

时间分形条件下的无规行走理论及其在 色散输运过程中的应用

文 超

北方交通大学物理系, 北京, 100044

刘 福 绥

北京大学物理系, 北京, 100871

1989年7月14日收到

本文研究了跳跃等待时间分布函数 $Q(t) \sim t^{-\alpha} (t \rightarrow \infty, 0 < \alpha < 1)$ 情形下的连续时间无规行走. 系统、严格地描述了 $(0, t)$ 时间中的粒子跳动次数作为时间轴上点集的分形特征(时间分形). 从一个关于粒子跳跃的微观动力学模型出发, 从物理上导出了时间分形, 明确将 α 用有关动力学参量表示. 本文理论很好地解释了非晶态材料中输运过程的色散现象.

PACC: 0540; 7515C

一、引 言

连续时间无规行走 (CTRW) 理论是近年来发展起来的处理无序体系中输运过程的有效方法^[1]. 特别对于非晶态材料中的各种瞬态过程, 如色散输运、扩散控制的各种退激发、受陷、复合过程, CTRW 理论给出了很好的说明. 在这个模型中, 粒子在两个格点之间跳动的等待时间是一个随机变量(与粒子位置无关), 其分布函数为 $F(t)$. 本文中称 $Q(t) = 1 - F(t)$ 为等待时间分布函数 (WTD). 令 $n(t)$ 表示 $(0, t)$ 时间中粒子在点阵上的跳动次数, $N(t)$ 为它的平均值, 则

$$N(t) = \langle n(t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t), \quad (1)$$

式中 $P_n(t)$ 为 t 时间中跳 n 次的几率. 如果在时间轴上用一个同粒子跳动时刻对应的点来表示该次跳动, 则 $n(t)$ 为一个一维随机点集. 在概率论中, $n(t)$ 为一个随机过程, 称为更新过程. 近来的研究发现^[2], 如果

$$Q(t) \sim t^{-\alpha} \quad (t \rightarrow \infty, 0 < \alpha < 1), \quad (2)$$

则点集 $n(t)$ 具有分形的特征, 因而被称为时间分形^[3]. 更为有意义的是这种 WTD 可以给出长时间色散 (偏离经典扩散的行为), 因而引起人们的极大兴趣. 但目前文献中对 $n(t)$ 的分形性质还缺乏系统、严格的讨论. 特别是还不清楚它究竟对应怎样的物理机制, 因而还不清楚 $Q(t)$ 中的参量, 特别是指数 α 与有关物理参量的关系.

本文中我们将给时间分形以及时间分形条件下的 CTRW 以系统、严格的描述。根据我们提出的一个动力学模型, 严格导出时间分形。从而明确给出了一种可能产生时间分形的动力学机制, 揭示出动力学关联和结构无序在 CTRW 中的作用形式。并应用本文理论来解释非晶态材料中输运过程的色散现象。

二、时间分形

分形是一类具有无穷多自相似内部层次的几何体^[3]。其量度性质可用分形维数 D (hausdorff dimension) 来描述。在无规行走的情形下, 如果粒子是以固定频率跳动, 则 $n(t) \propto t$, $n(t)$ 中的点在时间轴上均匀分布。若 $n(t)$ 中的点是按直线上某种规则分形分布的, 如按直线上的 cantor 集分布, 则有两次跳动时间间隔 $U > u$ 的点数 $N(U > u) \propto u^{-D}$ 。Mandelbrot^[3] 类比规则分形这一特性, 指出在无规分形的情况下应有 $U > u$ 的几率 $P\{U > u\} \propto u^{-D}$ 。但显然这一类比是不严格的, 在自洽的概率描述中几率应有限。此外, 对实际过程, 有限时间中发生的跳动次数应是有限的, 因而 $n(t)$ 应分布在整个时间轴上, 在任何有限区间中分布有无穷多个点的几率为零。所以应研究 $t \rightarrow \infty$ 时 $n(t)$ 的行为。先引入正规变化函数的概念^[4]。若函数 $F(t)$ 可以表示为 $F(t) = t^H L(t)$, 式中 $L(t)$ 满足对任意 $s > 0$, $t \rightarrow \infty$ 时 $L(st) \sim L(t)$ (两者等价), 则称 $F(t)$ 是指标为 H 的正规变化函数, $L(t)$ 称为慢变函数。函数的正规性指的是它的渐近可标度性。设 $R(n)$ 为任一固定跳动频率无规行走沿路径的统计量, 如前 n 步中访问的平均不同格点数, 该量的 CTRW 对应量记为 $R(t, n)$ 。其对点集 $n(t)$ 的平均值记为 $R(t) = \langle R(t, n) \rangle$ 。这里引用有关更新过程的为 Smith 首先提出的一个重要定理^[5]:

