

一种新的引力波天线支承方案*

郑 庆 璋

中山大学物理系, 广州, 510275

1989 年 4 月 17 日收到

本文提出一种多索均匀悬挂的引力波天线支承方案, 尽可能减少天线中的支承应变, 避免产生附加的激发声子噪声, 并证明它对天线系统的本征频率和 Q 值的影响可以忽略, 因而可能是一种比较理想的支承方案。

PACC: 0480; 0430

一、引 言

机械共振型引力波天线的理想支承应是不影响天线的本征频率和不降低天线系统的 Q 值, 同时也不增加额外的噪声。一种接近理想的支承方式是超导悬浮, 但在技术上仍然存在一定的困难^[1]。目前比较多采用的是使支承点尽可能与天线的节点一致, 正如 Weber 最初所做的^[2]。然而, Weber 的方法除了稳定性不好之外, 还由于在重力作用下天线处于紧张的预应力状态, 蕴藏着一定数量的应变能(见附录中第一节), 这相当于束缚了一定数量的声子, 一旦被某种偶然的因素激发, 便会释放出来形成附加的噪声^[3], 给引力波探测带来额外的干扰, 对进一步提高天线的灵敏度无疑是一个障碍。近年采用的一些提高天线稳定性的支承方式^[4,5], 虽然对天线系统的 Q 值和本征频率影响甚微^[6,7], 但其中的支承应变仍然是不可忽略的。

本文提出一种多索均匀悬挂支承方案, 证明它对天线系统的本征频率和 Q 值的影响可以忽略, 同时因支承而引起的应变亦可随意减小, 因而可能是一种比较理想的支承方案。

二、多索均匀悬挂天线的运动方程和边界条件

假定圆柱体引力波天线用 n 对悬索均匀悬挂(图 1), 天线的质量为 M , 长度为 $2L$, 悬索长为 l , 第 i 个悬点至天线中点(质心) O 的距离为

$$a_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{L}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助的课题。

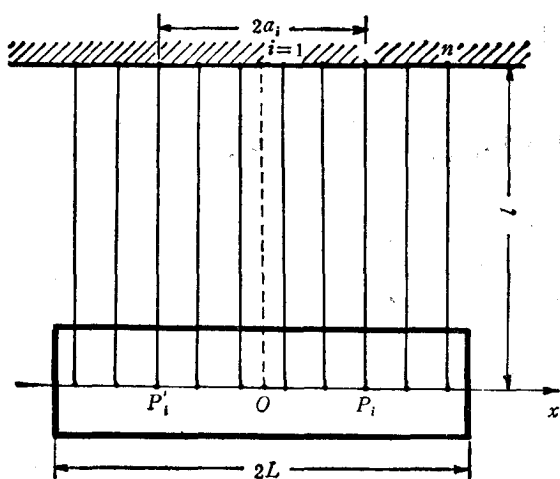


图1 多索均匀悬挂支承方案示意图

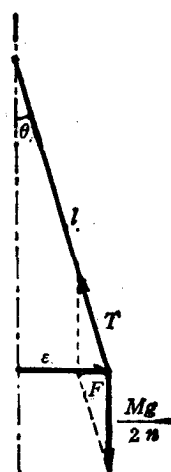


图2 悬挂点受力示意图

若悬点 $P(x)$ 在时刻 t 的位移为 $\xi(x, t)$, 则它所受的恢复力由(图2)易见为

$$F = -\frac{Mg}{2n} \tan \theta \approx -\frac{Mg}{2n} \frac{\xi(x, t)}{l}. \quad (2)$$

