

弱光场下电子与库仑势散射 问题的弱耦合解法

李 介 平

北京师范大学低能核物理研究所, 北京, 100875

1989年9月12日收到

电子与库仑势散射, 在圆极化、偶极近似的外光场作用下, 其 Schrödinger 方程可通过么正变换并引入修饰势来讨论. 对修饰势选取恰当的公式展开, 并用 Floquet 分波法, 可分离出径向波动方程组, 它在弱耦合近似下是可积的, 并且近似的波函数, S 矩阵和截面可解析表示, 其结果与数值迭代解^[1]作了比较.

PACC: 3280F; 0380

一、引 言

在外光场下电子与库仑势散射问题中, 由于光场矢势是显含时间的, 其 Schrödinger 方程求解困难, 1987年 Dimou 等人^[1]对圆极化光场作偶极近似后, 对 Schrödinger 方程作变换, 将引入的修饰势 (dressed potential) 作级数展开, 而对波函数作 Floquet 分波展开后, 分离出径向波动方程, 这是一组无限耦合的二阶线性微分方程组, 为了用数值方法求解, 考虑到计算机内存和计算量的限制, 只好对无限的耦合进行截断, 最终对弱外场, 很有限的耦合进行数值迭代求解, 结果发现截面依能量变化有明显的共振结构; 稍后有人用多重散射近似验证了这一点^[2].

我们发现如果对修饰势作不同的展开, 同法分离得到的径向波动方程组, 虽然也是无限耦合的, 但是在弱外场情形下, 可以逐次近似解析求解, 各次近似的波函数, 散射矩阵和截面都可以用特殊函数表示, 这样不仅避免将耦合人为的有限截断, 而且无需大量的数值计算也得到能谱的共振结构, 甚至可计算谱线强度, 结果与文献[1]进行了比较.

二、Schrödinger 方程与径向波动方程组

外光场下电子与库仑势散射的 Schrödinger 方程为 ($m = e = \hbar = 1$)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{\mathbf{A}(t) \cdot \hat{\mathbf{p}}}{c} + \frac{\mathbf{A}^2(t)}{2c^2} + U(r) \right] \phi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$U(r) = -Z/r$ 为库仑势, $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ 为动量算符, c 为光速, 外光矢势 $\mathbf{A}(t)$ 在偶极近似下的圆极化形式为

$$\mathbf{A}(t) = A_0[\mathbf{e}_x \cos(\omega t + \delta) - \mathbf{e}_y \sin(\omega t + \delta)], \quad (2)$$

ω 为频率, δ 为相位, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 为 x, y 方向单位矢量, 对波函数引入变换

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \exp \left\{ -i \int^t d\tau \left[-\frac{\mathbf{A}(\tau) \cdot \mathbf{p}}{c} + \frac{1}{2c^2} \mathbf{A}^2(\tau) \right] \right\} \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

得到关于 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 的方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{Z}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}(t)|} \right] \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

式中

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{c} \int^t d\tau \mathbf{A}(\tau). \quad (5)$$

对修饰势 $\frac{Z}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}(t)|}$ 作如下展开:

$$\frac{Z}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}(t)|} = \begin{cases} \frac{Z}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^k P_k(\cos \theta') & r > a; \\ \frac{Z}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^k P_k(\cos \theta') & r < a, \end{cases} \quad (6)$$

式中 $a = A_0/\omega c$, $\cos \theta' = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}_a$, 而 $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{r}/r = \boldsymbol{\Omega}(\theta, \varphi)$, $\boldsymbol{\Omega}_a = \mathbf{a}(t)/|\mathbf{a}(t)| = \boldsymbol{\Omega}_a(\pi/2, \pi/2 - \omega t - \delta)$, $\boldsymbol{\Omega}_a^0 \equiv \boldsymbol{\Omega}_a^0(\pi/2, \pi/2)$,

$$P_k(\cos \theta') = \frac{4\pi}{2k+1} \sum Y_k^m(\boldsymbol{\Omega}_a^0) Y_k^{m*}(\theta, \varphi) e^{-im(\omega t + \delta)}, \quad (7)$$

$P_k(\cos \theta')$, $Y_k^m(\boldsymbol{\Omega}_a^0)$ 分别为 Legendre 函数和球谐函数. 对波函数 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 作 Floquet 分波展开