若 WTD 可以表示成 $Q(t) = 1/\Gamma(1 - \alpha)G(t)$, $G(t)$ 是指标为 α 的无规变化函数, $0 < \alpha < 1$, $R(n)$ 是另一指标为 β 的正规变化函数 ($\beta > 0$), 则 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} R(n)P_n(t) \sim \Gamma(1 + \beta)R(G(t))/\Gamma(1 + \alpha\beta). \quad (3)$$

注意其形式已改换到 CTRW 的情形, 因而较原形式有所不同。在上式中取

$$Q(t) \sim t^{-\alpha}/\Gamma(1 - \alpha), \quad R(n) = n,$$

则有 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$N(t) = \langle n(t) \rangle \sim t^\alpha/\Gamma(1 + \alpha). \quad (4)$$

参见文献[4]中的讨论可以证明(4)式成立的充分必要条件为 $Q(t)$ 有以上形式。因而得到当 $Q(t)$ 有标度行为(2)式时, $n(t)$ 为一个无规分形(时间分形), 其分形维数为 α 。注意, 由(3)式可知, 当 $Q(t)$ 的标度形式中有一个慢变函数因子时, 则 $N(t)$ 中的相应慢变函数因子为其倒数。下面讨论点集 $n(t)$ 中点分布的几何特征。令 S_n 为第 n 次跳动发生所需时间, 则 $S_{n(t)}$ 为时间轴上对应 $(0, t)$ 时间中发生第 n 次跳动的点。为描述点的分布引入三个参量。1) 剩余等待时间 $Z(t) = S_{n(t)+1} - t$, 即已知 t 时间中发生了 n 次跳动, 从 t 时刻计算发生下次跳动所需时间; 2) 已用的等待时间 $Y(t) = t - S_{n(t)}$, 即从发生第 n 次跳动时刻到 t 时刻的时间, 且在这期间中还没有发生下一次跳动; 3) 含时刻 t 的两次跳动之间的等待时间 $T(t) = Y(t) + Z(t)$ 。由于两次跳动之间的平均等待时间

$$\langle t \rangle = - \int_0^{\infty} t dQ(t) = \infty,$$

所以以上三个参量当 $t \rightarrow \infty$ 时均以几率 $\rightarrow \infty$. 因而应研究它们的约化量 $Y_t = Y(t)/t$, $Z_t = Z(t)/t$, $T_t = T(t)/t$. 设 q_α 为 $t \rightarrow \infty$ 时 Y_t 的极限分布密度, p_α 为 Z_t 的极限分布密度, 已知^[4]

$$q_\alpha = \sin(\pi\alpha) y^{-\alpha} (1-y)^{\alpha-1} / \pi \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (5)$$

$$p_\alpha = \sin(\pi\alpha) z^{-\alpha} (1+z)^{-1} / \pi \quad z \geq 0, \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{prob}\{Y_t > y, Z_t > z\} = \sin(\pi\alpha) \int_y^1 (z+u)^{-\alpha} (1-u)^{\alpha-1} du / \pi. \quad (7)$$

由上式可知 q_α 和 p_α 均在 0 点 $\rightarrow \infty$, 所以 $t \rightarrow \infty$ 时, 事件 $S_{n(t)+1} \sim S_{n(t)}$ (即粒子跳一次以后马上再跳一次的事件) 是最可几的. 这表明 $n(t)$ 中的点有成集团分布的趋势, 这正是分形中点分布的几何特征. 由 Y_t 和 Z_t 的联合分布(7)式, 可得到其分布密度 $f(y, z)$

$$f(y, z) = \alpha \sin(\pi\alpha) (y+z)^{-1-\alpha} (1-y)^{\alpha-1} / \pi. \quad (8)$$

因而 T_t 的极限分布为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{prob}\{T_t > x\} = \iint_{y+z > x} f(y, z) dy dz.$$

