

高维时空中静态荷电球体的 一个严格内解*

沈 有 根

中国科学院上海天文台, 上海, 200030;

中国科学院理论物理研究所, 北京, 100080

1989 年 5 月 9 日收到

高维时空中 Schwarzschild 度规和 Reissner-Nordström 度规的系数 g_{00} 与 g_{11} 都满足关系式 $g_{00}g_{11} = -1$. 本文考虑这个度规系数的关系式在荷电球体内部成立, 而且假设电荷密度 $\sigma = \sigma_0 r^b e^{-\lambda(r)/2}$ 的情况下, 给出高维球对称时空中静态荷电的一个精确内解.

PACC: 0420

一、引 言

最近几年由于超弦理论发展^[1-3] (要求时空是 $1+9$ 维) 和 Kaluza-Klein 理论在宇宙极早期研究中应用^[4] (要求时空是 $1+10$ 维), 促使人们去研究高维时空的物理问题, Emelyanov 等人曾详细评述过高维时空研究的现状^[5]. Myers 等人求得了高维时空的 Schwarzschild 度规, Reissner-Nordström 度规和 Kerr 度规^[6]. 许殿彦求得了高维时空的 Reissner-Nordström-de Sitter 度规和 Kerr-de Sitter 度规^[7]. Krori 等人求得了密度 $\rho = \text{const}$ 时的高维时空中 Schwarzschild 内解^[8]. 我们曾给出了高维静态球对称时空的 Wyman 解^[9], 以及物质密度为 $\rho = \mu r^2$, 电荷密度为 $\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\lambda(r)}{2}}$ 条件下的高维球对称静态时空荷电内解^[10].

本文讨论高维静态球对称时空中荷电的内部解. 在假设度规系数满足 $g_{00}g_{11} = -1$, 电荷密度为 $\sigma = \sigma_0 r^b e^{-\frac{\lambda(r)}{2}}$ 的条件下, 严格求解了高维 Einstein-Maxwell 场方程, 给出了它的精确内解, 并得到了高维时空中荷电球体的电磁质量计算公式和总引力质量的计算公式.

当维数 $D = 4$, 电荷密度 $\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\lambda(r)}{2}}$ (即 $b = 0$) 时, 本文结果回到 Tiwari 的结果^[11].

* 国家自然科学基金和中国科学院上海天文台台长基金资助的课题.

二、高维时空中 Einstein-Maxwell 场方程

对于 D 维时空 ($D \geq 4$), 若选用球坐标 $(t, r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n+1})$, 其中 $n = D - 3$, 则一般静态球对称度规为

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_n d\theta_{n+1}^2). \quad (1)$$

D 维时空中, Einstein-Maxwell 场方程为

$$R_{\mu\nu} = H \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-2} g_{\mu\nu} T_k^k \right). \quad (2)$$

这里

$$\begin{aligned} H &= -8\pi G, \\ T_\mu^\nu &= M_\mu^\nu + E_\mu^\nu, \\ M_\mu^\nu &= \text{diag}(\rho, \underbrace{-p, -p, \dots, -p}_{n+2}), \end{aligned} \quad (3)$$

式中 ρ 为密度, p 为压强,

$$E_\mu^\nu = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\nu i} F_{\mu i} - \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F^{ij} F_{ij} \right], \quad (4)$$

$$F_{\alpha\beta} = A_{\alpha;\beta} - A_{\beta;\alpha} = A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}, \quad (5)$$

A_α 为 D 维时空的电磁矢势。

由(1)式经过冗长繁复的计算可得不为零的 Ricci 张量为

$$\begin{aligned} R_{00} &= -e^{\nu-\lambda} \left[\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \nu'^2 - \frac{1}{4} \lambda' \nu' + \frac{n+1}{2r} \nu' \right] \\ R_{11} &= - \left[-\frac{1}{2} \nu'' - \frac{1}{4} \nu'^2 + \frac{1}{4} \lambda' \nu' + \frac{n+1}{2r} \lambda' \right], \\ R_{22} &= - \left[\frac{r}{2} e^{-\lambda} (\lambda' - \nu') + n(1 - e^{-\lambda}) \right], \\ R_{i+2, i+2} &= R_{i+1, i+1} \sin^2 \theta_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

对于静态时空电磁场 $F_{\alpha\beta}$ 只有角标等于 01 或 10 的两个分量不为零, 即 $F_{01} = -F_{10} = Q/r^{n+1}$, 相应的电磁矢势 A_α 只有 0 分量不为零, 即 $A_0 = Q/nr^n$, Q 为孤立的静止点电荷。

令

$$\tilde{E}^2 = -F_{01} F^{01}, \quad (7)$$

而

$$Q_{(r)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \int_0^r \sigma e^{\frac{\lambda}{2}} r^{n+1} dr = \tilde{E} r^{n+1}. \quad (8)$$