根据弹性力学中的圣维南原理^[6], 可以把有关的恢复力看成是作用在悬挂点上具有 δ 函数形式的力密度, 于是作用在第 i 个悬挂点 $P_i(x = a_i)$ 上相应的力密度为

$$f_i = F \delta(x - a_i) / \rho,$$

式中 $\rho = M/2L$ 为天线的质量线密度. 利用(2)式和令 $g/l = \omega_g^2$, 则上式化为

$$f_i = -\frac{L}{n} \omega_g^2 \xi(x, t) \delta(x - a_i). \quad (3)$$

积分(3)式不难证明作用在 $P_i(a_i)$ 点上总的恢复力 F_i 具有(2)式的形式. 同样, 作用于另一端上对应的悬挂点 $P'_i(x = -a_i)$ 上的力密度为

$$f'_i = -\frac{L}{n} \omega_g^2 \xi(x, t) \delta(x + a_i). \quad (4)$$

由此可得天线沿 x 方向运动的波动方程^[8]

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{L}{n} \omega_g^2 \xi(x, t) \sum_{i=1}^n [\delta(x - a_i) + \delta(x + a_i)]. \quad (5)$$

令 $\xi(x, t) = u(x)v(t)$, 代入上式整理后得

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u = \frac{L}{n} \frac{\omega_g^2}{c^2} u(x) \sum_{i=1}^n [\delta(x - a_i) + \delta(x + a_i)], \quad (6)$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \omega^2 v = 0, \quad (7)$$

式中 ω^2 为一与 x 和 t 无关的常数. 由典型的谐振方程(7)可见, ω 为天线振动的本征频率.

对于以 O 为原点的天线质心坐标系, 天线振动具有几何对称性, 即 $u(-x) = -u(x)$.

因而只需求 $0 \leq x \leq L$ 区间内 $u(x)$ 的解. 引入波矢 k , 令 $\omega^2/c^2 = k^2$, $\omega_g^2/c^2 = k_g^2$, 可把(6)式改写成

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = \frac{L}{n} k_g^2 u(x) \sum_{i=1}^n \delta(x - a_i) \quad 0 \leq x \leq L. \quad (8)$$

除了奇点 $x = a_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) L/n$ 外, (8)式的通解为

$$u_i(x) = A_i \cos kx + B_i \sin kx \quad \left(i - \frac{1}{2}\right) L/n < x < \left(i + \frac{1}{2}\right) L/n, \\ i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

这些通解必须满足以下的边界条件:

1) 由 $u(-x) = -u(x)$, 有

$$u_0(0) = 0. \quad (10)$$

2) 由天线的连续性有

$$u_i(a_i) = u_{i-1}(a_i) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

3) 另一组边界条件可从 $x = a_i - \epsilon$ 至 $x = a_i + \epsilon$ (其中 ϵ 为无穷小量) 积分 (8) 式得到

$$\left. \frac{du_{i+1}}{dx} \right|_{x=a_i} - \left. \frac{du_i}{dx} \right|_{x=a_i} = \frac{L}{n} k_g^2 u_i(a) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

这些式子表明, 应变在奇点 $x = a_i$ 处不连续, 这正是由于在该处有附加的外力作用的缘故.

4) 最后一个边界条件由于天线的端点 $x = L$ 处是自由端, 不存在应变而得到

$$\left. \frac{du_n}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (13)$$

总之, (9)式表达的 $n+1$ 个通解中, 共有 $2(n+1)$ 个待定积分常数. 这些积分常数由 $2(n+1)$ 个边界条件联系着, 原则上问题就可以解决.

三、多索均匀悬挂对本征频率的影响

鉴于我们的目标是求天线的本征频率 ω (因而求 k) 的值, 因而可以在一定的条件下采用微扰法求近似解.

设 $k^2 \gg k_g^2$ (以后证明这是符合实际的), (8) 式的零级近似为

$$u(x) = u^0(x) \quad (14)$$

相应地 $k = k_0$, 即

$$\frac{d^2 u^0}{dx^2} + k_0^2 u^0 = 0. \quad (15)$$

由边界条件 $u^0(0) = 0$ 和 $\left. \frac{du^0}{dx} \right|_{x=L} = 0$, 得(15)式的解为

$$u^0(x) = B^0 \sin k_0 x, \quad (16)$$

式中 $k_0 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi/L$ $m = 0, 1, 2, \dots$.

