

一维晶化束的非线性动力学(III)*

邵明珠

重庆交通学院, 重庆, 630073; 西南师范大学, 重庆, 630715

I. HOFMANN

GSI, 6100 Darmstadt, FRG

罗诗裕

重庆交通学院, 重庆, 630073; 西南师范大学, 重庆, 630715

1989年8月28日收到

在线性近似下讨论了束流晶化过程中的周期冷却效应和电子屏蔽效应, 控制离子运动的方程均为熟知的 Mathieu 方程. 讨论了系统的稳定性和离子穿越共振线的动力学行为, 并以联邦德国 GSI 的实验储存环为例, 导出了离子穿越不同共振线的时间和束流冷却时间.

PACC: 2920

一、引言

人们对无限单分量等离子体 (OCP) 的研究比较早^[1], 而对约束单分量等离子体的研究起步比较晚. 把冷却束流视为单分量等离子体还是几年前人们才完成的类比. 考虑到冷却束流只受到横向磁场的约束, 这种束流又可视作二维约束的单分量等离子体; 但是, 又由于储存环中的束流轨道是闭合的, 又可把它当作三维约束的特殊情况来进行研究. 近年来, 人们对束流晶化的认识正是在这种“类比”之下不断完善的.

在文献[2,3]中用非线性力学方法讨论了束流的横向相干振动(一维库仑链), 其中包括了外激励、参数激励和常数冷却力情况; 把离子运动方程化为 Duffing 方程或 Duffing 型参数激励方程, 再利用多重尺度法和 Melnikov 方法讨论了系统的局部分叉和全局分叉, 导出了联邦德国重离子研究中心实验储存环 ESR 的某些临界参数. 考虑到更实际的周期冷却和电子屏蔽效应, 问题将更加复杂. 本文在线性近似下对这两种效应进行讨论, 结果表明: 离子的控制方程是熟知的 Mathieu 方程; 通过对 Mathieu 方程解的稳定性讨论, 导出了共振线的穿越时间、冷却时间和临界电流密度等一些物理参数.

二、运动方程

1. 周期冷却

束流冷却通常是在储存环的一个直线段上安装一个冷却器来实现的. 当离子通过冷

* 国家自然科学基金资助的课题.

却器时,将有一束冷的电子同它一道运动;如果选择电子速度与离子速度相等,则由于离子和电子之间不断交换能量和动量,使得离子束逐渐变冷.如果在储存环中只装有一个冷却器,称为单重冷却;如果装有几个冷却器则称为多重冷却.目前,世界上带有冷却器的储存环都是属于单重冷却情况.下面将对这种情况进行讨论.对于单重冷却,离子在储存环中旋转一圈将被冷却一次,多次旋转多次冷却,这就是我们关心的束流周期冷却情况.

对于纯的一维库仑链,已导出了它的横向相干振动方程(见文献[2]中的方程(17))

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X + \alpha X^3 = 0, \quad (1)$$

式中 $X = x/l$, $\dot{X} = dx/dt$, l 是相邻离子间距,而

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{m\gamma} \left\{ \kappa - A_1 \left(S_1 - \frac{9a^2}{2l^2} S_3 \right) \right\}, \\ \alpha &= \frac{3A_1 l}{2m\gamma} (S_2 - 3S_3), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\kappa = m\gamma Q_0^2 Q^2, \quad A_1 = \frac{e^2 z^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 l^3}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{4}{p^3} \lambda(3) - 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right) \xi(3), \\ S_2 &= \frac{16}{p^5} \lambda(5) + 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right)^3 \xi(5), \\ S_3 &= 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right) \sin^2 \frac{\pi}{p} \xi(5), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \xi(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(mp+1)^n}, \\ \lambda(n) &= (1-2^{-n})\zeta(n), \\ \zeta(n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \end{aligned} \quad (5)$$

Q_0 是离子的自由振动数, Q 是离子回旋频率, m 是离子质量, ze 是离子电荷, γ 是相对论因数, p 是与振动模式有关的任意整数; $\zeta(n)$ 是辐角为 n 的 Riemann zeta 函数. a 由初值确定(在零级近似下).

