第39卷 第1期 物理学报 Vol. 39, No. 1
1990年1月 ACTA PHYSICA SINICA Jan., 1990

光子消灭算符高次幂的本征态及其性质

彭石安 郭光灿
河北师范学院物理系，石家庄，050091 中国科学技术大学物理系，合肥，230026

1989年2月10日收到

本文提出一种构造光子消灭算符高次幂 a^N 的正交归一本征态的一般方法，并着重研究了 $N=3$ 场合下正交归一本征态的数学结构和量子统计性质，发现这些本征态均具有非经典效应，它们组成一个以非经典光场态作基矢的完备表象.

PACC: 4250

一、引言

众所周知，Glauber 相干态[1]的提出解决了用量子电动力学研究光的数学困难，大大促进了量子光学的发展.相干态是单模电磁场光子消灭算符 a 的本征态，它不仅有其物理实质，而且是一个极有用的表象，现已成为量子光学研究中的一个重要支柱. 另方面，非经典光场由于其理论和实际上的重要性近年来已成为量子光学中引人注目的研究课题. 现在理论上研究得已比较充分，且实验上已被观察到的非经典效应有压缩态、反聚束和亚泊松分布(单模情况下后两种非经典效应等价). 十分有趣的是，最近的研究发现，光子消灭算符平方 a^2 的两个正交归一本征态[2](分别称为偶相干态和奇相干态)恰恰分别具有这两种非经典效应[1)]: 偶相干态有压缩而无反聚束，奇相干态则刚好与之相反，有反聚束而绝无压缩现象.

a 的归一化本征态-相干态在对光的量子力学描述中如此重要有用，a^2 的正交归一化本征态又是如此典型地具有已发现的两种非常基本的非经典效应，这一事实启发我们去寻求 a 的更高次幂的算符 a^N(N 为正整数)的正交归一本征态，并研究它们的性质：它们的本征态是经典的还是非经典的，其中还有没有目前尚未被发现的非经典效应[3]，各非经典态之间有些什么关系，等等. 显然，由 a^N 的本征态来考察光场的新的量子特性，无疑是一个很吸引人的问题. 本文提出了一种得到 a^N 的正交归一本征态的一般方法，并具体地研究了 $N=3$ 的情况.

二、a^3 的正交归一本征态

现在考虑如下三个量子光场态(本文所出现的求和号$\sum$的上限均为∞，不再注明):

1) 夏云杰、郭光灿，量子电子学，5(1988)，301.

$$|\phi_0\rangle = C_0 \sum_{n=0} \frac{\alpha^{3n}}{\sqrt{(3n)!}} |3n\rangle, \tag{1}$$

$$|\phi_1\rangle = C_1 \sum_{n=0} \frac{\alpha^{3n+1}}{\sqrt{(3n+1)!}} |3n+1\rangle, \tag{2}$$

$$|\phi_2\rangle = C_2 \sum_{n=0} \frac{\alpha^{3n+2}}{\sqrt{(3n+2)!}} |3n+2\rangle, \tag{3}$$

式中 C_0, C_1, C_2 分别为相应态矢的待定归一化常数，α 为复参数. 不难证明这三个态都表示 a^3 的本征值为 α^3 的本征态(三重简并态). 例如对于 $|\phi_0\rangle$，有

$$a^3|\phi_0\rangle = \alpha^3 C_0 \sum_{n=1} \frac{\alpha^{3(n-1)}}{\sqrt{[3(n-1)]!}} |3(n-1)\rangle = \alpha^3|\phi_0\rangle.$$

而且易见这三个态相互正交，即

$$\langle\phi_i|\phi_j\rangle = 0 \qquad (i,j = 0,1,2, \text{ 且 } i \neq j).$$

现在来求归一化常数 C_0, C_1, C_2. 为简单计，设 C_0, C_1, C_2 均为实数，并令 $|\alpha|^2 = x$，于是由归一化条件得到

$$\langle\phi_0|\phi_0\rangle = C_0^2 \sum_{n=0} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = C_0^2 A_0(x) = 1, \tag{4}$$

$$\langle\phi_1|\phi_1\rangle = C_1^2 \sum_{n=0} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} = C_1^2 A_1(x) = 1, \tag{5}$$

$$\langle\phi_2|\phi_2\rangle = C_2^2 \sum_{n=0} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} = C_2^2 A_2(x) = 1. \tag{6}$$