以 $u^0(x)$ 乘(8)式并对 x 积分, 得

$$\int_0^L u^0(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k^2 \int_0^L u^0(x) u(x) dx = \frac{L}{n} k_g^2 \sum_{i=1}^n u^0(a_i) u(a_i), \quad (17)$$

上式等号左端第一项可以利用分部积分化简, 注意到(15)式, (17)式化为

$$(k^2 - k_0^2) \int_0^L u^0(x) u(x) dx = \frac{L}{n} k_g^2 \sum_{i=1}^n u^0(a_i) u(a_i),$$

即

$$k^2 = k_0^2 \left[1 + \frac{k_g^2}{k_0^2} \frac{\frac{L}{n} \sum_{i=1}^n u^0(a_i) u(a_i)}{\int_0^L u^0(x) u(x) dx} \right]. \quad (18)$$

作为一级近似, 令(18)式等号右端 $u(x) = u^0(x) = B^0 \sin k_0 x$, 注意到 $a_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)$

$\cdot L/n$, 则由(18)式得

$$k_1^2 = k_0^2 \left[1 + \frac{k_g^2}{k_0^2} \frac{L}{n} \frac{\sum_{i=1}^n \sin^2 \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(i - \frac{1}{2}\right) \pi/n}{\int_0^L \sin^2 \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} x dx} \right] = k_0^2 \left(1 + \frac{k_g^2}{k_0^2} \right), \quad (19)$$

即

$$k_1 \approx k_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k_g^2}{k_0^2} \right). \quad (20)$$

以 $k_1 = \omega_1/c$, $k_0 = \omega_0/c$ 和 $k_g = \omega_g/c$ 代入, 得天线振动一级近似的本征(圆)频率为

$$\omega_1 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_g^2}{\omega_0^2} \right), \quad (21)$$

式中 $\omega_0 = k_0 c = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi c/L$ 为天线自由振动(即零级近似)的本征(圆)频率。

四、多索均匀悬挂对天线系统 Q 值的影响

对于现在的多索均匀悬挂, 第 i 对悬挂系统所相应的 Q 值显然应与文献[6]中的(12)式有相同的表式, 只是式中的 a 应改为 $2a_i$, L 改为 $2L$, M 改为 M/n (这是因为现在有 n 对悬索均匀分担天线的重量), 而 m, β, Q 和 ω_g 等由于假定各支承点都有相同的性质, 因而彼此一致。这样, 第 i 对悬挂系统所相应的 Q 值应为

$$Q_i = \frac{m\omega[(Q^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]}{4\beta\left(\frac{M}{n}\right)\omega_g^4 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{a_i}{L}\right)}. \quad (22)$$

若整个悬挂系统所相应的 Q 值为 Q' , 则按定义

$$\frac{1}{Q'} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} = \frac{4\beta M \omega_g^4}{nm\omega[(Q^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]} \sum_{i=1}^n \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{a_i}{L}\right).$$

以 $a_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)L/n$ 代入, 并注意到 $\sum_{i=1}^n \sin^2\left(i - \frac{1}{2}\right)\pi/2n = n/2$, 得

$$Q' = \left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{\omega}{2\beta}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^4 \left[\left(1 - \frac{Q^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\beta}{\omega}\right)^2\right], \quad (23)$$

而整个天线系统的 Q 值则为

$$Q = \frac{Q_0 Q'}{Q_0 + Q'} = Q_0 \left(1 + \frac{Q_0}{Q'}\right)^{-1} \quad (24)$$

式中 Q_0 为天线本身所具有的 Q 值.