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{LM} \exp[-iEt + in(\omega t + \delta)] \frac{F_{nLM}(r)}{r} Y_L^M(\theta, \varphi), \quad (8)$$

可分离出径向波动方程组.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2Z}{R_{\pm}} + p^2 \right] F_{n,L,M}^{\pm}(r) \\ &= \left(-\frac{2Z}{R_{\pm}} \right) \sum \left(\frac{a}{r} \right)^{\pm k} \sum B_{L',M',k,m}^{LM} F_{n+m,L',M'}^{\pm}(r), \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $p^2 = 2(E - n\omega)$, $B_{L',M',k,m}^{LM} = \frac{4\pi}{2k+1} Y_k^m(\boldsymbol{\Omega}_a^0) \langle Y_L^M | Y_k^{m*} | Y_{L'}^{M'} \rangle$, 记号 $R_{\pm}$ 表示:

$$r > a, \text{ 取 } +, R_+ = r; r < a, \text{ 取 } -, R_- = a.$$

这就是径向波函数 $F_{nLM}(r)$ 应满足的耦合方程组, 由于是无限耦合, 严格求解困难. 文献[1]对修饰势作不同展开, 分离得到的径向波动方程组比(9)式形式上简单, 但只好借助数值方法求解, 在弱外场下, 文献[1]对耦合进行如下截断, $n \leq 3$, $L \leq 3$, 不过后者并没有很强的物理根据. 对(9)式试用其他近似解法.

三、弱耦合解法

数值迭代法是把耦合方程组(9)中等式右方未知函数取为已知近似, 然后反复迭代求

解,直至收敛,即

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2Z}{R_{\pm}} + p^2 \right] F_{n,L,M}^{\pm(N+1)}(r) \\ = \left(-\frac{2Z}{R_{\pm}} \right) \sum \left(\frac{a}{r} \right)^{\pm k} \sum B_{L,M',k,m}^{L,M} F_{n+1,m,L',M'}^{\pm(N)}(r) \equiv g^{\pm(N)}(r), \quad (10)$$

$F_{n,L,M}^{\pm(N)}(r)$ 为已知函数时, (9) 式中原来互相耦合项中已不含未知函数, 方程组解除了耦合, 成为一系列独立的二阶线性非齐次方程. 这些非齐次微分方程都是可积的, 没有必要用数值方法求解. 当外场是弱的 ($a \ll 1$), 作为最低次近似, 可选 $g^{\pm(0)}(r) = 0$, 非齐次项消失, 这称为弱耦合的零阶近似, 这样的齐次二阶线性微分方程是可积的, 得到的零阶近似波函数代入 (1) 式等号右方, 即得到一阶近似的非齐次微分方程, 如此, 只要前一阶近似波函数求出. 按照微分方程理论, 下一阶的近似方程也可积并且弱耦合近似下 ($a \ll 1$), 较低阶的近似应能有相当好的结果.

四、分波法与边界条件

散射问题的分波法将给出径向波动方程的无穷远边界条件及散射矩阵和截面表示.

本问题特殊之处: 1) 散射势由于外光场存在不再是有心势, 不具有对入射波方向的轴对称性质, 波函数的分波展开, 如 (8) 式所示, 其角度部分是球谐展开, 这意味着在分波法中, 应将角部展开为球谐分波, 最终导出无穷远边界条件, 散射振幅, 散射矩阵和截面. 2) 库仑势的长程性使无穷远处的球面波也含对数畸变项, 由径向波动方程 (10) 的无穷远渐近形式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2Z}{r} + p^2 \right] F_{n,L,M}^{\pm}(r) \approx 0, \quad (11)$$

其解

$$F_{n,L,M}^{\pm}(r) = W_{\pm\lambda,\mu}(\pm\rho) \overset{r \rightarrow \infty}{\sim} \exp \pm i \left[pr + \frac{Z}{p} \ln(2pr) \right] \quad (12)$$

可以看出这点. 式中 $W_{\pm\lambda,\mu}(\pm\rho)$ 为 Whittaker 函数^[3], 而

$$\lambda = -iZ/p, \quad \mu = L + 1/2, \quad \rho = 2ipr. \quad (13)$$

总之有下列的表示^[4]:

$$F_{n,L,M}^-(0) = 0, \quad (14)$$

$$F_{n,L,M}^-(a) = F_{n,L,M}^+(a), \quad \left. \frac{dF_{n,L,M}^-}{dr} \right|_a = \frac{aF_{n,L,M}^+}{dr} \Big|_a. \quad (15)$$

