

二分岔理论的抛物线近似

谭维翰 刘仁红

中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海, 201800

1989年8月28日收到

本文提出二分岔理论的抛物线近似处理. 由此可看出由不稳导致分岔, 分岔致稳, 分岔的极限便是混沌等一系列特点.

PACC: 0545; 0540

一、分岔致稳定态指标及其跃迁规则

由二分岔发展进一步向混沌过渡的理论^[1,2], 一直受到人们的重视, 因为它是向混沌过渡的重要形式之一. 通过数值计算对分岔结构及其普适性已有比较清楚的理解, 但关于其解析性质, 还可以作进一步探讨. 为此, 本文提出二分岔的抛物线近似, 这样可以清楚地看出由不稳导致分岔, 分岔能够致稳, 分岔的极限便是混沌这样一些特点.

由叠代式

$$x_n = p - x_{n-1}^2. \quad (1)$$

得

$$\delta x_n = -2x_{n-1}\delta x_{n-1} = (-2x_{n-1}) \cdots (-2x_0)\delta x_0. \quad (2)$$

当 $\left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| = 2^n |x_{n-1} \cdots x_0| > 1$ 时, 叠代是不稳定的, $\left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| = 2^n |x_{n-1} \cdots x_0| < 1$ 时是稳定的. 根据这点可解出各次分岔点如下:

$$x_0 = p - x_0^2, \quad (3)$$

$$x_0^\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4p}}{2}. \quad (4)$$

当 $-0.25 < p < 0.75$, $|2x_0^-| = |-1 - \sqrt{1+4p}| > 1$ 是不稳定的, $|2x_0^+| = |-1 + \sqrt{1+4p}| < 1$ 是稳定的. 但当 $p > 0.75$ 时, $|2x_0^+| > 1$ 也是不稳定的. 于是可考虑在 $p > 0.75$ 的二次叠代方程.

$$x_1 = p - x_0^2 = p - (p - x_1^2)^2. \quad (5)$$

即

$$(x_1^2 + x_1 - p)(x_1^2 - x_1 - p + 1) = 0. \quad (6)$$

由 $x_1^2 - x_1 - p + 1 = 0$ 给出

$$x_1^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{4p-3}}{2}, \quad |2x_1^+ 2x_1^-| = 4|1-p| \leq 1,$$

当 $0.75 \leq p \leq 1.25$ 是稳定的, 但当 $p > 1.25$ 时又是不稳定的了, 又要进一步分岔. 若称

(4)式当 $x_0^* = -0.25$ 是零次分岔, 则 $p = 0.75, 1.25$ 分别是叠代的第 1、第 2 次分岔点, 如图 1 所示.

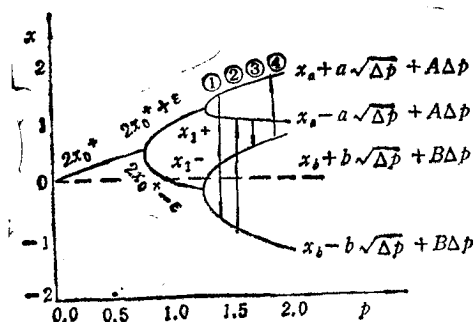


图 1

在第一次分岔点 $p = 0.75$, 由 $2x_0^* = 1$ 过渡到 $2x_1^* = 2x_0^* \pm \epsilon$, $|(2x_0^* + \epsilon)(2x_0^* - \epsilon)| = |1 - \epsilon^2| < 1$ 系统变为稳定的. 但当 p 继续增大, 以至 $p \geq 1.25, 2x_1^+ 2x_1^- = 4(1-p) \leq -1$ 系统又变为不稳定的. 又需要进一步分岔, 亦即第二次分岔使系统成为稳定的. 由图 1 还可以看到当 $p < 0.75$ 时, 经过多次叠代, 只能出现一个稳定的状态, 用 ϕ 标志, 具有稳定的 $x = x_0^*$. 当 $0.75 < p < 1.25$, 经过多次叠代, 会出现两个稳定状态, 用 ϕ^{n_1} 标志, $n_1 = \pm$, 具有 $x = x_1^+, x_1^-$. 同样当 $p > 1.25$ 时, 叠代出现的四个稳定状态用 $\phi^{n_1 n_2}$, $n_1 = \pm, n_2 = \pm$ 标志, 具有 $x = x_2^{++}, x_2^{+-}, x_2^{-+}, x_2^{--}$ (图 1 中箭头标出). 在叠代时, 这些定态间的跃迁规则为