将(8)式代入积分得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{prob}\{T_t > x\} = \sin(\pi\alpha) x^{-\alpha} / \pi \quad x > 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{prob}\{T_t > x\} = \int_x^1 g(x) dx \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$g(x) = \sin(\pi\alpha) x^{-1-\alpha} [1 - (1-x)^\alpha] / \pi. \quad (9)$$

可见约化等待时间分布 (即点集 $n(t)$ 中相邻两点间的距离用 t 归一化后的分布) 有标度行为. 这是分布在有限区间中的规则分形的相应特性在渐近无规分形中的严格描述. 应用更新过程的理论进一步可以证明以下三个命题是彼此等价的: 1) $Q(t)$ 有标度关系(2)式; 2) $N(t) \sim t^\alpha$; 3) 约化等待时间有(9)式的标度形式. 因而其中任一条都是判定时间分形的特征性质.

分形 $n(t)$ 的自相似特征表现为代表其点分布的随机变量 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 在标度变换下具有等价性. 已知^[4], 对于任意的 n 存在常数 $c_2, c_3, \dots, c_n$, 使 $S_1 = c_2 S_2 = \dots = c_n S_n$ 成立. 此处随机变量相等意味着具有相同的分布函数. 因而可适当选取量度时间的尺度 (时间轴的比例因子) 使 $S_1, \dots, S_n$ 彼此具有相同的随机特性.

这样便完全确定了分形 $n(t)$ 的自相似特性、标度关系、点分布的成团趋势以及这些特征之间的等价关系. 顺便指出, 产生时间分形的随机变量只是一大类在标度变换下具有自相似特性的随机变量的一个子族. 将另文系统讨论它们的对称性结构及其在物理问题中的应用.

三、时间分形条件下的 CTRW

通常, 输运过程中感兴趣的无规行走统计量为 $S(n)$, 前 n 步中到达的平均不同格点数, 它的方差 $\sigma^2(n)$ 和前 n 步中均方位移 $\langle r^2(n) \rangle$. 令 $R(n)$ 表示任一个这样的统计量,

它们的 CTRW 对应量 $R(t)$ 分别为 $S(t)$, $\sigma^2(t)$, $\langle r^2(t) \rangle$, 表示 t 时间中发生相应事件. 文献[6]中曾证明, 当两次跳动之间的平均等待时间 $\langle t \rangle$ 有限时, $R(t)$ 和 $R(n)$ 有相同的长时间渐近行为. 这是不难理解的, 因为此时 $\langle t \rangle$ 可以作为量度时间的自然尺度. 当 $t \gg \langle t \rangle$ 时, 大数定理保证时间随机性不起显著作用, 粒子的跳动过程平均说来是以固定频率 $1/\langle t \rangle$ 进行, 具有 $N(t) \sim t/\langle t \rangle$. 当 $n(t)$ 为一个时间分形时, $\langle t \rangle = \infty$, 通常意义上的大数定理不再成立, 时间随机性明显表现出来. 由(3)式可知, 如 $n \rightarrow \infty$ 时, $R(n)$ 为一个非减的可标度量, 则 $t \rightarrow \infty$ 时, $R(t)$ 也是一个可标度量, 其标度指数为相应空间过程标度指标与时间分形维数的乘积. 产生了“维数相乘”的结果. 事实上, 这是复合过程的普遍性质. 值得指出, (3)式的结果并不依赖点阵结构的具体信息, 而仅涉及 $R(n)$ 的可标度性. 下面用(3)式来找出 $R(t)$ 的具体表达式.

先考虑 d 维欧氏空间中周期点阵上简单无规行走. 以下结果是已知的^[7]:

$$\begin{aligned} d=1, & S(n) \sim cn^{1/2}, \sigma^2(n) \sim cn, \\ & S(n) \sim cn/\ln(n); \\ d=2, & \sigma^2(n) \sim cn^2/[\ln(n)]^4; \\ d=3, & S(n) \sim cn, \sigma^2(n) \sim cn \ln(n); \\ d \geq 1, & \langle r^2(n) \rangle \sim cn. \end{aligned} \quad (10)$$

上式中 c 表示任一给定常数.