令

$$\sigma = \sigma_0 r^b e^{-\frac{\lambda}{2}}, \quad (9)$$

σ_0 为常数。则

$$\tilde{E} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{\sigma_0}{n+b+2} r^{b+1} = c_0 \sigma_0 \frac{r^{b+1}}{n+b+2}. \quad (10)$$

$$\text{这里 } c_0 = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

由(2)–(6)式, 经过适当运算, 可得场方程为

$$e^{-\lambda} \left[\frac{\lambda'}{r} - \frac{n}{r^2} \right] + \frac{n}{r^2} = \frac{-2H}{n+1} \rho + \frac{-H}{4\pi(n+1)} \tilde{E}^2, \quad (11)$$

$$e^{-\lambda} \left[\frac{\nu'}{r} + \frac{n}{r^2} \right] - \frac{n}{r^2} = \frac{-2H}{n+1} p - \frac{-H}{4\pi(n+1)} \tilde{E}^2, \quad (12)$$

$$e^{-\lambda} \left[\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \nu'^2 - \frac{1}{4} \lambda' \nu' - \frac{n\lambda + \nu}{2r} - \frac{n}{r^2} \right] + \frac{n}{r^2} = \frac{-H}{4\pi} \tilde{E}^2. \quad (13)$$

三、场方程求解

高维时空中 Schwarzschild 度规和 Reissner-Nordström 度规分别为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0^n}{r^n}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_0^n}{r^n}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \cdots + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cdots \sin^2 \theta_n d\theta_{n+1}^2), \quad (14)$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0^n}{r^n} + \frac{\lambda^{2n}}{r^{2n}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_0^n}{r^n} + \frac{\lambda^{2n}}{r^{2n}}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \cdots + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cdots \sin^2 \theta_n d\theta_{n+1}^2), \quad (15)$$

式中 $r_0^n = \frac{2GM}{n}$, $\lambda^{2n} = \frac{2GQ^2}{n(n+1)}$, M 为黑洞的质量, Q 为黑洞的电荷。它们的度规系数均满足 $g_{00}g_{11} = -1$ 。

假设关系 $g_{00}g_{11} = -1$ 成立的条件下, 求解方程(11)–(13)。

由

$$g_{00}g_{11} = -1, \quad (16)$$

可得

$$\lambda = -\nu. \quad (17)$$

利用(11)、(12)式, 便有

$$\rho = -p. \quad (18)$$

再由(13)式, 得到

$$\left[\frac{1}{2} (e^{-\lambda})'' + \frac{n-1}{2r} (e^{-\lambda})' - \frac{n}{r^2} e^{-\lambda} \right] + \frac{n}{r^2} = \frac{-H}{4\pi} \tilde{E}^2. \quad (19)$$

令

$$e^{-\lambda} = y, \quad (20)$$

则(19)式化为

$$y'' + \frac{n-1}{r} y' - \frac{2n}{r^2} y + \frac{2n}{r^2} = \frac{-H}{2\pi} \tilde{E}^2. \quad (21)$$

将(10)式代入(21)式得到

$$y'' + \frac{n-1}{r} y' - \frac{2n}{r^2} y + \frac{2n}{r^2} = \frac{-H}{2\pi} c_0^2 \sigma_0^2 \frac{r^{2(b+1)}}{(n+b+2)^2}. \quad (22)$$

解此微分方程得

$$e^{-\lambda} = y = c_1 r^2 + c_2 r^{-n} + 1 + \frac{-H c_0^2 \sigma_0^2 r^{2(b+2)}}{4\pi(n+b+2)^2(b+1)(2b+n+4)}, \quad (23)$$

式中 c_1, c_2 为积分常数。

由(18)、(10)、(23)和(11)式或(12)式, 便得

$$\frac{-2H}{n+1} \rho = -(n+2)c_1 - \frac{-H c_0^2 \sigma_0^2 r^{2(b+1)}}{4\pi(n+1)(b+1)(b+n+2)}, \quad (24)$$

$$\frac{-2H}{n+1} p = (n+2)c_1 + \frac{-H c_0^2 \sigma_0^2 r^{2(b+1)}}{4\pi(n+1)(b+1)(b+n+2)}. \quad (25)$$

当 $r > a$ 时, a 为高维荷电球体半径, 由(15)、(23)式可得

$$M(r) = \frac{1}{n+1} \frac{Q^2}{r^n} - \frac{n}{2G} c_2 - \frac{n}{2G} c_1 r^{n+2} - \frac{n}{2G} \frac{-H c_0^2 \sigma_0^2 r^{2(b+2)+n}}{4\pi(b+n+2)^2(b+1)(2b+n+4)}. \quad (26)$$

当 $r = a$ 时, 有

$$M = \frac{c_0^2 \sigma_0^2}{(b+n+2)^2(b+1)(2b+n+4)} \cdot \left[\frac{(b+1)(2b+n+4)}{n+1} - \frac{n(-H)}{8\pi G} \right] a^{2(b+2)+n} - \frac{n}{2G} c_2 - \frac{n}{2G} c_1 a^{n+2}. \quad (27)$$

