

强迫布鲁塞尔振子与圆映象*

于熙令 金惠强 阎光辉

辽宁大学物理系, 沈阳, 110036

王光瑞 陈式刚

应用物理与计算数学研究所, 北京, 100088

1987年5月27日收到; 1989年9月5日收到修改稿

本文通过对弱耦合强迫布鲁塞尔振子的 Farey 序列的鉴别与双稳态的论证, 表明它的相图与圆映象的相图具有相同的拓扑结构.

PACC: 0500; 0545

一、引言

对于强迫布鲁塞尔振子, 已经采用了多种方法进行过详细的研究, 揭示了它的丰富的分叉与混沌行为^[1-11]. 其参数空间 (A, B, α, ω) 一些剖面的某些方向具有单峰映象 U 序列所规定的分叉行为^[12]. 但是, 对它的规律性的研究仍是很不够的.

强迫布鲁塞尔振子是线性振子与极限环的耦合. 通常所研究的情况都是它的弱耦合情况(例如, $\alpha = 0.05$ 时的情况). 我们知道圆映象也描写两个振子的耦合. 这是因为描写这个系统的二维映象在强耗散的情况下成为一维圆映象. 圆映象在弱耦合情况下的性质具有一定的普适性. 所谓弱耦合, 更明确地说是指临界线以下的区域与临界线以上但接近临界线的区域. 所谓的普适性质, 是指: 随 ω 变化排列的 Farey 序列, Arnold 舌头, 临界线上有理转数集合的魔梯结构与无理转数集合的分数维数 $D = 0.87$, 准周期向混沌过渡的标度律, 临界线以上的双稳态, 临界线邻域相图的拓扑结构等等^[13-19, 1]. 因此, 我们期望用圆映象的已知性质分析强迫布鲁塞尔振子, 用数值实验的办法找出它的这些普适性质. 本文的目的是在上述强耗散与弱耦合的情况下, 验证强迫布鲁塞尔振子的相图与圆映象的相图具有相同的拓扑结构.

当然, 强迫布鲁塞尔振子的 Poincare 映象作为一种平面微分同胚, 它可能具有圆映象所没有的性质(例如多重稳定态). 同时强耦合时圆映象也没有普适性. 因此上述讨论仅限于强耗散与(或)弱耦合的情况. 已有的关于强迫布鲁塞尔振子的结果大都属于这种情况.

* 国家自然科学基金资助的课题

1) 王光瑞, 私人通信.

二、方程与解法

强迫布鲁塞尔振子的方程为

$$\begin{aligned} dx/dt &= A - (B + 1)x + x^2y + \alpha \cos \omega t, \\ dy/dt &= Bx - x^2y, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 α, A, B 为参数, ω 为外界控制频率.

采用四阶龙盖-库塔差分法解(1)式. 在 IBM4341 机上, 采用双精度, 有效字长 16 位工作的. 步长取 $h = 0.008$.

三、强迫布鲁塞尔振子模型中的 Farey 序列

当线性振子与极限环的耦合强度为零时, 在其合成相空间中的运动是一种周期或准周期运动. 其轨迹类似于李萨尔图形. 随着耦合强度的增加, 出现周期运动的锁相现象. 周期愈低的周期运动在参数空间所占的区域愈大. 相邻转数之间占有相空间最大区域的转数按 Farey 数序列构造. 因此, 弱耦合情况的 Farey 序列必定是一种普适现象.

在弱耦合情况下, 按如下的图象定义强迫布鲁塞尔振子的转数. 周期轨道在 (x, y) 上形成一条闭合曲线. 设 M 是闭轨在 (x, y) 平面上绕不稳定不动点 $(A, B/A)$ 转的圈数, N 是绕闭轨一周中线性振子振动的次数. 于是有

$$\text{转数: } W = M/N. \quad (2)$$

显然这一定义是基于如下假设的: 即线性振子与极限环的耦合不会强到使轨迹避开不动点而绕圈. 而由相互耦合使轨迹在局部绕圈不计在 M 内. 这个定义与弱耦合假设自洽.