五、讨 论

1. 首先作一些数值估计. 假定天线振动的本征振动基模频率为 10^3 Hz , 即 $\omega_0 \approx 2\pi \times 10^3$, 若悬索的长度为 $l \approx 1 \text{ m}$, 则与悬索等长的单摆的本征(圆)频率为 $\omega_g = \sqrt{g/l} \approx 10^{1/2} \text{ s}^{-1}$. 按(21)式得天线本征频率变化的一级近似为

$$\frac{\Delta\omega_1}{\omega_0} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_g^2}{\omega_0^2} \approx \frac{10}{2 \times (2\pi \times 10^3)^2} \approx 10^{-7}.$$

它只相当于温度变化 10^{-3} K 所引起的频率变化^[9], 因此是完全可以忽略的.

2. 由(20)式可见, $k_1 > k_0$. 再由波长 $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ 和 $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ 可知, $\lambda_1 < \lambda_0$, 因而可以推测天线振动的振幅包络的示意图如图 3. 其中点画线为自由振动(即零级近似)时天线振动的振幅包络, 实线为多索均匀悬挂(当 $n=3$)时的振幅包络. 由图 3 可见, 当 $\omega_0 \gg \omega_g$ 和 $n \gg 1$ 时, 实线和点画线十分接近, 说明此时与自由振动已没有多大差别.

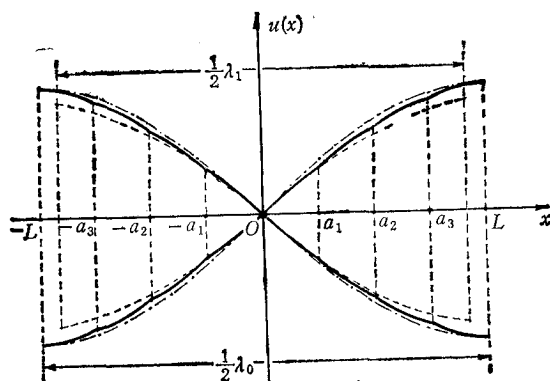


图 3 天线振动的振幅包络示意图

3. 对天线系统 Q 值的估计比较困难, 原因是影响(23)式中各等效量的因素太复杂, 难于作出中肯的判断. 下面只能作一个极其粗略然而又是合理的估算.

假定 $m/M \approx 10^{-4}$, $(\omega/\omega_g)^2 \approx 10^7$, $Q/2\beta = Q_s \approx 10$ (悬挂点的 Q 值), $\omega/Q \approx 10$ 或 10^{-1} ; 则按(23)式有

$$Q' = \left(\frac{m}{M}\right) \left(\frac{\omega}{Q} \cdot \frac{Q}{2\beta}\right) \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{Q^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\beta}{Q} \cdot \frac{Q}{\omega}\right)^2 \right]$$

$$\approx (10^{-4})(10 \times 10)(10^{14})[(1 - 10^{-2})^2 + (10^{-1} \times 10^{-1})^2]$$

$$\approx 10^{12} \quad \text{当 } \omega/Q \approx 10 \text{ 时;}$$

或

$$Q' \approx (10^{-4})(10^{-1} \times 10)(10^{14})[(1 - 10^2)^2 + (10^{-1} \times 10)^2]$$

$$\approx 10^{14} \quad \text{当 } \omega/Q \approx 10^{-1} \text{ 时.}$$

即使 $Q_0 \approx 10^4$, 仍然有 $Q' \gg Q_0$, 即 $Q \approx Q_0$.

当然, 上面的估计比较理想化, 实际情况会复杂很多. 但是可以肯定, 只要采取适当的措施, 完全可以使 Q 值不致有较大的下降.