式中

$$A_0(x) = \sum_{n=0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, \tag{7}$$

$$A_1(x) = \sum_{n=0} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}, \tag{8}$$

$$A_2(x) = \sum_{n=0} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}. \tag{9}$$

为求级数 A_0, A_1 和 A_2 的值，注意到

$$A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!} = e^x \tag{10}$$

和

$$A_1(x) = A_0''(x), \tag{11}$$

$$A_2(x) = A_0'(x). \tag{12}$$

式中 $A_0'(x)$ 和 $A_0''(x)$ 分别表示 $A_0(x)$ 对 x 的一、二阶导数，于是由(10)式得到关于 $A_0(x)$ 的一个二阶常系数线性非齐次方程

$$A_0''(x) + A_0'(x) + A_0(x) = e^x. \tag{13}$$

因为与(13)式相应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$，容易求得其相应齐次微分方程的通解为

$$\bar{A}_0(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(B_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

式中 B_1 和 B_2 为积分常数．令方程(13)的特解为 $\tilde{A}_0(x) = B_3e^x$，代入(13)式可得 $B_3 = 1/3$，所以(13)式的通解为

$$A_0(x) = \frac{1}{3}e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(B_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

利用级数 A_0 和 A_1 或 A_2 可定出积分常数 $B_1 = 2/3$，$B_2 = 0$，于是最后得到

$$A_0(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x. \tag{14}$$

由(11)和(12)式有

$$A_1(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x, \tag{15}$$

$$A_2(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x. \tag{16}$$

这样终于得到 a^3 的三个正交归一本征态如下：

$$\begin{aligned}|\psi_0\rangle &= A_0^{-\frac{1}{2}}(|\alpha|^2)\sum_{n=0}\frac{\alpha^{3n}}{\sqrt{(3n)!}}|3n\rangle \\ &= \left(\frac{1}{3}e^{|\alpha|^2} + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}\frac{\alpha^{3n}}{\sqrt{(3n)!}}|3n\rangle,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= A_1^{-\frac{1}{2}}(|\alpha|^2)\sum_{n=0}\frac{\alpha^{3n+1}}{\sqrt{(3n+1)!}}|3n+1\rangle \\ &= \left(\frac{1}{3}e^{|\alpha|^2} - \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\right. \\ &\quad\left.\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}\frac{\alpha^{3n+1}}{\sqrt{(3n+1)!}}|3n+1\rangle,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}|\psi_2\rangle &= A_2^{-\frac{1}{2}}(|\alpha|^2)\sum_{n=0}\frac{\alpha^{3n+2}}{\sqrt{(3n+2)!}}|3n+2\rangle \\ &= \left(\frac{1}{3}e^{|\alpha|^2} - \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\right. \\ &\quad\left.\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}\frac{\alpha^{3n+2}}{\sqrt{(3n+2)!}}|3n+2\rangle.\end{aligned} \tag{19}$$

三、a^3 的正交归一本征态的数学性质

在由 $|\psi_0\rangle,|\psi_1\rangle,|\psi_2\rangle$ 所组成的空间里，一个明显的事实是通过 a 的作用可实现这三个态之间的相互转换．a 连续作用于一个态三次，可使该态按 $|\psi_0\rangle\to|\psi_2\rangle\to|\psi_1\rangle\to|\psi_0\rangle$

的顺序历经其他两态后又回到原态(见图 1),亦即 a 在三个本征态间起了一个转动算符的作用. 比如对于 $|\phi_0\rangle$,有

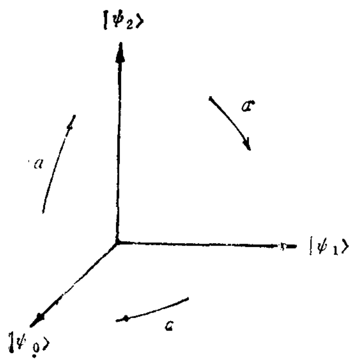

图 1 a 的转动作用

$$a|\phi_0\rangle = \alpha\cdot A_0^{-\frac{1}{2}}A_2^{\frac{1}{2}}|\phi_2\rangle,$$
$$a^2|\phi_0\rangle = \alpha^2 A_0^{-\frac{1}{2}}A_2^{\frac{1}{2}}A_2^{-\frac{1}{2}}A_1^{\frac{1}{2}}|\phi_1\rangle,$$
$$a^3|\phi_0\rangle = \alpha^3\cdot A_0^{-\frac{1}{2}}A_1^{\frac{1}{2}}A_1^{-\frac{1}{2}}A_0^{\frac{1}{2}}|\phi_0\rangle = \alpha^3|\phi_0\rangle.$$