强迫布鲁塞尔振子的任一以相对频率和相对耦合强度为坐标的相图都显示出 Farey 序列. 以文献[2]中的 $A-\omega$ 图(即本文图 1)为例. 由图 1 可见, ω 可作为相对频率, A 可代表极限环与线性振子的耦合强度, 在图 1 所示范围内, A 愈大耦合强度愈小. 由(1)式中的第一个方程式也可以看出 A 和 α 的大小是相对的, 当只变动 A 和 ω 时, A 的增大相当于 α 的减小. 由于极限环的周期, 在 Hopf 分叉点的邻域, 近似地为 $T_0 = 2\pi/A$, 它与 A 有关, Arnold 舌头是斜的^[20].

从 Farey 序列角度看, 图 1 中小方框 III 是一不甚清楚的区域. 因此对它进行了仔细研究. 为便于与圆映象的相图进行对比, 以转数表示图 1 中的不同周期区. 根据(2)式之定义及计算结果, 绘制了图 2. 由图 2 可见, 正如所预料的, 这个区域中是由 $1/2$ 和 $1/3$ 所构成的 Farey 序列, 即 $2/5$ 及 $3/7$ 和 $3/8$, 等等. 方框 IV 的研究结果直接标于图 1 中. 根据连续性, 对原图 1 大部区域都进行了重新标注.

这样, 就对图 1 中的 Farey 序列进行了完全的鉴别, 并且不难求出周期更高的 Farey 序列. 这种高周期和准周期在图 2 中暂标记为 Q . 实际上在弱耦合极限情况下, 对于确定的 A , Farey 序列中的任一成员的 ω 位置都可由该 A 处极限环的频率估计出来.

对于高周期重叠区,反过来可以用出现双稳态来定义临界线,即可将那些随耦合强度的增加最早出现重叠点连接成光滑曲线来逼近临界线,作为近似的临界线。

图 1 中有三处一些周期区被另一些周期区所打断。这些区域应该是双稳态区域。只因为在计算图 1 时采用了相同的初值,所以每一参数值处只有一个稳定状态。这种处理方法的另一后果是:把 Arnold 舌头算小了。这两个后果在与圆映象

$$f(\theta) = \theta + \Omega - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta \quad (3)$$

作比较后不难看出,(3)式有两个极值

$$\theta_{\pm} = \pm \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \frac{1}{k}, \quad (4)$$

θ_+ 对应极小值, θ_- 对应极大值。分别以 θ_+ 与 θ_- 为初值即可得到双稳态。 θ_+ 与 θ_- 也分别对应 Arnold 舌头的两个分支。因此取单一的初值只能得到双稳态中的一个及 Arnold 舌头的一个分支和另一分支的一部分。因为详细地分析 Arnold 舌头及其转数区间(实际上也是双稳态问题)要花费很多计算机时间,所以本文只限于讨论双稳态问题。

方程(1)的初值问题应表述为: t_0 时给定 (x_0, y_0) 。或作为自治方程的初值问题,应由 (x_0, y_0, t_0) 三维空间中的一点决定一条解曲线。这样,双稳态问题就成为在 (x_0, y_0, t_0) 三维空间中寻找两个吸引子的流域问题。这是一个很困难的问题。但对于弱耦合情况,它可以简化成一维闭区间上的问题。理由是:弱耦合情况的轨道总是处在无扰极限环的邻域,因此可取极限环上的任一点(为确定起见,下面取 $\dot{x}_{\max}$ 点)作为 (x_0, y_0) ,而 t_0 只要取 $(0, 2\pi/\omega)$ 中的值就可以。 t_0 取遍 $(0, 2\pi/\omega)$ 中的值,就可以得到所有的吸引子(即双稳态)。