由于周期冷却,冷却力可表示为

$$F(\theta) = -2\mu(\theta)m\gamma dx/dt, \quad (6)$$

式中^[4]

$$\mu(\theta) = \begin{cases} \mu_0 & |\theta - \pi| \leq \Delta\theta; \\ 0 & |\theta - \pi| > \Delta\theta, \end{cases} \quad (7)$$

而

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{2\pi L r_e r_p z^2}{e\gamma^2 A\beta} \left(\frac{c}{v^*} \right)^3, \\ r_e &= e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2), \quad r_p = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_p c^2), \end{aligned}$$

$$L \approx \ln \left(-\frac{\lambda_D \left(\frac{v^*}{c} \right)^2}{2zr_e} \right), \quad 1 = en_e \beta c, \quad (8)$$

r_e 是经典电子半径, r_p 是经典质子半径, m_e 和 m_p 分别是电子和质子质量, n_e 是电子密度, i 是电流密度, v^* 是离子和电子之间的相对热速度, λ_D 是 Debye 屏蔽长度, A 是离子的质量数. 周期冷却力如图 1 所示.

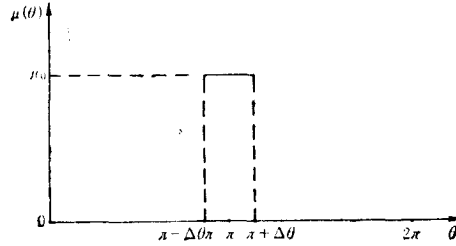


图 1 束流周期冷却示意图

令 $\theta \perp \Omega t$, 再注意到 $X = x/l$, 将(6)式代入方程(1), 在线性近似下可得离子运动方程

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + \frac{2\mu(\theta)}{\Omega} \frac{dx}{d\theta} + Q_1 x = 0. \quad (9)$$

方程(9)是具有可变系数的二阶常微分方程. 从实际考虑出发, 假设方程(9)等号左端第二项的大小为 $O(\epsilon)$ 数量级, 则(9)式可改写为

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + \frac{2\epsilon\mu(\theta)}{\Omega} \frac{dx}{d\theta} + Q_1 x = 0. \quad (9')$$

将 $\mu(\theta)$ 按 Fourier 级数展开

$$\mu(\theta) = \mu_0 \left\{ \eta + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi\eta \cos n\theta \right\}. \quad (10)$$

如果仅保留上式中的常数项, 就导致文献[2, 3]中讨论过的常数冷却力情况.

令

$$x = u \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{\epsilon\mu(\xi)}{\Omega} d\xi \right\}, \quad (11)$$

则方程(9)可化为^[2]

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + p(\theta)u = 0, \quad (12)$$

式中

$$p(\theta) = Q_1 - \epsilon\dot{\mu}(\theta)/\Omega. \quad (13)$$

式中略去了 ϵ^2 项, 这就是说只关心弱冷却情况, 其中 $\dot{\mu}(\theta) = d\mu/dt$, 而 $\mu(\theta)$ 由(10)式给出. 将(10)和(13)式代入方程(12)中, 在弱冷却近似下可得离子运动方程

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(Q_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin n\theta \right) u = 0, \quad (14)$$

式中

$$\delta_n = \frac{2\mu_0}{\pi Q} (-1)^n \sin n\pi\eta. \quad (15)$$

方程(14)是一般的 Hill 方程, 它的系数包含了所有的 Fourier 分量. 在这个系统中将存在和共振与差共振, 但是, 由于这些组合共振都比整数共振或半整数共振弱; 从实际考虑出发, 将略去这些较弱的组合共振, 感兴趣的离子运动方程化为

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + (Q_i^2 + \delta_n \sin n\theta)u = 0. \quad (16)$$

2. 屏蔽效应

考虑到冷却器中离子由电子包围, 于是将出现下面两种效应: 1) 冷却效应, 这是由于热的离子同冷的电子相互作用; 2) 屏蔽效应, 由于离子被电子包围, 离子之间的库仑相互作用将被削弱, 这就是所谓的电子屏蔽效应. 冷却效应已经作了讨论, 现在对屏蔽效应进行分析. 假设屏蔽距离比相邻离子间距还大, 则在冷却器中, 离子之间的库仑作用近似为零, 而在其他地方有通常的库仑相互作用存在. 当离子在储存环中旋转时, 将受到周期库仑力作用. 在线性近似下, (1)式可以表示为

$$\frac{d^2 X}{d\theta^2} + (Q_i^2 - \Delta Q(\theta))X = 0, \quad (17)$$

式中

$$\Delta Q(\theta) = \begin{cases} A_1 S_1 / m\gamma Q^2 = \Delta Q_0 & |\theta - \pi| < \pi(1 - \eta); \\ 0 & |\theta - \pi| \geq \pi(1 - \eta), \end{cases} \quad (18)$$

$\Delta Q(\theta)$ 是由于库仑相互作用引起的“频率”漂移. 周期库仑相互作用如图 2 所示.