$|\phi_0\rangle,|\phi_1\rangle,|\phi_2\rangle$ 表示以复参数 α 定义的量子光场态,当 α 取不同值时各态矢相应的内积为

$$\langle\phi_0(\alpha)|\phi_0(\alpha')\rangle = [A_0(|\alpha|^2)A_0(|\alpha'|^2)]^{-\frac{1}{2}}\cdot\sum_{n=0}\frac{(\alpha^*\alpha')^{3n}}{(3n)!} = [A_0(|\alpha|^2)A_0(|\alpha'|^2)]^{-\frac{1}{2}}A_0(\alpha^*\alpha') \neq 0,$$

$$\langle\phi_1(\alpha)|\phi_1(\alpha')\rangle = [A_1(|\alpha|^2)A_1(|\alpha'|^2)]^{-\frac{1}{2}}\cdot\sum_{n=0}\frac{(\alpha^*\alpha')^{3n+1}}{(3n+1)!} = [A_1(|\alpha|^2)A_1(|\alpha'|^2)]^{-\frac{1}{2}}A_1(\alpha^*\alpha') \neq 0,$$

$$\langle\phi_2(\alpha)|\phi_2(\alpha')\rangle = [A_2(|\alpha|^2)A_2(|\alpha'|^2)]^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}\frac{(\alpha^*\alpha')^{3n+2}}{(3n+2)!} = [A_2(|\alpha|^2)A_2(|\alpha'|^2)]^{-\frac{1}{2}}A_2(\alpha^*\alpha') \neq 0.$$

这表明,在 α-平面上 a^3 的三个本征态和 Glauber 相干态一样,本身并不正交.

我们最关心的数学性质自然是上述三个正交归一本征态是否构成一个完备的 Hilbert 空间,即它们是否能作为一个表象使用. 为研究这一点,我们仿照相干态的完备性条件定义如下三个算符:

$$I_0 = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}|\phi_0\rangle\langle\phi_0|,\quad I_1 = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}|\phi_1\rangle\langle\phi_1|,\quad I_2 = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}|\phi_2\rangle\langle\phi_2|,$$

并在任意一个归一化了的态矢中求这三个算符的平均值,看其是否为 1. 最方便的做法是在任一数态 $|n'\rangle$ 中求平均. 只需对 I_0 作出计算.

$$\langle n'|I_0|n'\rangle = \begin{cases}\int\frac{d^2\alpha}{\pi}A_0^{-1}(|\alpha|^2)\cdot(|\alpha|^2)^{n'}/n'! & n'=3n;\\ 0 & n'\neq 3n.\end{cases}$$

这表明 I_0 不是单位算符,而且由于上述积分值随态 $|n'\rangle$ 而变,即不是一个常数,也不能将 I_0 化成单位算符,因此定义在复平面上的态 $|\phi_0\rangle$ 不能构成完备的 Hilbert 空间. 同理可证,$|\phi_1\rangle,|\phi_2\rangle$ 也都不能单独构成完备的 Hilbert 空间,它们都不能像相干态那样作为表象使用. 但是,这三个态的组合,具有相干态那样的完备性,即

$$\int\frac{d^2\alpha}{\pi}(|\phi_0\rangle\langle\phi_0| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|) = 1. \tag{20}$$

为证明这一点,我们在每一项的前后各插入一个相干态的完备性条件 $\int\frac{d^2\alpha}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$,于是对第 1 项有

$$|\phi_0\rangle\langle\phi_0| = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|\phi_0\rangle\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\langle\phi_0|\alpha\rangle\langle\alpha|$$
$$= \int\frac{d^2\alpha}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|\int\frac{d^2\alpha}{\pi}e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}\frac{(|\alpha|^2)^{3n}}{(3n)!}$$
$$= \int\frac{d^2\alpha}{\pi}e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}\frac{(|\alpha|^2)^{3n}}{(3n)!}|\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|,$$