表 1

周期 标号	ωt	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	k	A	ω	备注	
④		2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	3	3	2	3	2	2	2		0.378	0.87	方框 I	2P 与 3P 重 叠区
④'		2	2	2	2	3	2	2	2	2	3	3	2	3	3	3	2	2	1.62		0.58	(3)式	
⑧		2	2	2	3	2	2	2	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2		0.375	0.89	方框 I	3P 与 4P 重 叠区
⑩		3	3	3	4	3	3	4	3	4	3	4	4	3	4	4	3	3		0.342	1.025	方框 II	
⑩		4	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4		0.34	1.025		
⑩'		4	4	4	4	3	3	3	4	3	3	4	3	4	3	3	3	4	1.4		0.33	(3)式	
⑫		3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3				0.34	0.7	图 1	只 3P 无重 叠区

表 1 中给出几组参数值处不同相角所对应的周期轨道的结果 ①, ②, ③, ④, ⑤. 表 1 中的相角是初始时刻 t_0 在 $\dot{x}_{\max}$ 点线性振子与 x 方向的夹角 ωt_0 . 表 1 中也给出圆映象的相应的计算结果 ①' 与 ②'. 其中相角为 θ 的初值. 由表 1 可见, 在同一重叠区, 随 (A, ω) 值的不同, 两个吸引子的流域可以有较大的变化. 对于圆映象在同一重叠区但任意选择的 (k, ω) 处, 虽然相角的意义有所差别, 不同吸引子的流域也呈现类似的分布. 作这个比较的目的是想由圆映象的 θ_+ 和 θ_- 找出强迫布鲁塞尔振子的所导致不同吸引子的相应的相角. 这个试图并没有成功. 但上述计算结果表明, 只通过改变相角来寻找双稳态的想法是正确的.

当已知图 1 的结构而要进一步搞清重叠区的情况时, 可以利用周期轨道初值跟踪法来计算. 这个方法利用微分方程的解在同一周期区中对初值与参数的连续性, 逐步地改变参数, 并以前一参数的稳定轨道上的任一末值 (x_t, y_t, t_t) 为改变参数后再求解的初值 $x_0 = x_t, y_0 = y_t, t_0 = t_t \bmod \frac{2\pi}{\omega}$. 具体做法如下:

研究了图 1 中 I, II 区(取 $t = 0, x_0 = 0.4, y_0 = 3.0, h = 0.008, t_t = 2400, \alpha = 0.05$).

为了更有效地研究重叠区的问题, 在文献[12]的基础之上, 首先确定方框区 I 中 $2P$ 与 $3P$ 关于 A 的几个分界值 A_i , 亦即在 A_i 之上为 $2P$, 之下为 $3P$. 确定 A_i 的方法是: 设 A_2, A_3 为非常邻近的分别与 $2P, 3P$ 对应的 A 值, 则取 A_2, A_3 的平均值为 A_i . 方框 I 中的①, ②的结果如表 2(a) 所示. 同理, 可对方框 II 中的③确定 A_i , 如表 2(b) 所示, 其中 A_3, A_4 为最邻近 A_i 的分别与 $3P, 4P$ 对应的 A 值.

表 2(a)

标号	①	②
ω	0.87	0.875
x_0	0.4	0.4
y_0	3.0	3.0
A_2	0.379	0.379
周期	$2P$	$2P$
A_3	0.378	0.378
周期	$3P$	$3P$
A_3	0.3785	0.3785

表 2(b)

标号	③
ω	1.02
x_0	0.4
y_0	3.0
A_3	0.343
周期	$3P$
A_4	0.342
周期	$4P$
A_4'	0.3425

在分界值 A_i 之上用数值方法求解方程(1), 稳定之后, ①, ②中的结果应为 $2P$ (③中为 $3P$). 取 $T_n = 2\pi n/\omega$ ($n = n', n' + 1, n' + 2, \dots, n'$ 是与稳定轨道相应的某一整数)所对应的 x_n, y_n 之值为新的初值(若 N 周期, 则实际上有 N 组稳定的 x_n, y_n 之值), 在其他参数不变的情况下让 A 值向下移动, 穿过 A_i , 即只将 A_2 改为 A_3 (或只将 A_3 改为 A_4), 继续计算, 在①, ②情况结果仍为 $2P$ (在③情况下为 $3P$), 而在原初值 $x_0 = 0.4, y_0 = 3.0$ 下应为 $3P$ (在③情况下为 $4P$). 依次不断改变 A 值(每次改变量 ΔA 要适当地小), 使 $2P$ 区(③情况为 $3P$ 区)渐渐延伸到 $3P, 6P, \dots$ (在③情况为 $4P, 8P, \dots$) 区域中去. 得到的结果如表 3, 亦即是图 1 中 I, II 区域中的三条线: ①, ②, ③.