取 $Q(t) \sim t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$, 由(3)式,

$$\begin{aligned} S(t) & \sim c\Gamma(3/2)t^{\alpha/2}/\Gamma(1+\alpha/2), \\ d=1, & \sigma^2(t) \sim ct^\alpha/\Gamma(1+\alpha), \\ & S(t) \sim ct^\alpha/[\alpha\Gamma(1+\alpha)\ln t]; \\ d=2, & \sigma^2(t) \sim 2ct^{2\alpha}/[\Gamma(1+2\alpha)(\alpha\ln t)^4], \\ & S(t) \sim ct^\alpha/\Gamma(1+\alpha); \\ d=3, & \sigma^2(t) \sim \alpha ct^\alpha \ln t/\Gamma(1+\alpha); \\ d \geq 1, & \langle r^2(t) \rangle \sim ct^\alpha/\Gamma(1+\alpha). \end{aligned} \quad (11)$$

对在分形维数为 D , 谱维数为 H 的分形上的简单无规行走已知^[8]:

$$\begin{aligned} \langle r^2(n) \rangle & \sim cn^\beta & \beta = H/D; \\ S(n) & \sim cn^\beta & \beta = H/2 < 1; \\ S(n) & \sim cn & H > 2. \end{aligned} \quad (12)$$

由(3)式有

$$\begin{aligned} \langle r^2(t) \rangle & \sim c\Gamma(1+\beta)t^{\alpha\beta}/\Gamma(1+\alpha\beta) & \beta = H/D; \\ S(t) & \sim c\Gamma(1+\beta)t^{\alpha\beta}/\Gamma(1+\alpha\beta) & \beta = H/2 < 1; \\ S(t) & \sim ct^\alpha/\Gamma(1+\alpha\beta) & H > 2. \end{aligned} \quad (13)$$

对自回避无规行走有

$$\langle r^2(n) \rangle \sim cn^{2\nu}. \quad (14)$$

不同理论给出的 ν 值有所不同, Flory 公式给出 $\nu = 3H/[D(2+H)]$, $H \leq 4$, 因而有

$$\langle r^2(t) \rangle \sim c\Gamma(1+2\nu)t^{2\alpha\nu}/\Gamma(H2\alpha\nu). \quad (15)$$

以上公式中的个别结果, 文献中曾有报道^[9], 但所用方法和结果的严格性和普遍性都远不

及本文的讨论。

四、产生时间分形的动力学机制

通常处理粒子不相干(粒子对跳跃前所处状态失去记忆)迁移运动用的是无规行走模型. 该模型将粒子的运动近似为一个经典的跳跃运动. 近年来的实验表明, 许多无序材料特别是非晶态半导体中的输运过程表现出明显偏离经典扩散的新性质. 这促使人们研究无序带来的新问题. 无序的影响至少有两方面的后果. 一是结构无序使点阵失去长程序, 路径几何可能要用分形来描述; 二是动力学无序造成局域化, 使粒子与介质的相互作用呈现新特点. 粒子运动不能再简单的经典跳跃来近似, 而要用微观量子理论来处理^[10-13]. 但在 CTRW 理论中却几乎还没有基于微观量子模型对粒子迁移动力学研究. 近年来我们发展了 Ngai 等人的设想, 提出了适用于 CTRW 理论的、局域化粒子在各向同性非晶态材料中迁移的微观图象^[14-15], 即粒子在一组等价(简并)的局域态之间跃迁. 这种跃迁运动相当于一个发生在局域中心组成的网络(点阵)上的 CTRW. 粒子的 WTD 由跃迁动力学所决定, 与路径几何无关. 因而这种 CTRW 理论使跃迁动力学和路径几何这两个影响过程的主要因素都得到反映, 且两者各以独立的方式起作用.

为计算 $Q(t)$ 考虑如下的单粒子动力学模型. 设粒子在介质(晶格)提供的场及粒子相互作用的平均场中运动. 外场的静态($T = 0$)部分给出粒子的一组简并的局域态(单态近似) $|m\rangle$, m 表示局域中心的位置. 设只有相邻的态才有交迭, 因而粒子只有最近邻跃迁. 对介质场的动态部分作简谐近似, 其哈密顿量为(取 $\hbar = 1$)

$$H_L = \sum_i \omega_i (p_i^2 + q_i^2)/2, \quad (16)$$

式中 p_i 和 q_i 分别为第 i 振动模的无量纲动量和位移坐标. H_L 的本征态为 $|n_1, n_2, \dots\rangle = |n_i\rangle$, 表示第 i 模上的声子数为 n_i . 粒子和声子场有线性耦合