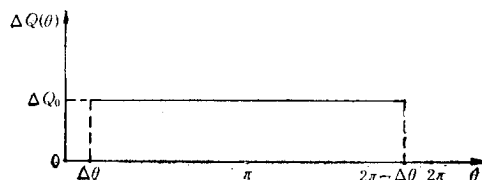


图 2 库仑屏蔽示意图

将 $\Delta Q(\theta)$ 按 Fourier 级数展开, 可得

$$\Delta Q(\theta) = \Delta Q_0 \left\{ (1 - \eta) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi\eta \cos n\theta \right\}, \quad (19)$$

将(19)式代入方程(17), 可得

$$\frac{d^2 X}{d\theta^2} + \left(Q_i^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos n\theta \right) X = 0, \quad (20)$$

式中

$$\delta_n = \frac{2}{n\pi} \sin n\pi\eta \cdot \Delta Q_0, \quad Q_i^2 = Q_0^2 - \Delta Q_0(1 - \eta). \quad (21)$$

根据上面的类似分析, 可得下列运动方程:

$$\frac{d^2 X}{d\theta^2} + (Q_2^2 + \delta_n \cos n\theta)X = 0, \quad (22)$$

式中 δ_n 由(21)式给出.

方程(16)和(22)是熟知的 Mathieu 方程.

三、Mathieu 方程及其解的稳定性

方程(16)和(22)可以统一表示为

$$\ddot{u} + (\nu^2 + \delta \cos n\theta)u = 0, \quad (23)$$

式中 $\dot{u} = du/d\theta$, ν 与 Q_1 或 Q_2 相对应, 而 δ_n 或者是由(15)式给出, 或者是由(21)式给出 ($\sin n\theta$ 和 $\cos n\theta$ 仅差 $\pi/2$ 辐角, 不影响结果). 方程(23)的稳定性与参数 ν^2/n^2 和 δ/n^2 的分布有关. 在 $\nu^2/n^2 - \delta/n^2$ 平面上, 有一系列稳定和不稳定区. 当 $|\delta| \rightarrow 0$ 时, 不稳定区退化为一列点, 而这些点全都落在横轴 ($\delta/n^2 = 0$) 上, 且可由公式

$$\frac{\nu^2}{n^2} = \frac{k^2}{4} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

给出, 相应的不稳定区称为 k 阶不稳定区. 严格说来, 方程(23)存在着无限个稳定和 unstable 区, 但是, 对于实验储存环 ESR 只存在少数几个低阶不稳定区 ($k = 1, 2, 3$ 和 4). 这里只关心一阶不稳定区 ($k = 1$), 这个不稳定区对应于 $\nu = n/2$ 参数共振.

利用摄动法, 可找到一阶不稳定区的宽度^[6]

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\nu} \left(\delta - \frac{\delta^3}{16n^4} \right). \quad (25)$$

即所谓 $\nu = n/2$ 共振线的禁带宽度. 当离子穿越这些共振线时, 振幅将呈指数增长, 穿越禁带前后, 振幅增长的倍数

$$G = \exp(\Delta\nu\theta), \quad (26)$$

式中 $\Delta\nu$ 由(25)式给出. 注意到 $\theta = Q_2 t$, 将(25)式代入(24)式, 在线性近似下, 可得共振线的临界穿越时间

$$t_{cr} = 2\nu \ln G / (Q_2 \delta). \quad (27)$$

以屏蔽效应为例计算不同共振线的穿越时间. 比较(22)与(23)式, 可知 $Q_2 = \nu$, $\delta = \delta_n$, 且由(21)式给出. 选择与文献[2, 3]相同的一组参数: U^{92+} , $E = 500 \text{ MeV/A}$, $\eta = 1/50$ 和 $G = 4$, 可得共振线的穿越时间如表 1 所示.

表 1 不同共振线的穿越时间

Q_2	1/2	1	3/2	2
$t_{cr}(\mu s)$	2.7	5.4	8.1	10.8

从表 1 可以看出, 共振线的穿越时间是几微秒的数量级; 下面将看到, 束流的冷却时间大约几十毫秒的数量级. 在束流冷却过程中, 离子将先后穿越 $\nu = 2, 3/2, 1$ 和 $1/2$ 四

条共振线,相应的穿越时由表 1 给出.