一个定态 $\phi \rightarrow \phi$

两个定态 $\phi^+ \rightarrow \phi^- \rightarrow \phi^+$

四个定态 $\phi^{++} \xrightarrow{\text{①}} \phi^{--} \xrightarrow{\text{②}} \phi^{+-} \xrightarrow{\text{③}} \phi^{-+} \xrightarrow{\text{④}} \phi^{++}$

比较这些定态跃迁规则, 易于看出两个定态的跃迁规则包括在四个定态的跃迁规则中, 即 $\phi^{n_1 n_2}$ 第一指标 n_1 跃迁规则与 ϕ^{n_1} 中 n_1 跃迁规则同. 至于第二指标 n_2 , 在由第一指标的初态 + 离开时, 与第一指标 n_1 同样变化, 即 $++ \rightarrow +- \rightarrow -+ \rightarrow --$. 但当回到第一指标的初态时, 则与第一指标相反, 第二指标不变, 即 $\phi^{--} \xrightarrow{\text{②}} \phi^{+-}$. 为此我们在箭头下面划波纹号. 同样 $\phi^{-+} \xrightarrow{\text{④}} \phi^{++}$ 也是如此.

第三次分岔后, 有八个定态, 图 2 给出 $p = 1.3683997$ 时数值计算的这些定态的 x 值及箭头所示的跃迁规则.

$$\begin{aligned} \phi^{+++} &\xrightarrow{\text{①}} \phi^{---} \xrightarrow{\text{②}} \phi^{+-} \xrightarrow{\text{③}} \phi^{-+} \xrightarrow{\text{④}} \phi^{++} \xrightarrow{\text{⑤}} \phi^{+-} \xrightarrow{\text{⑥}} \phi^{-+} \xrightarrow{\text{⑦}} \phi^{++} \xrightarrow{\text{⑧}} \phi^{+++} \\ &\quad \xrightarrow{\text{⑦}} \phi^{+-} \xrightarrow{\text{⑧}} \phi^{+++} \end{aligned}$$

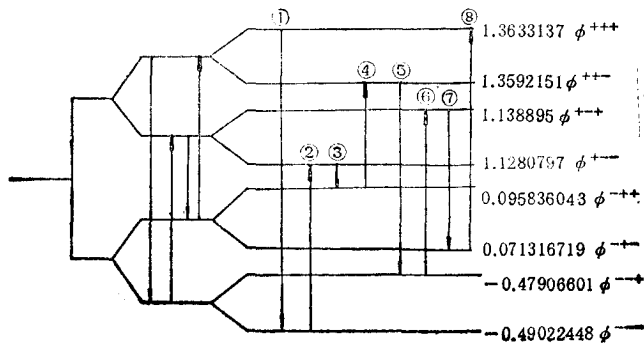


图 2

状态 $\phi^{n_1 n_2}$ 前两个指标 n_1, n_2 的跃迁规则已包括在 $\phi^{n_1 n_2}$ 中, 即与 $\phi^{n_1 n_2}$ 的 n_1, n_2 同. 第三个指标 n_3 的跃迁规则基本上与 n_2 同, 只是在回到 $\phi^{n_1 n_2}$ 的初态时与 n_2 相反, 即跃迁④与⑤, 也用 $\rightarrow$ 标出.