上面运算中用到了(7)式并在 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ 中插入了两个相干态的内积 $\langle\alpha|\alpha\rangle$，即 $|\alpha\rangle\langle\alpha| = |\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|$. 对于(20)式中其余两项使用同样的方法并考虑到(8),(9)两式，可得

$$|\phi_1\rangle\langle\phi_1| = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}\frac{(|\alpha|^2)^{3n+1}}{(3n+1)!}|\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|,$$
$$|\phi_2\rangle\langle\phi_2| = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}\frac{(|\alpha|^2)^{3n+2}}{(3n+2)!}|\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|.$$

将这三个结果代入(20)式，得

$$\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\left\{\int\frac{d^2\alpha}{\pi}e^{-|\alpha|^2}\left[\sum_{n=0}\frac{(|\alpha|^2)^{3n}}{(3n)!}+\sum_{n=0}\frac{(|\alpha|^2)^{3n+1}}{(3n+1)!}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{n=0}\frac{(|\alpha|^2)^{3n+2}}{(3n+2)!}\right]|\alpha\rangle\langle\alpha|\right\}|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1.$$

因此 a^3 的三个正交归一本征态构成一个完备表象. 比如相干态在这个表象中可作如下分解:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2}(A_0^{\frac{1}{2}}|\phi_0\rangle + A_1^{\frac{1}{2}}|\phi_1\rangle + A_2^{\frac{1}{2}}|\phi_2\rangle).$$

下面将看到 $|\phi_0\rangle,|\phi_1\rangle,|\phi_2\rangle$ 都是非经典态光场，因此便有一个完全由非经典光场态作基矢的表象.

四、a^3 的正交归一本征态的量子统计性质

先计算三个本征态在两个正交位相分量上的噪声性质，即计算厄密算符

$$X_1 = \frac{a^+ + a}{2} \text{ 和 } X_2 = \frac{i(a^+ - a)}{2}$$

在这些态下的测不准情况.

考虑到对三个态均有 $\langle a^+\rangle = \langle a\rangle = \langle a^{+2}\rangle = \langle a^2\rangle = 0$ 和

$$\langle\phi_0|a^+a|\phi_0\rangle = |\alpha|^2A_2/A_0, \tag{21}$$
$$\langle\phi_1|a^+a|\phi_1\rangle = |\alpha|^2A_0/A_1, \tag{22}$$
$$\langle\phi_2|a^+a|\phi_2\rangle = |\alpha|^2A_1/A_2, \tag{23}$$

则对 $|\phi_0\rangle$，有

$$\langle\Delta X_1^2\rangle = \langle\Delta X_2^2\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}|\alpha|^2A_2/A_0$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}|\alpha|^2\cdot\frac{\frac{1}{3}e^{|\alpha|^2}-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2}{\frac{1}{3}e^{|\alpha|^2}+\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2},\tag{24}$$

对 $|\phi_1\rangle$，有

$$\langle\Delta X_1^2\rangle=\langle\Delta X_2^2\rangle=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}|\alpha|^2$$

$$\cdot\frac{\frac{1}{3}e^{|\alpha|^2}+\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2}{\frac{1}{3}e^{|\alpha|^2}-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2},\tag{25}$$

对 $|\phi_2\rangle$，有

$$\langle\Delta X_1^2\rangle=\langle\Delta X_2^2\rangle=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}|\alpha|^2$$

$$\cdot\frac{\frac{1}{3}e^{|\alpha|^2}-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2}{\frac{1}{3}e^{|\alpha|^2}-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2}.\tag{26}$$

由(24)—(26)式可见，$|\phi_0\rangle,|\phi_1\rangle,|\phi_2\rangle$ 没有压缩效应，也不是 X_1 和 X_2 的最小测不准态，但它们在两个正交位相分量上是等起伏的，此起伏随 $|\alpha|^2$ 的增加有微弱波动，但被大项 $\frac{1}{3}e^{|\alpha|^2}$ 所掩盖．当 $|\alpha|^2$ 稍大时，三个态即表现出相同的起伏，此起伏与 $|\alpha|^2$ 成线性关系．三个态在 X_1 和 X_2 上的起伏情况见图 2．