弹性散射 ($n = 0$)

$$F_{n,L,M}^+(r) \overset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4\pi}{2ip} Y_L^{M*}(\mathbf{Q}_i) e^{-\frac{\pi Z}{2p}} \{ (-1)^{(L+1)} W_{\lambda,\mu}(2ipr) \\ + S_{n,L,M} W_{-\lambda,\mu}(-2ipr) \}, \quad (16)$$

$$f_{ii}(\theta, \varphi) = \sum f_{ii}^{LM} Y_L^M(\theta, \varphi) = \frac{4\pi}{2ip} \sum (S_{n,L,M} - 1) Y_L^{M*}(\mathbf{Q}_i) Y_L^M(\mathbf{Q}), \quad (17)$$

$$d\sigma_{ii} = |f_{ii}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (18)$$

非弹性散射 ($n \neq 0$)

$$F_{n,L,M}^+(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{2i\sqrt{pp_i}} Y_L^{M*}(\mathbf{Q}_i) e^{-\frac{\pi Z}{2p_i}} S_{n,L,M} W_{-L,\mu}(-2ip_i r), \quad (19)$$

$$f_{fi}(\theta, \varphi) = \frac{4\pi}{2i\sqrt{pp_i}} Y_L^{M*}(\mathbf{Q}_i) Y_L^M(\theta, \varphi) S_{n,L,M}, \quad (20)$$

$$d\sigma_{fi} = \frac{p_f}{p} |f_{fi}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega, \quad (21)$$

式中 $S_{n,L,M}$ 为散射矩阵元, σ_{ii}, σ_{fi} 分别为弹性散射和非弹性散射截面. $f_{ii}(\theta, \varphi), f_{fi}(\theta, \varphi)$ 为弹性散射和非弹性散射振幅.

五、零 阶 解

基本方程为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2Z}{R_{\pm}} + p^2 \right] F_{n,L,M}^{(\pm)}(r) = 0. \quad (22)$$

1. 弹性散射 $r < a, R_- = a$, 引入 $k^2 = p^2 + 2Z/a$, 满足 $r = 0$ 的边界条件(14)式的解可写为

$$F_{n,L,M}^{(0)-}(r) = \frac{4\pi}{2ip} Y_L^{M*}(\mathbf{Q}_i) e^{-\frac{\pi Z}{2p}} A_{n,L}^c \sqrt{r} J_{L+1/2}(kr), \quad (23)$$

式中 $J_{L+1/2}(kr)$ 为半整阶 Bessel 函数. $r > a, R_+ = r$ 方程同(11), 其解可写为

$$F_{n,L,M}^{(0)+}(r) = \frac{4\pi}{2ip} Y_L^{M*}(\mathbf{Q}_i) e^{-\frac{\pi Z}{2p}} [(-1)^{(L+1)} W_{L,\mu}(\rho) + S_{n,L}^{(0)} W_{-L,\mu}(-\rho)]. \quad (24)$$

利用 ($r = a$) 径向波函数及其导数连续条件(15)式可求出 $A_{n,L}^c, S_{n,L}^{(0)}$,

$$S_{n,L}^{(0)} = \frac{(-1)^{(L+1)} \left. W_- \frac{d}{dr} [\sqrt{r} J_{L+1/2}(kr)] \right|_a - \sqrt{a} J_{L+1/2}(ka) \left. \frac{dW_+}{dr} \right|_a}{\left. \sqrt{a} J_{L+1/2}(ka) \frac{dW_-}{dr} \right|_a - W_- \frac{d}{dr} [\sqrt{r} J_{L+1/2}(kr)] \Big|_a}, \quad (25)$$

$$A_{n,L}^c = \frac{(-1)^{(L+1)}(2ip)}{\left. W_- \frac{d}{dr} [\sqrt{r} J_{L+1/2}(kr)] \right|_a - \sqrt{a} J_{L+1/2}(ka) \left. \frac{dW_-}{dr} \right|_a}, \quad (26)$$

并且

$$F_{n,L,M}^{(0)c}(r) = \frac{a \rightarrow 0}{2ip} \frac{4\pi}{2ip} Y_L^{M*}(\mathbf{Q}_i) e^{\frac{\pi Z}{2p}} \frac{\Gamma(L+1-iZ/p)}{\Gamma(2L+2)} M_{L,\mu}(2ipr), \quad (27)$$