四、束流冷却时间

迄今为止,在人们研究束流晶化的过程中,对束流冷却时间的定义还不十分确切.一些人把束流温度达到 $T = 0\text{K}$ 时所经历的时间定义为冷却时间,而实际上 $T = 0\text{K}$ 又是不可能达到的.试图把相干振动振幅减少到初始振幅的 $1/e$ 倍时,系统所经历的时间定义为冷却时间,这种定义援用了原子核物理中的衰变时间概念,具有明确的统计意义.

在线性近似下,可以把具有常数冷却力的方程表示为

$$\ddot{X} + 2\mu\dot{X} + \omega_0^2 X = 0, \quad (28)$$

式中

$$\mu = \mu_0\eta, \quad \eta = \Delta\theta/\pi, \quad (29)$$

$2\Delta\theta$ 是冷却器的“长度”(用方位角表示),其他参数见(8)式.当 $\mu > \omega_0$ 时称为强冷却;当 $\mu < \omega_0$ 时称为弱冷却;当 $\mu = \omega_0$ 时称为临界冷却.本文只关心弱冷却情况.对于弱冷却,方程(28)的解可表示为

$$X = X_0(t)\exp(-\mu t), \quad (30)$$

式中

$$X_0(t) = X_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad (31)$$

X_0 和 θ_0 由系统的初值确定.根据定义,当 $X/X_0(t) = 1/e$ 时,相应的时间

$$t_{co} = \frac{1}{\mu} \quad (32)$$

称为冷却时间,式中 μ 由(29)式给出.作为例子,选择参数: $n_e = 10^{15}\text{m}^{-3}$, $L = 10$ 和 $(v^*/c) = 10^{-2}$ (其他参数与上面相同),由(29)和(31)式可求得束流冷却时间 $t_{co} = 40\text{ms}$.对于不同的电子密度,束流冷却时间由表 2 给出^[7,8]

表 2 束流冷却时间

电子密度 $n_e(\text{m}^{-3})$	10^{14}	10^{15}	10^{16}	10^{17}
$t_{co}(\text{ms})$	400	40	4	0.4

五、结果与讨论

在线性近似下,考虑了周期冷却效应和屏蔽效应,把离子的运动方程化为熟知的 Mathieu 方程,讨论了系统的稳定性,导出了禁带宽度和离子穿越不同共振线的时间.以联邦德国 GSI 的实验储存环 ESR 为例,导出了共振线的穿越时间为几微秒数量级,而束流冷却时间为几十毫秒数量级.

到此为止,用三篇文章对一维库仑链的动力学问题作了比较详细的描述,而且对它的

热力学特征也进行了初步讨论; 一个遗留的问题是还需要考虑束流冷却过程中的各种加热机制^[8], 并且还应该尽可能地提出一种束流晶化的诊断方法^[9,10]. 文献[8—10]对这些问题作了进一步描述.

- [1] 邵明珠、罗诗裕, (已投)《物理》.
- [2] 邵明珠等, 本刊本期.
- [3] 邵明珠等, 本刊本期.
- [4] M. A. Kumakhov and F. F. Komarov, *Energy Loss and Ion Ranges in Solids*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, (1981).
- [5] C. E. Pearson, *Handbook of Applied Mathematics*, Litton Educational Publishing, Inc. New York, (1974).
- [6] Luo Shiyu, *Applied Mathematics and Mechanics*, 3 (1982), 599.
- [7] I. Hofmann, GSI-ESR-87-04, Oct., (1987).
- [8] I. Hofmann *et al.*, Proc. of the Workshop on "Crystalline Ion Beam", Darmstadt, West Germany, (1988).
- [9] Luo Shiyu and I. Hofmann, GSI-89-21, (1989).
- [10] I. Hofmann and Luo Shiyu, GSI-89-01, (1989).

NONLINEAR DYNAMICS OF ONE-DIMENSIONAL CRYSTALLINE BEAM (III)

SHAO MING-ZHU

Chongqing Institute of Communications, Chongqing, 630073

South-West Normal University, Chongqing, 630715

I. HOFMANN

GSI, 6100 Darmstadt, FRG

LUO SHI-YU

Chongqing Institute of Communications, Chongqing, 630073;

South-West Normal University, Chongqing, 630715

(Received 28 August 1989)

ABSTRACT

In the linear approximation the effects of periodic cooling and electron screening have been discussed, the equation of motion for ions has been reduced to the well-known Mathieu equation. Stability of the system and dynamical behaviour of cross over resonances by ions have been discussed also. Taking ESR at GSI in FRG as example, the characteristic time for cross over resonances and the cooling time for the beam have been derived.

PACC: 2920