二、抛物线近似与 Feigenbaum 数计算

图 1 和图 2 所示的 x 与 p 的较为复杂的关系, 可用抛物线来近似. 在 $0.75 < p < 1.25$ 间为准确抛物线, $x^\pm = 0.5 \pm \sqrt{p - 0.75}$. 当 $p = 1.25$, $x_1^+ = 0.5 + \sqrt{0.5} = x_a$, $x_1^- = 0.5 - \sqrt{0.5} = x_b$. 当 $p > 1.25$ 时, 可用下式近似:

$$\begin{aligned} x_a + a\sqrt{\Delta p} + A\Delta p, \\ x_a - a\sqrt{\Delta p} + A\Delta p, \\ x_b + b\sqrt{\Delta p} + B\Delta p, \\ x_b - b\sqrt{\Delta p} + B\Delta p. \end{aligned} \quad (7)$$

将(7)式代入(1)式, 并参照图 1 所示的叠代①, 便得

$$\begin{aligned} x_b - b\sqrt{\Delta p} + B\Delta p &= p_0 + \Delta p - (x_a + a\sqrt{\Delta p} + A\Delta p)^2 \\ &\simeq p_0 + \Delta p - x_a^2 - a^2\Delta p - 2x_a a\sqrt{\Delta p} - 2x_a A\Delta p. \end{aligned}$$

即

$$-b = -2x_a a, \quad 2x_a A + B = 1 - a^2. \quad (8)$$

同样由叠代②可得

$$-a = 2x_b b, \quad 2x_b B + A = 1 - b^2. \quad (9)$$

又设这两个抛物线中, 有一个为准确抛物线^[2], 例如 $B = 0$, 则由(8), (9)式并注意到

$$2x_a 2x_b = -1,$$

可得

$$b = \frac{2x_a}{\sqrt{1 - 2x_a + (2x_a)^2}}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x_a + (2x_a)^2}}. \quad (10)$$

重要的是解(10)式可推广到第 n 次二分岔情形.

例如第三次二分岔, 类似于方程(8), (9)可写出

$$\begin{aligned} 2x_a A + B &= 1 - a^2, & (2x_a)(2x_b)(2x_c)(2x_d) &= -1, \\ 2x_b B + C &= 1 - b^2, \\ 2x_c C + D &= 1 - c^2, \\ 2x_d D + A &= 1 - d^2. \end{aligned} \quad (11)$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 - a^2 & 1 & & \\ 1 - b^2 & 2x_b & 1 & \\ 1 - c^2 & & 2x_c & 1 \\ 1 - d^2 & & & 2x_d \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} 2x_a & 1 & & \\ & 2x_b & 1 & \\ & & 2x_c & 1 \\ & & & 2x_d \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4x_a} [1 - a^2 + 2x_a(1 - d^2)] - x_d[1 - c^2 - 2x_c(1 - b^2)] \\
&= \frac{1}{4x_a} [1 - a^2 + 2x_a(1 - (2x_a a)^2)] - x_d[1 - c^2 - 2x_c(1 - (2x_c c)^2)] \\
&= \frac{1}{4x_a} F(a, x_a) - x_d F(c, -x_c). \quad (12)
\end{aligned}$$

同样可解得 B, C, D 等. 按文献[1]的分析, 在 a, b, c, d 中有一为准确抛物线(在 $\Delta p = 0$ 附近). 设 a 为准确抛物线, 于是有 $A = 0$, 且 $|x_a| \ll |x_d|$, (12)式的主要贡献来自第一项, $A = 0$ 相当于要求:

$$1 - a^2 + 2x_a(1 - (2x_a a)^2) \simeq 0 \quad a = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x_a + (2x_a)^2}}. \quad (13)$$

此即(10)式.

根据(13)式, 可计算 Feigenbaum 数.

将上面抛物线近似解写成更一般的形式, 便是

$$\begin{aligned}
x_i &= x_{i0} \pm a_i \sqrt{\Delta p} + A_i \Delta p \\
&= x_{i0} \left(1 \pm a_i \frac{\sqrt{\Delta p}}{x_{i0}} + \frac{A_i}{x_{i0}} \Delta p \right). \quad (14)
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
\prod_{i, \pm} 2x_i &= \prod_{i, \pm} 2x_{i0} \left(1 \pm \frac{a_i \sqrt{\Delta p}}{x_{i0}} + \frac{A_i}{x_{i0}} \Delta p \right) \\
&= \prod_i \left(\left(1 + \frac{A_i}{x_{i0}} \Delta p \right)^2 - \frac{a_i^2}{x_{i0}^2} \Delta p \right) \\
&\simeq \prod_i \left(1 + \left(\frac{2A_i}{x_{i0}} - \frac{a_i^2}{x_{i0}^2} \right) \Delta p \right) \simeq 1 + \sum \left(\frac{2A_i}{x_{i0}} - \frac{a_i^2}{x_{i0}^2} \right) \Delta p. \quad (15)
\end{aligned}$$