式中 $M_{L,\mu}(2ipr)$ 为另一形式 Whittaker 函数, 且 $M_{L,\mu}(0) = 0$, $\Gamma(x)$ 为 Γ 函数, 并记 $W_{\pm} \equiv W_{\pm L,\mu}(\pm\rho)$. 由此可见 $a \rightarrow 0$ (25)式退化为纯库仑散射

2. 非弹性散射 类似地, 非弹性散射有如下解:

$$F_{n,L,M}^{(0)+}(r) = \frac{4\pi}{2i\sqrt{pp_i}} Y_L^{M*}(\mathbf{Q}_i) e^{-\frac{\pi Z}{2p_i}} S_{n,L}^{(0)} W_{-L,\mu}(-\rho),$$

$$F_{n,L,M}^{(0)}(r) = \frac{4\pi}{2i\sqrt{pp_t}} Y_L^{M*}(\Omega_i) e^{-\frac{\pi}{2} \frac{Z}{p_t}} A_{n,L}^{(0)} \sqrt{r} J_{L+\frac{1}{2}}(kr). \quad (28)$$

当用条件(15)式求 $S_{n,L}^{(0)}$, $A_{n,L}^{(0)}$ 时,发现这是一组二元一次齐次线性方程组,其有非零解的条件为

$$\frac{\left. \frac{dW_-}{dr} \right|_a}{W_-|_a} = \frac{\left. \frac{d}{dr} [\sqrt{r} J_{L+1/2}(kr)] \right|_a}{\sqrt{a} J_{L+1/2}(ka)}. \quad (29)$$

当 $a \rightarrow 0$ 利用特殊函数性质,(29)式可改写为

$$\begin{aligned} \frac{E}{\lambda} - \frac{\lambda}{a} - \frac{(L+\lambda+1)(L-\lambda)}{a} \frac{W_{-(\lambda+1),\mu}(-2ipa)}{W_{-\lambda,\mu}(-2ipa)} \\ = \frac{L+1}{a} - \frac{2Z}{2L+3} + \frac{Z^2 a}{\lambda^2(2L+3)}. \end{aligned} \quad (30)$$

可以证明, $a \rightarrow 0$, (30)式有唯一解。

当 $\lambda + L + 1 = -n'$ ($n' = 0, 1, 2, \dots$, 正整数), Whittaker 函数退化为较简单的特殊函数。特别当 $n' = 0$,

$$\begin{aligned} W_{-(\lambda+1),\mu}(-2ipa) &= W_{L,(L+1/2)}\left(\frac{2Za}{L+1}\right) \\ &= \Gamma\left(2L+1, \frac{2Za}{L+1}\right) \left(\frac{2Za}{L+1}\right)^{-L} \exp\left(\frac{Za}{L+1}\right), \\ W_{-\lambda,\mu}(-2ipa) &= W_{(L+1),(L+1/2)}\left(\frac{2Za}{L+1}\right) = \left(\frac{2Za}{L+1}\right)^{(L+1)} \exp\left(-\frac{Za}{L+1}\right), \end{aligned} \quad (31)$$

式中 $\Gamma(a, x)$ 为不完全 Γ 函数。以此代入(30)式,

$$\begin{aligned} \lambda + L + 1 &= - \frac{\left(\frac{2Za}{L+1}\right)^{(2L+2)} \left(1 - \frac{Za}{L+1}\right)}{2(2L+3)\Gamma\left(2L+2, \frac{2Za}{L+1}\right) \exp\left(\frac{2Za}{L+1}\right)} \\ &\quad - \frac{\left(\frac{2Za}{L+1}\right)^{(2L+2)}}{2(2L+3)(2L+1)!} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (32)$$

类似地可证明 $n' \neq 0$ 时(30)式无解。

当 $\lambda + 1 + L \neq -n'$, $\frac{W_{-(\lambda+1),\mu}(-\rho)}{W_{-\lambda,\mu}(-\rho)} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{L+1+\lambda}$. (30)式也不存在解,因此,(30)式的唯一解为

$$\lambda = -(L+1) = -\frac{iZ}{p_t},$$

即

$$E_{n,L} = n\omega - \frac{Z^2}{2(L+1)^2}. \quad (33)$$

借助波函数的归一条件,可以唯一确定 $S_{n,L}^{(0)}$, $A_{n,L}^{(0)}$, 最后得到 $a \rightarrow 0$,

$$F_{n,L,M}^{(0)1}(r) = \frac{-2i\sqrt{2\pi Z Y_L^{M*}(\Omega_i)}}{\sqrt{(L+1)(2L+1)(2L+2)!}} W_{(L+1), (L+\frac{1}{2})} \left(\frac{2Zr}{L+1} \right) \delta_{E, E_{n,L}}, \quad (34)$$

$$\text{式中 } \delta_{E, E_{n,L}} = \begin{cases} 0 & \text{当 } E \neq E_{n,L}; \\ 1 & \text{当 } E = E_{n,L}. \end{cases}$$

