guzdar and R. Marchand, *Phys. Fluids*, 25(1982), 702.
- [2] N. T. Gladd, *Phys. Fluids*, 26(1983), 974.
- [3] R. C. Garner *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 59(1987), 1821.
- [4] J. Jacquinet and C. Leloup, *Phys. Fluids*, 14(1971), 2440.
- [5] S. T. Tsai *et al.*, *Plas. Phys. and Controlled Fusion*, 26(1984), 907.

## WHISTLER INSTABILITY WITH WEAKLY RELATIVISTIC TRAPPED ELECTRONS

BIAN BO-DA LIN JING

*Department of Physics, Fuzhou University, Fuzhou, 350002*

GUO SHI-CHONG CAI SHI-DONG (TSAI SHIHTUNG)

*Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080*

(Received 10 April 1989)

### ABSTRACT

The effects of weakly relativistic trapped electrons on whistler instability in the magnetic-mirror configuration are studied. Using the simplified box model<sup>(1)</sup> the eigen equation is solved with perturbative approach including the weakly relativistic trapped effects. It is found that whistler instability can be driven by the anisotropic hot electrons, while relativity increases the threshold value of instability and decreases the growth rate as well as makes the unstable modes shifting to low frequency.

**PACC:** 5235