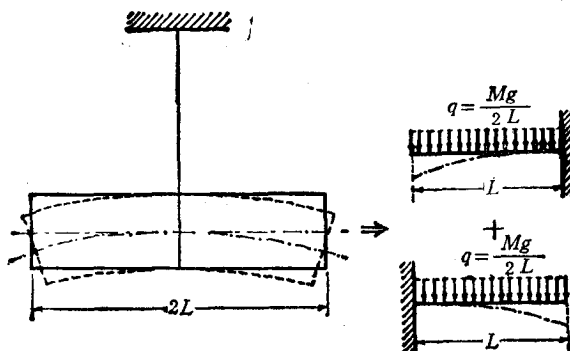
4. 采用多索均匀悬挂支承方案的最大好处是消除支承应变. 显然, 如果悬索的对数 n 足够大, 则天线中因重量形变而出现的预应力可以任意地减少(见附录中第二节), 因而也就消除了一种潜在的噪声源, 对进一步提高天线的灵敏度十分有利.

5. 采用多索均匀悬挂的支承方案还可以任意增加天线棒的长度而不致过于弯曲, 使之适应于低频引力波的探测. 大家知道, 天线的吸收截面正比于天线长度的平方^[10], 增加天线的长度无疑对提高灵敏度是大有好处的.

附 录

悬挂方式与天线中的应变能

1. 按 Weber 的悬挂方式, 左右两半天线相当于两条承受均匀荷载的悬臂梁(附录图 1). 忽略剪应变时梁的应



附录图 1 单索悬挂时天线形变示意图

变能量为^[1]

$$U = \int \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (\text{A.1})$$

式中 E, I 和 v 分别为梁的杨氏模量、横截面的转动惯量和挠度, x 为从固定端算起的中线坐标. 承受均匀荷载的悬臂梁挠度曲线的曲率为

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{q}{2EI} (l - x)^2, \quad (\text{A.2})$$

式中 $q = mg/l$ 为荷载力的线密度, m 为梁的质量, g 为重力加速度, l 为梁的长度.

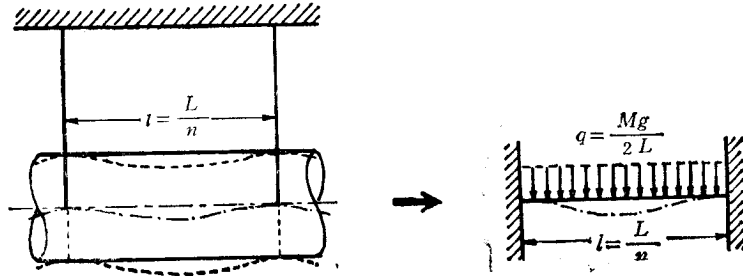
1) 本附录中所引用的公式均采自 S. 铁摩辛柯等著《材料力学》, 科学出版社, 北京, (1978), 第六和第七章.

对于质量为 M , 长度为 $2L$, 直径为 d 的单索悬挂圆柱体天线, $q = \frac{Mg}{2L}$, $l = \pi d^4/64$. 于是由(A.1) 和 (A.2)

式得

$$U_1 = 2 \int_0^L \frac{EI}{2} \left[\frac{q}{2EI} (L-x)^2 \right]^2 dx = \frac{4M^2 g^2 L^3}{5\pi d^4 E}. \quad (\text{A.3})$$

2. 在 $2n$ 条悬索均匀悬挂的情况下, 每两索之间一段天线的变形如同两端固定梁在均匀荷载(重力)作用下的情形一样(附录图 2). 此时梁的挠度曲线的曲率为



附录图 2 多索均匀悬挂时天线形变示意图

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{q}{12EI} (l^2 - 6lx + 6x^2). \quad (\text{A.4})$$

故两悬索之间一小段天线的弹性应变能为

$$\Delta U_{1n} = \int_0^{L/n} \frac{EI}{2} \left[\frac{q}{12EI} (l^2 - 6lx + 6x^2) \right]^2 dx = \frac{M^2 g^2 L^3}{90n^3 \pi d^4 E}. \quad (\text{A.5})$$

整条天线的悬挂应变弹性能为

$$U_{1n} = 2n \cdot \Delta U_{1n} = \frac{M^2 g^2 L^3}{45n^2 \pi d^4 E} = \frac{1}{36n^2} U_1. \quad (\text{A.6})$$