(27), (34)式实际上是 $a \rightarrow 0$ (无外场)解. 外光场的作用, 应在更高近似中反映出来.

六、弹性散射的一阶解

以零阶解代入(10)式的非齐次项, 可求解一阶近似结果, 此时方程是二阶线性非齐次方程, 由上节已知齐次方程的解, 对应非齐次方程也可积, 类似上节的办法, 可以写出弹性散射的一阶近似结果为

$$S_{n,L,M}^{(1)} = S_{n,L}^{(0)} + \frac{(-1)^L e^{\frac{\pi Z}{2p}}}{4\pi Y_L^{M*}(\Omega_i)} \left\{ \int_a^\infty W_+ g^+(s) ds + (-1)^{(L+1)} S_{n,L}^{(0)} \int_a^\infty W_- g^+(s) ds \right\} \\ - \frac{2ipe^{\frac{\pi Z}{2p}}}{4\pi Y_L^{M*}(\Omega_i)} \frac{\int_0^a \sqrt{s} J_{L+1/2}(ks) g^-(s) ds}{W_- \left. \frac{d}{dr} [\sqrt{r} J_{L+1/2}(kr)] \right|_a - \sqrt{a} J_{L+1/2}(ka) \left. \frac{dW_-}{dr} \right|_a}, \quad (35)$$

式中

$$g^\pm(r) = \left(-\frac{2Z}{R_\pm} \right) \sum \left(\frac{r}{a} \right)^{\mp k} \sum B_{L', M', k, m}^{L, M} F_{n+m, L', M'}^{(0)\pm}(r). \quad (36)$$

当 $a \rightarrow 0$, 含 $g^-(s)$ 项可从(35)式中略去. 并可用(27), (34)式计算(36)式的值. 由(34), (17), (18)式知

$$\frac{d\sigma_{ii}^{(1)}}{d\Omega} \propto \delta_{E, E_{m,L'}},$$

而

$$E_{m,L'} = m\omega - \frac{Z^2}{2(L'+1)^2}. \quad (37)$$

由此可知, 截面在 $E = E_{m,L'}$ 具有谱线状的共振结构, 进一步略去 a 的高次项, 利用特殊函数性质. 最终从(35)式得到 $a \rightarrow 0$ 的如下关系:

$$S_{n,L,M}^{(1)} = \frac{\Gamma(L+1-iZ/p)}{\Gamma(L+1+iZ/p)} + a\Delta_{L,M}, \quad (38)$$

$$\frac{d\sigma_{ii}^{(1)}}{d\Omega} \bigg/ \frac{d\sigma_{ii}^{(0)}}{d\Omega} = 1 - \sum_{L'} 8\pi a p \sin^2 \frac{\theta''}{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{-\frac{iZ}{p} \ln \sin \frac{\theta''}{2}} \frac{\Gamma(1-iZ/p)}{\Gamma(1+iZ/p)} \sum_{L,M} \Delta_{L,M} Y_L^{M*}(\Omega_i) Y_L^M(\Omega) \right\}, \quad (39)$$

式中 Re 表示取实部, 弹性散射情形 $p = \sqrt{2E}$, $\cos \theta'' = \Omega \cdot \Omega_i$ 为电子入射和出射方向余弦, $\frac{d\sigma_{ii}^{(0)}}{d\Omega} = \frac{1}{4p^4 \sin^4 \frac{\theta''}{2}}$ 为纯库仑场散射截面. 并且