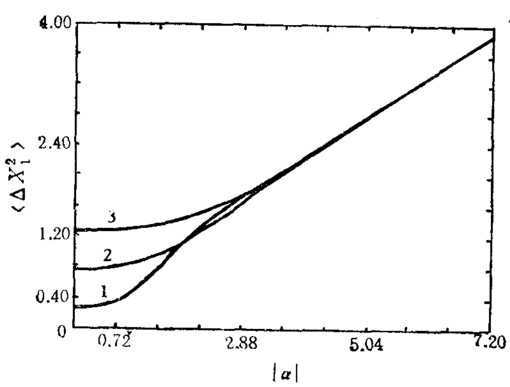

图 2 曲线 1，2，3 分别描述 $|\phi_0\rangle$，$|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$ 中的起伏情况

Hillery 曾定义了两个分别表示光场复振幅平方的实部和虚部的算符 Y_1 和 Y_2^2：

$$Y_1=\frac{a^{+2}+a^2}{2},\quad Y_2=\frac{i(a^{+2}-a^2)}{2}.$$

他证明了 a^2 的两个正交归一本征态 $|\alpha\rangle_e$（偶相干态）和 $|\alpha\rangle_0$（奇相干态）是 Y_1 和 Y_2 的最小测不准态，其最小测不准积为

$$\Delta Y_1\Delta Y_2=\left\langle N+\frac{1}{2}\right\rangle=\left\langle a^+a+\frac{1}{2}\right\rangle.$$

这里来计算 Y_1 和 Y_2 在 a^3 的三个正交归一本征态中的起伏情况．

因为对于 a^3 的三个本征态均有 $\langle a^{+4}\rangle = \langle a^4\rangle = \langle a^{+2}\rangle = 0$，又

$$\langle\phi_0|a^{+2}a^2|\phi_0\rangle = |\alpha|^4 A_1/A_0, \tag{27}$$

$$\langle\phi_1|a^{+2}a^2|\phi_1\rangle = |\alpha|^4 A_2/A_1, \tag{28}$$

$$\langle\phi_2|a^{+2}a^2|\phi_2\rangle = |\alpha|^4 A_0/A_2, \tag{29}$$

所以在态 $|\phi_0\rangle$ 中有 $\langle\Delta Y_1^2\rangle = \langle\Delta Y_2^2\rangle = \left\langle a^+a + \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{2}|\alpha|^4 A_1/A_0$，在态 $|\phi_1\rangle$ 中有 $\langle\Delta Y_1^2\rangle = \langle\Delta Y_2^2\rangle = \left\langle a^+a + \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{2}|\alpha|^4 A_2/A_1$，在 $|\phi_2\rangle$ 中有

$$\langle\Delta Y_1^2\rangle = \langle\Delta Y_2^2\rangle = \left\langle a^+a + \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{2}|\alpha|^4 A_0/A_2.$$

即 Y_1 与 Y_2 在三个本征态中也是等起伏的．上面三个态中的起伏都可分为两部分，第一部分为$\left\langle a^+a + \frac{1}{2}\right\rangle$，是最小测不准值，第二部分为多出的起伏项，即 a^3 的三个本征态也不是 Y_1 与 Y_2 的最小测不准态，Y_1 与 Y_2 在这三个态中的起伏要大于它们在 a^2 本征态中的起伏．

正如对 a 定义了 X_1 和 X_2，对 a^2 定义了 Y_1 和 Y_2，我们现在对 a^3 也定义两个可测量即两个厄密算符 Z_1 和 Z_2，它们分别表示光场复振幅立方的实部和虚部

$$Z_1 = \frac{a^{+3} + a^3}{2},\quad Z_2 = \frac{i(a^{+3} - a^3)}{2}.$$

可以算出这两个算符有如下的对易关系：

$$[Z_1, Z_2] = \frac{i}{2}[a^3, a^{+3}] = \frac{i}{2}(9N^2 + 9N + 6),$$

式中 $N = a^+a$．因此算符 Z_1 和 Z_2 满足的测不准关系为

$$\Delta Z_1 \Delta Z_2 \geqslant \frac{1}{4}\langle 9N^2 + 9N + 6\rangle.$$

为了计算 Z_1 和 Z_2 在 a^3 的三个正交归一本征态中的起伏，我们注意到对这三个态均有$\langle a^{+3}\rangle = \alpha^{*3}$，$\langle a^3\rangle = \alpha^3$，$\langle a^{+6}\rangle = \alpha^{*6}$，$\langle a^6\rangle = \alpha^6$，$\langle a^{+3}a^3\rangle = |\alpha|^6$，则不难求得对这三个态也均有下式成立：

$$\langle\Delta Z_1^2\rangle = \langle\Delta Z_2^2\rangle = \frac{1}{4}\langle 9a^{+2}a^2 + 18a^+a + 6\rangle = \frac{1}{4}\langle 9N^2 + 9N + 6\rangle.$$