表 3

标号									ω
①	A	0.379	0.378	0.376	0.374	0.372	0.370	0.368	0.87
	x_0	0.4	0.36292082	0.36321139	0.36365801	0.36390454	0.36393666	0.36374009	
	y_0	3.0	2.8057928	2.8178368	2.8436279	2.8703089	2.8978395	2.9262381	
	A	0.366	0.364	0.362	0.360	0.358	0.356	0.354	
	x_0	0.36329979	0.36260957	0.36163062	0.36036032	0.36306101	0.36176294	0.36018872	
	y_0	2.9554996	2.9856529	3.0166531	3.0185487	3.0888529	3.1221037	3.1564083	
	A	0.353	0.352	0.3519	0.3518				
	x_0	0.35831112	0.35705155	0.35705417					
	y_0	3.1918221	3.2100286	3.2254820					
②	A	0.379	0.378	0.376	0.373	0.370	0.367	0.365	0.875
	x_0	0.4	0.36644381	0.36685568	0.36644030	0.36662745	0.36663109	0.36641867	
	y_0	3.0	2.8282108	2.8441334	2.8605766	2.9059706	2.9524899	3.0004215	
	A	0.362	0.360	0.356	0.355	0.3549			
	x_0	0.36651814	0.36145902	0.35915023	0.35930326				
	y_0	3.0337105	3.1131392	3.1679573	3.1878872				
	A	0.343	0.342	0.341	0.340	0.339	0.338	0.337	
	x_0	0.4	0.27524990	0.44683158	0.32048929	0.27120709	0.42762917	0.30740166	
③	y_0	3.0	3.3091831	3.0885992	3.7298269	3.3264666	3.2014303	3.7508802	1.02
	A	0.336	0.3355	0.3350					
	x_0	0.27839881	0.41001598						
	y_0	3.3629612	3.3201609						

由表 3 可见,①,②都是由 $2P$ 开始,随着 A 的减小, $2P$ 是继续存在的,即在 I 区内的重叠区间分别具有 $2P$ 与 $3P$, $2P$ 与 $6P$ 等等两个不同的吸引子. ③是由 $3P$ 开始的,随着 A 的减小, $3P$ 是继续存在的,即 II 内的重叠区间是 $3P$ 与 $4P$, $3P$ 与 $8P$ 等等两个不同的吸引子.

五、讨 论

上面的数值结果表明,在弱耦合情况下,强迫布鲁塞尔振子的相图与圆映象的相图可能具有相同的拓扑结构. 更具体地说就是: 在强迫布鲁塞尔振子相图中存在一个弱耦合区,在这个区域中,与 Farey 序列、Arnold 舌头、双稳态等对应的拓扑结构与圆映象的完全相同.

我们知道以强迫振子的周期来采样,(1)式的运动可渐近地用一维映象表示. 考虑(1)式绕不动点 $(A, B/A)$ 的运动,定义相角 $\theta = t/T_0$, 其中 t 是时间, T_0 是极限环周期. 由微扰的观点,(1)式以 θ 表示的渐近映象应是一圆映象,