$$H' = \sum_i \lambda_i q_i V, \quad (17)$$

式中 λ_i 为无量纲耦合常数, V 只与粒子的自由度有关. 设无耦合时, 整个系统(粒子和介质)的状态为 $|mn_i\rangle = |m\rangle|n_i\rangle$. 整个系统的哈密顿量 $H = H_0 + H'$. 在 H' 作用下由 $|mn_i\rangle$ 到 $|m'n_i\rangle$ 的量子跃迁过程对应粒子在这两态之间的转移过程. 由标准的含时微扰论一阶近似公式

$$P(t) = \Sigma' 2 |\langle mn_i | H' | m'n_i \rangle|^2 (1 - \cos \Delta E t) / (\Delta E)^2, \quad (18)$$

转移几率 $P(t)$ 为初始时刻处于 $|m\rangle$ 态, 引入相互作用后, t 时刻处于 $|m'\rangle$ 态的几率. Σ' 表示对所有可能的末态求和并对初态的声子部分求热平均(设体系处于绝对温度为 T 的平衡态). 注意到 $q = \sqrt{2}(a^+ + a)/2$, 式中 a^+ , a 分别为声子的产生和湮没算符. 代入 H' 后,

$$P(t) = A \sum_i \lambda_i^2 2n(\omega_i) + 1 (1 - \cos \omega_i t) / \omega_i^2, \quad (19)$$

式中 $A = |\langle m | V | m' \rangle|^2$, $n(\omega) = [\exp(\omega/T) - 1]^{-1}$,

取 Boltzmann 常数为 1. 过渡到连续谱

$$P(t) = A \int [2n(\omega) + 1](1 - \cos \omega t) F(\omega) d\omega / \omega^2, \quad (20)$$

$F(\omega)$ 为有效谱函数, 定义为

$$F(\omega) = \lambda^2(\omega) \rho(\omega), \quad (21)$$

式中 $\rho(\omega)$ 为声子态密度.

不难证明, 在 $F(\omega)$ 可积的条件下, (20) 式的高频部分 $\left(\int_b^\infty, b > 0 \text{ 为任意常数}\right)$ 在长时间极限下至多贡献一个与时间无关的常数. 因而 $P(t)$ 的长时间行为只决定于 $F(\omega)$ 在 0 点附近的性态. 设低频部分的有效谱有德拜形式

$$F(\omega) = a\omega^2 \quad \omega \leq \omega_c, \quad (22)$$

ω_c 为德拜谱的截止频率. 以下只考虑有普遍意义的高温情形, 即 $T \gg \omega_c$.

当 $\omega_c t \gg 1$ 时, 有

$$P(t) = 2aAT[\gamma + \ln \omega_c t + O(1/t)], \quad (23)$$

$\gamma = 0.577$ 为 Euler 常数. 由 $Q(t)$ 满足的关系

$$Q(t) = \exp(-P(t)). \quad (24)$$

当 $\omega_c t \gg 1$ 时有

$$Q(t) = Q_0 t^{-\alpha}, \quad (25)$$

$Q_0 = \omega_c^{-\alpha} \exp(-2\gamma TaA)$, $\alpha = 2aAT$. 此式表明 $Q(t)$ 有标度行为. 但要产生时间分形还需 $\alpha < 1$. 下面讨论时间分形产生的条件. 1) 当温度一定时, 如局域化足够强, 使相邻态的交迭积分足够小 (即 A 足够小) 以致使 $2aAT < 1$ 时, 则时间分形产生. 由此可清楚看出局域化粒子迁移的动力学特性是造成色散的主要原因, 这是局域化带来的量子效应. 因而色散现象应该在无序体系中普遍存在. 2) 当耦合强度系数 a 和 A 一定时, 存在一个转变温度 $T_0 = 1/(2aA)$, 当 $T < T_0$ 时产生时间分形, $T > T_0$ 时, 时间分形消失. 这是本文模型给出的一个重要结论. 这样就完全确定了时间分形的动力学特征. 下面应用动力学理论来解释输运过程的色散性质.