$1 + \sum \left(\frac{2A_i}{x_{i0}} - \frac{a_i^2}{x_{i0}^2} \right) \Delta p \simeq -1$ 便是发生下一次分岔的不稳定点. 于是有

$$\Delta p = \frac{-2}{\sum_i \left(\frac{2A_i}{x_{i0}} - \frac{a_i^2}{x_{i0}^2} \right)}. \quad (16)$$

对(16)式作出贡献的主要是那些 x_{i0} 为最小的项, 特别是 $A_i = 0$ 的纯抛物线项. 故有

$$\Delta p_j \simeq \frac{2x_{j0}^2}{a_j^2} = \frac{(2x_{j0})^2}{2} (1 - 2x_{j0} + (2x_{j0})^2). \quad (17)$$

(17)式可用来计算 Feigenbaum 数. 因为根据这个公式可以将分岔点一点又一点地计算出来(见图3).

$$\begin{aligned}
x_{j+1,0} &= x_{j,0} - \operatorname{sgn}(x_{j,0}) a_j \sqrt{\Delta p_j} = x_{j,0} - \operatorname{sgn}(x_{j,0}) \sqrt{2} x_{j,0} \\
\left| \frac{x_{j+1,0}}{x_{j,0}} \right| &= \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}. \quad (18)
\end{aligned}$$

由(17),(18)式得

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \sum_i \Delta p_i = p_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2x_{i,0})^2}{2} (1 - 2x_{i,0} + (2x_{i,0})^2) \\ &= p_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{(2x_{0,0})^2}{2(\sqrt{2}-1)} - \frac{(2x_{0,0})^3}{5\sqrt{2}-6} + \frac{(2x_{0,0})^4}{12\sqrt{2}-16} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

取 $p_0 = 0.75$, 则 $2x_0 = 1$, 代入(19)式得

$$p = 0.75 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)} - \frac{1}{5\sqrt{2}-6} + \frac{1}{12\sqrt{2}-16} \right] = 1.4019.$$

若取 $p_0 = 1.25$, 则 $2x_0 = 1 - \sqrt{2}$,

$$p = 1.25 + \frac{1}{2} \left[\frac{3-2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} + \frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}-6} + \frac{17-12\sqrt{2}}{12\sqrt{2}-16} \right] = 1.40185.$$

将这两个近似值与准确值 1.401155 相比^[1,2],

$((2 \times 0.8924864)^2 - 2 \times 0.8924864 = 1.401155)$,

均甚为接近。

若将方程(14)写成

$$\Delta x_i = x_i - x_{i0} = A_i \Delta p \pm a_i \sqrt{\Delta p}.$$

这已经就是描述 Brownian 运动的 Ito 随机微分

方程了^[3]. A_i 是驱动矢量, 而 $B_{ij} = \langle a_i a_j \rangle$ 是扩散矩阵。

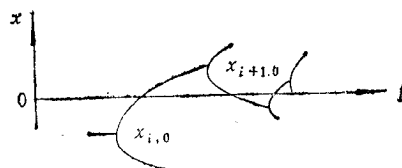


图 3

[1] M. J. Feigenbaum, *Los Alamos Science*, 1(1980), 4.

[2] P. W. Miloni, M-L Shih, J. R. Ackerhalt, *Chaos in Laser-Matter Interactions*, World Scientific, Publishing Co. Pte. Ltd., (1987), p. 19.

[3] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, Springer-Verlag, (1983), p. 92.

THE PARABOLA APPROXIMATION TO THE BIFURCATION THEORY

TAN WEI-HAN LIU REN-HONG

Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai, 201800

(Received 28 August 1989)

ABSTRACT

In this article, we propose a parabola approximation to the theory of bifurcation. From that the process of instability to bifurcation, the effect of stabilization after bifurcation, the limit to wards chaos can be made clear and the Feigenbaum number can be calculated.

PACC: 0545; 0540