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) \equiv \theta_n + \frac{2\pi}{\omega T_0} + g(\theta_n), \quad (5)$$

$$g(\theta + 1) = g(\theta). \quad (6)$$

且当 $\alpha = 0$ 时 $g(\theta) = 0$. 根据连续性,在相图中必存在一个区域,在这个区域中 θ_{n+1}

是 θ_n 的单调增函数。据 Denjoy-Herman 定理, 有对 ω 为单调的 Farey 序列。随着参数的变化 θ_{n+1} 不再是 θ_n 的单调函数。但如果 θ_{n+1} 是 θ_n 的随参数连续变化的 θ 的连续函数, $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ 将出现一峰与一谷, 或同时出现几个峰与几个谷。在弱耦合情况, 最可能发生的是同时出现一峰与一谷。这样的圆映象在相图上与正弦圆映象在 Farey 序列、Arnold 舌头、双稳态等结构上有相同的拓扑结构。如果出现双峰与双谷, 则将有四个稳定态。由上述理由, 可以认为, 由数值实验得到的, 强迫布鲁塞尔振子在相空间某些区域具有与圆映象相同拓扑结构的相图并不是一种偶然现象, 而是在上述弱耦合区出现的必然现象。

- [1] 王光瑞, 物理学报, **32**(1983), 960.
- [2] Wang Guang-rui (王光瑞), Zhang Shu-yu (张淑誉), Hao Bai-lin (郝柏林), *Commun Theor Phys.*, **2**(1983), 1075.
- [3] 郝柏林、张淑誉, 物理学报, **32**(1983), 198.
- [4] 王光瑞、陈式刚、郝柏林, 物理学报, **33**(1984), 1246.
- [5] 王光瑞、陈式刚、郝柏林, 物理学报, **33**(1984), 437.
- [6] 王光瑞、陈式刚、郝柏林, 计算物理, **2**(1985), 47.
- [7] B-L. Hao (郝柏林) *Phys. Lett.*, **86A**, (1981), 267.
- [8] B-L, Hao (郝柏林), S-Y, Zhang (张淑誉), *Commun. Theor. Phys.*, **1**(1982), 111, *J. Stat. Phys.*, **28**(1982), 769.
- [9] 王光瑞、郝柏林, 物理学报, **33**(1984), 1321.
- [10] Wang Guang-rui (王光瑞), Chen Shi-gang (陈式刚), Hao Bai-lin (郝柏林) *Chinese Physics*, **4**(1984), 284.
- [11] Chen Shi-gang (陈式刚), Hao Bai-lin (郝柏林), Wang Guang-rui (王光瑞), Zhang Shu-yu (张淑誉), *Inst. Theor. Phys.*, (1983), Preprint AS-ITP-83-024.
- [12] 王光瑞、张淑誉、郝柏林, 物理学报, **33**(1984), 1008.
- [13] M. H. Jeusen, P. Bak and T. Bohr; *Phys. Rev.*, **A30** (1984), 1960. *Phys. Rev. Lett.*, **50** (1983), 1637.
- [14] P. Cvitanovio, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff and I. Procaccia; *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 344.
- [15] T. Bohr, P. Bak, M. H. Jensen, *Phys. Rev.*, **A30**(1984), 1970.
- [16] T. Bohr and G. Gunaratne, *Phys. Lett.*, **113A**, (1985), 55.
- [17] 涂仁芳, 硕士论文, (1986).
- [18] M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff, S. J. Shenken, *Physica*, **5D**(1982), 370.
- [19] Chen Shi-gang and Wang Guang-rui, *Commun. in Theor. Phys. (Beijing, China)* **10**(1988): 11.
- [20] D. Broomhead, G. Mccreadie and G. Rowlanas, *Phys. Lett.*, **84A**, (1981), 229.

FORCED BRUSSELTATOR AND CIRCULAR MAPPING

YU XI-LING JIN HUI-QIANG YAN GUANG-HUI

Liaoning University, Shenyang, 110036

WANG GUANG-RUI CHEN SHI-GANG

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, 100088

(Received 27 May 1987; revised manuscript received 5 September 1989)

ABSTRACT

In this paper, through the discrimination of Farrey sequence and the demonstration of bistable states of the forced Brusselator with weak coupling, it is shown that its phase diagram has the same topological structure with that of the circle map.

PACC: 0500; 0545