3. 若 $M \approx 10^6 \text{g}$, $L \approx 10^3 \text{cm}$, $d \approx 50 \text{cm}$, $E \approx 7 \times 10^{11} \text{dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$, $g \approx 10^3 \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$, 则

$$U_1 = \frac{4M^2 g^2 L^3}{5\pi d^4 E} \approx \frac{4 \times (10^6)^2 \times (10^3)^3 \times (10^3)^3}{5 \times 3 \times (50)^4 \times (7 \times 10^{11})} \approx 10^9 \text{erg}$$

相当于频率 $\nu \approx 10^3 \text{Hz}$ 的声子总数为

$$N_{p1} = \frac{U_1}{h\nu} \approx \frac{10^9}{(6.6 \times 10^{-27}) \times 10^3} \approx 10^{28}.$$

平均每个晶格的声子数(声子数密度)为

$$n_{p1} = \frac{N_{p1}}{\frac{M}{\mu_{A1}} \cdot N_A} \approx \frac{10^{28}}{\frac{10^6}{27} \times (6 \times 10^{23})} \approx 10^{-1},$$

式中 $\mu_{A1} = 27$ 为天线 (Al) 的克分子量, $N_A = 6 \times 10^{23}$ 为阿佛加德罗常数. 注意到应变能不是均匀分布的, 且容易证明最大应变能量密度是平均应变能量的 10 倍, 可见在最大应变区内, 平均每个晶格内束缚着几个频率 $\nu \approx 10^3 \text{Hz}$ 的声子, 因而是一种值得注意的潜在噪声源.

4. 对于多索均匀悬挂, 当 $n = 10$ (即用 20 条索悬挂) 时, 声子总数和密度分别降为

$$N_{p2} = \frac{U_{1n}}{h\nu} = \frac{1}{36n^2} \frac{U_1}{h\nu} = \frac{1}{36n^2} N_{p1} \approx 10^{23},$$

$$n_{p2} = \frac{1}{36n^2} n_{p1} \approx 10^{-6}.$$

即束缚声子数降低了 5 个数量级, 可见效果是十分显著的.

[1] D. G. Blair, in *Gravitational Radiation*, ed. N. Deruelle & T. Piran, North-Holland Pub. Comp., (1983), p. 374.

[2] J. Weber, *Phys. Rev. Lett.*, 17(1966), 1228; *ibid.* 22(1969), 1320.

- [3] K. Narihara & H. Hirakawa, *Jap. J. App. Phys.*, 15(1976), 833.
- [4] M. Bassan *et al.*, Proc. of 3rd M. Grossmann Meeting on General Relativity, North-Holland Pub. Comp., (1983), p. 667.
- [5] W. S. Davis *et al.*, Proc. of 3rd M. Grossmann Meeting on General Relativity, North-Holland Pub. Comp., (1983), p. 1433.
- [6] 郑庆璋, 中山大学学报(自然科学版), 26(4)(1987), 99.
- [7] 郑庆璋, 中山大学学报(自然科学版), 28(1)(1989), 31.
- [8] 徐芝纶, 弹性力学(上册), 1982年第二版, 人民教育出版社, p. 25; 382.
- [9] 郑庆璋, 崔世治, 中山大学学报(自然科学版), 21(1)(1982), 114.
- [10] C. W. Misner *et al.*, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, (1973), chap. 37.

A NEW SUPPORTING SCHEME FOR GRAVITATIONAL WAVES ANTENNA

ZHENG QING-ZHANG

Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou, 510275

(Received 17 April 1989)

ABSTRACT

In this paper, we have proposed a multiple wires homogeneous suspending fashion for gravitational waves antenna, showed that the strain caused by suspending in the antenna can be reduced arbitrarily to avoid the additional noise excited by restricted phonons, and also proved that the influence of this suspending fashion upon the eigen frequency and the Q factor of the antenna can be neglected. Thus, this suspending fashion may be a perfect supporting scheme.

PACC: 0480; 0430