$$\begin{aligned}
& \sum_{L,M} \Delta_{L,M} Y_L^{M*}(\mathbf{Q}_i) Y_L^M(\mathbf{Q}) \\
&= \frac{i\sqrt{4\pi Z} Y_L\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{\pi Z}{2p}}}{3\sqrt{(2L'+1)(2L'+1)!} \left(\frac{2Z}{L'+1}\right)^{(L'+2)} \Gamma(L' - iZ/p)} \left[\frac{2ip}{p^2 + \frac{Z^2}{(L'+1)^2}} \right]^{L'} \\
&\quad \cdot \left[\frac{ip + \frac{Z}{L'+1}}{ip - \frac{Z}{L'+1}} \right]^{iZ/p} \cdot \delta_{E, E_{L,L'}} \cdot \left\{ \sum_M \langle Y_{L'-1}^M | Y_i^* | Y_{L'+1}^M \rangle Y_{L'+1}^{M*}(\mathbf{Q}_i) Y_{L'-1}^M(\mathbf{Q}) \right. \\
&\quad \left. + F \left[-(2L'+1), 2, 1 - L' + iZ/p, \frac{1}{2} \left(1 - \frac{iZ}{p(L'+1)} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \times \sum_M \langle Y_{L'+1}^M | Y_i^* | Y_{L'+1}^M \rangle Y_{L'+1}^{M*}(\mathbf{Q}_i) Y_{L'+1}^M(\mathbf{Q}) \right\}. \quad (40)
\end{aligned}$$

式中 $F(\alpha, \beta, \gamma, \rho)$ 为超几何函数, 由于 $\alpha = -(2L'+1)$, 在 (40) 式中实际上只是 Jacobi 多项式^[3]. 并且

$$\langle Y_L^M | Y_i^* | Y_{L'}^{M'} \rangle = \int d\mathbf{Q} Y_L^{M*} Y_i^* Y_{L'}^{M'}. \quad (41)$$

(41) 式表示简洁的角动量耦合关系, (39), (40) 式将截面表示为特殊函数, 因此可作如下讨论.

一阶近似弹性散射计算表明, 无外光场时 ($a=0$) 只有纯库仑散射, 如 (35), (39) 式所示, 但有外光场时, 即使很弱, 散射也变得复杂, 除了库仑散射外, 弹性散射能谱还包含这样一些中间过程的贡献: 入射电子辐射一个或多个光子, 退激到库仑场的束缚态上, 然后再吸收同样多的光子能量, 跃迁回到原来的弹性散射道中去. 虽然这些过程的发生概率是很小的, 但计算指出在弹性散射能谱中相应的一系列谱线的位置. 并计算出相应于单光子的谱线强度 (见 (39) 式).

(37) 式用谱线描述了相应过程的共振结构, 决定谱线位置由 $m\omega$ 交换光子能量和 $-Z^2/2(L'+1)^2$ 库仑场束缚能级两部分, m 来自光场修饰势展开的 k 阶球谐矩的投影分量 (7) 式, 代表交换光子数 (9) 式, 而 L' 为波函数展开式 (8) 式的 L' 阶球谐矩, 对散射问题 $E > 0$. 要求 $m > 0$, $L' = 0, 1, 2, 3, \dots$.

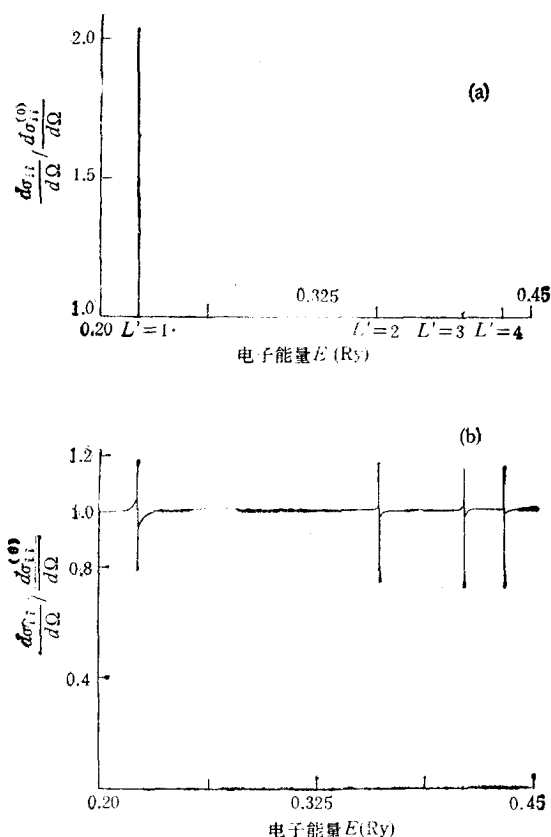
当 $a = A_0/c\omega \ll 1$, 略去高次项, 只讨论单光子过程, 这时 $E_{m,L'} = E_{1L'}$, 便如 (39), (40) 式所示. (37) 式与文献 [2] 结论相同. 共振峰位置只与 $m\omega$ 及 L' 相关, 而与电子的方向无关.