这是高维荷电球体的总引力质量公式。

对于高维荷电球体而言, 当积分常数 c_1, c_2 取定值后, (24), (25), (27) 三式分别决定了密度、压强和引力质量等。所有这三种物理量都依赖于荷电密度 σ , 当球体不荷电时, 只需适当选取积分常数, 这些物理量便全为零。此时, 这个模型的总引力质量仅仅是出于电磁源。

四、两个特例

1) 当 $D = 4$ 时, 取(9)式中 $b = 0$, 则

$$\sigma(r) = \sigma_0 e^{-\frac{1}{2}r}. \quad (28)$$

此时

$$E(r) = \frac{4\pi\sigma_0}{3} r, \quad (29)$$

$$Q(r) = \frac{4\pi\sigma_0}{3} r^3. \quad (30)$$

再取

$$c_1 = -\frac{16}{9} \pi^2 \sigma_0^2 a^2, \quad c_2 = 0.$$

由(24),(25),(23)式分别得到

$$\rho(r) = \frac{2\pi}{3} \sigma_0^2 (a^2 - r^2), \quad (31)$$

$$p(r) = \frac{2\pi}{3} \sigma_0^2 (r^2 - a^2), \quad (32)$$

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{16\pi^2 \sigma_0^2 r^2}{45} (5a^2 - 2r^2). \quad (33)$$

由(27)式可得到总引力质量公式

$$M = \frac{64}{45} \pi^2 \sigma_0^2 a^3. \quad (34)$$

这个解正是文献[11]中所给出的结果.

2) 当 $D = 4$ 时, 取(9)式中 $b = \alpha$, 则

$$\sigma(r) = \sigma_0 r^\alpha e^{-\frac{1}{2}r}.$$

此时

$$E(r) = \frac{4\pi\sigma_0}{\alpha+3} r^{\alpha+1}, \quad (35)$$

$$Q(r) = \frac{4\pi\sigma_0}{\alpha+3} r^{\alpha+3}. \quad (36)$$

再取 $c_2 = 0$, 由(24),(25),(23)式分别得

$$8\pi\rho = -3c_1 - \frac{16\pi^2\sigma_0^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} r^{2(\alpha+1)}, \quad (37)$$

$$8\pi p = 3c_1 + \frac{16\pi^2\sigma_0^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} r^{2(\alpha+1)}, \quad (38)$$

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = c_1 r^2 + 1 + \frac{32\pi^2\sigma_0^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)^2(2\alpha+5)}. \quad (39)$$

由(27)式可得到总引力质量公式

$$M = \frac{8\pi^2\sigma_0^2(2\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+3)(2\alpha+5)} a^{2\alpha+5} - \frac{c_1}{2} a^3. \quad (40)$$

这个解正是文献[12]中所给出的结果。

- [1] J. H. Schwarz, *Superstrings*, World Scientific, Singapore, (1985).
- [2] S. Weinberg *et al.*, *Physics in Higher Dimensions*, World Scientific, Singapore, (1986).
- [3] S. Weinberg *et al.*, *Strings and Superstrings*, World Scientific, Singapore, (1986).
- [4] T. Koikawa and K. Maeda, *Phys. Lett.*, **B149**(1984), 82.
- [5] V. Emelyanov *et al.*, *Phys. Rep.*, **143**(1986), 1.
- [6] R. C. Myers and M. T. Perry, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **172**(1986), 304.
- [7] XU Dianyan, *Class. Quantum Grav.*, **5**(1988), 871.
- [8] K. D. Krori *et al.*, *Phys. Lett.*, **A132**(1988), 321.
- [9] 沈有根, 科学通报, **34**(1989), 855.
- [10] 沈有根, 科学通报, **34**(1989), 1590.
- [11] R. N. Tiwari, J. R. Rao and R. R. Kanakamedela, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 489.
- [12] 韩继昌, 天文学报, **30**(1989), 34.

EXACT INTERIOR SOLUTION FOR A STATIC CHARGED SPHERE IN THE HIGHER DIMENSIONAL SPACE-TIME

SHEN YOU-GEN

Shanghai Observatory, Academia Sinica, Shanghai, 200030;
Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080
(Received 9 May 1989)

ABSTRACT

In the higher-dimensional space-time, the metric coefficients g_{00} and g_{11} of both the Schwarzschild and Reissner-Nordström metrics satisfy the relation $g_{00}g_{11} = -1$. By considering that the relation between the metric coefficients is valid inside a charged perfect-fluid distribution, and assuming the mass density $\sigma = \sigma_0 r^b e^{-\frac{\lambda(r)}{2}}$, we obtain an exact interior solution for a static charged sphere in the higher-dimensional space-time.

PACC: 0420