五、色散输运

为描述色散扩散, 引入广义扩散系数 $D(t)^{[14]}$,

$$D(t) = D_0 \langle r^2(t) \rangle / t, \quad (26)$$

由 (13) 式,

$$D(t) = \epsilon D_0 \Gamma(1 + \beta) t^{\alpha\beta-1} / \Gamma(1 + \alpha\beta) \quad \beta = H/D. \quad (27)$$

可见当 $\alpha\beta \approx 1$ 时, 过程有色散. 色散现象在非晶态半导体的各种瞬态过程中已被确认^[16-18]. 实验表明 $D(t) \propto t^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$. 各种分析已经表明, 通常的非晶态材料的体结构 (不是表面界面) 不能用分形来描述, 因而色散性不能归因于分形结构. 在上式中应取 $\beta = 1$, 因而 $\gamma = 1 - \alpha$. 因 $\alpha < 1$, 所以满足 $\gamma < 1$ 的条件. 上面已经证明, 当并且仅当 $Q(t) \sim t^{-\alpha}$ 时有 (13) 式, 因而有 (27) 式成立, 因而只有时间分形可以给出长时间色散. 上节中的计算表明 $\alpha \propto T$ 和存在一个转变温度 T_0 , 当 $T > T_0$ 时色散消失, $T < T_0$

时色散发生。这一点已为实验所确认^[16]。顺便指出,利用 T_0 的存在性可以将动力学造成的色散与分形结构造成的色散区分开来。路径几何对色散的贡献与温度无关,因而如色散中确有分形结构起作用,则当 $T > T_0$ 时,时间分形消失,对色散无贡献。此时 $D(t) \propto t^{-\beta}$, 色散依然存在,且完全是分形结构的贡献。Montroll 等人^[19]用 $Q(t) \sim t^{-\alpha}$ 时的 CTRW 理论系统解释了跳跃控制的半导体光激发瞬态漂移实验,得到很好的符合。但他们只是形式地讨论过程的时间行为,没有涉及与有关动力学参量的关系。本文则具体给出了产生时间分形及色散的动力学机制,明确揭示出这是局域化带来的量子效应。

- [1] J. Stat. Phys., 30(2)(1983).
- [2] A. Blumen *et al.*, Phys. Rev. Lett., 53(1984), 1301.
- [3] B. Mandelbrot, Fractal Geometry of Nature Freeman, San Francisco, (1982).
- [4] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol.2, Wiley, New York, (1971).
- [5] W. L. Smith, Ann. of Math. Stat., 39(1968), 139.
- [6] WEN Chao and LIU Fusui, Chin. Phys. Lett., 3(1986), 93.
- [7] G. H. Weiss and R. J. Rubin, Adv. Chem. Phys., 52(1983), 363.
- [8] R. Rammal, Phys. Rep., 103(1984), 151.
- [9] A. Blumen *et al.*, Phys. Rev. Lett., 53(1984), 1301.
- [10] S. Chakravarty and A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett., 52(1984), 5.
- [11] K. Itai, Phys. Rev. Lett., 58(1987), 602.
- [12] H. Grabert *et al.*, Phys. Rev. Lett., 58(1987), 1285.
- [13] T. Geisel *et al.*, Phys. Rev. Lett., 54(1985), 616.
- [14] Fu-sui Liu and K. L. Ngai, Scientia Sinica, A25(1982), 59.
- [15] Wen Chao and Liu Fu-sui, Chin. Phys. (AIP), 6(1986), 867.
- [16] J. M. Hoam and M. H. Brodsky, Phys. Rev. Lett., 46(1981), 371.
- [17] D. Pfost *et al.*, Phys. Rev. Lett., 52(1982), 376.
- [18] I. Vardeny *et al.*, Phys. Rev. Lett., 44(1980), 1267.
- [19] E. Montroll and B. West, in Fluctuation Phenomena, North Holland, (1979).

FRACTAL TIME RANDOM WALKS AND DISPERSION TRANSPORT

WEN CHAO

Department of Physics, Northern Jiaotong University, Beijing, 100044

LIU FU-SUI

Department of Physics, Peking University, Beijing, 100871

(Received 14 July 1989)

ABSTRACT

We study continuous time random walk with the waiting time distribution having long-time tail $t^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. The fractal time behavior of the hopping event set is treated in a systematic and rigorous way. We construct a dynamic model which shows the fractal time behavior. The experiments of dispersion diffusion in amorphous systems are well explained by our theory.

PACC: 0540; 7515C