本节给出的公式不仅描述 H^+ 的库仑场 ($Z=1$), 对所有的类氢库仑场 ($Z \neq 1$) 也成立, 而且不难推广到入射非电子而是电荷数为 Z_2 的负电粒子和 $Z=Z_1$ 的库仑场散射情形, 对此只要将 (37), (39), (40) 诸式中的 Z 用 $Z_1 Z_2$ 代替即可.

作为比较, 用 (39) 式计算了文献 [1] 中列的弹性散射能谱, 这时 $\hbar\omega = 0.472 \text{ Ry}$, $Z=1$, $F_0 = \omega^2 a = 0.005 \text{ au}$, $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i(\pi/2, 0)$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\pi/2, \pi/2)$. 由于 $E > 0$, 要求 $E_{1L'}$ 中 $L' > 0$, L' 只能取正整数, 在最差情形, $L' = 1$. $a = 0.089 \text{ au}$, 代入 (32) 式, 也有 $\lambda + L' + 1 = -1 \times 10^{-6}$. 因此 $\lambda = -(L' + 1)$ 是相当好的结果. 以 $L' = 1, 2, 3, 4$

代入(37)式($m=1$)得到 $E_{1L'}$ 的值与文献[1]用数值迭代给出共振峰位置完全符合。

在图1(b)中,用实线给出文献[1]的结果,而图1(a)表示本工作计算结果,两结果大致相同,共振峰位置也一致,所不同的是(40)式由 $\delta_{E,E_{1L'}}$ 给出谱线,而文献[1]给出双向共振峰,形状不同。高度也有差异。而由第五节讨论知道 $a \rightarrow 0$ 给出谱线解,是弱耦合方法本身决定的。



(a) 本文结果 (b) 文献[1]结果

图1 弹性散射能谱 $Q_i = Q_i(\pi/2, 0)$; $Q = Q(\pi/2, \pi/2)$; $\hbar\omega = 0.472\text{Ry}$;
 $Z = 1$; $a = A_0/\omega c = 0.089\text{au}$

应当指出,文献[1]在计算中作了截断 $n \leq 3$, $L \leq 3$,而从其计算结果看,共振峰高度随 L' 变化甚缓,即使 $L'=4$ 其共振峰峰值也不能忽略。这时人为截断后再迭代求解,有可能会扭曲 L 无限耦合的贡献,是不妥当的,而本工作的结果,则指出谱线强度随 L' 而迅速下降。

弱耦合解法由于求解中选择了 $a \ll 1$ 的条件,所有有关 a 的高次项都被略去,因此难以描述多光子过程,(39)式也只是计算了一次光子过程,这相当于对径向波动方程(10)作 $a \ll 1$ 的微扰解,但由于能得解析表示,就避免了繁杂的大量数值计算,讨论也更容易一些。

中国原子、分子物理数据研究联合体资助的课题。

作者感谢黄祖洽教授的有益讨论。

- [1] L. Dimou and F. H. M. Faisal, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 872.
- [2] 陈学俊、唐建志, 1988 年全国原子与分子物理学学术交流会论文集, 88'CAMP(Wuhan), IV-6, 97 页.
- [3] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic press, New York, (1980).
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, (1977).

WEAK COUPLING METHOD FOR TREATING THE SCATTERING OF ELECTRONS BY COULOMB POTENTIAL IN WEAK LASER FIELD

LI JIE-PING

*Institute of Low Energy Nuclear Physics,
Beijing Normal University, Beijing, 100875*

(Received 12 September 1989)

ABSTRACT

In a circularly polarized radiation field (dipole approximation), for electrons scattered by Coulomb potential, the Schrödinger equation is handled by using a unitary transformation and a dressed potential. When the dressed potential is expanded into a proper form, the equations for the radial wave function are separated by Floquet partial expansion and they are integrable in weak coupling approximation. Therefore, the approximate wave function, S-matrix and the cross section can be expressed analytically. The comparison to the numerical iterated solution is discussed.

PACC: 3280F; 0380