这表明，a^3 的三个正交归一本征态是算符 Z_1 和 Z_2 的最小测不准态．

正如对 a 定义满足 $\langle\Delta X_1^2\rangle < \frac{1}{2}[X_1, X_2]$ 的态为通常所说的压缩态，对 a^2 定义满足 $\langle\Delta Y_1^2\rangle < \left\langle N + \frac{1}{2}\right\rangle$ 的态为振幅平方压缩态，对于 a^3，我们称满足 $\langle\Delta Z_1^2\rangle < \frac{1}{4}\langle 9N^2 + 9N + 6\rangle$ 的态为振幅立方压缩态．已经证明压缩态、振幅平方压缩态都是非经典态．我们将在另文中证明振幅立方压缩态（一种高阶压缩）也是一种非经典态，并讨论产生这种非经典态的物理过程．

上面关于起伏性质的讨论尚未表明 a^3 的三个正交归一本征态的非经典性．现在来求 $|\phi_0\rangle$，$|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$ 的二阶相干度．利用(21)—(23)式和(27)—(29)式，可立即求得

a^3 的三个正交归一本征态的二阶相干度为

$$g_0^{(2)}(0) = \frac{\langle\phi_0|a^{+2}a^2|\phi_0\rangle}{\langle\phi_0|a^+a|\phi_0\rangle^2} = \frac{A_1A_0}{A_2^2},$$

$$g_1^{(2)}(0) = \frac{\langle\phi_1|a^{+2}a^2|\phi_1\rangle}{\langle\phi_1|a^+a|\phi_1\rangle^2} = \frac{A_2A_1}{A_0^2},$$

$$g_2^{(2)}(0) = \frac{\langle\phi_2|a^{+2}a^2|\phi_2\rangle}{\langle\phi_2|a^+a|\phi_2\rangle^2} = \frac{A_0A_2}{A_1^2}.$$

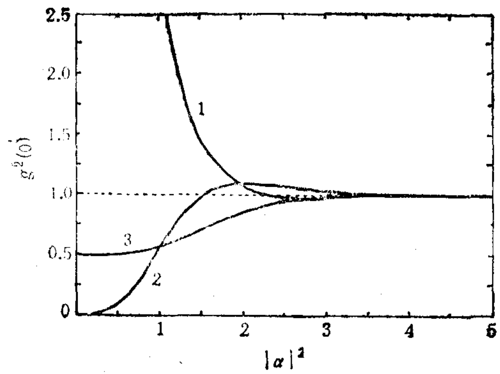

图 3 曲线 1,2,3 分别描述 $|\phi_0\rangle,|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$ 的二阶相干度

它们随 $|\alpha|^2$ 的变化情况如图 3 所示．结果表明，$|\phi_1\rangle$ 与 $|\phi_2\rangle$ 明显地具有反聚束效应，$|\phi_0\rangle$ 在 $|\alpha|^2$ 的某个取值范围内出现微的反聚束，当 $|\alpha|^2 = 3.62$ 时取极小值 $g_0^{(2)}(0) = 0.9870$．$|\phi_1\rangle$ 与奇相干态 $|\alpha\rangle_o$ 一样在 $|\alpha|^2 = 0$ 时有最大反聚束效应，但与 $|\alpha\rangle_o$ 不同的是 $|\phi_1\rangle$ 的二阶相干度随 $|\alpha|^2$ 的增大竟可超过 1 而表现出聚束特性．可见 a^3 的正交归一本征态的二阶相干度随 $|\alpha|^2$ 的变化情况与 a^2 本征态的情况还是很不相同的．总之，$|\phi_0\rangle$，$|\phi_1\rangle,|\phi_2\rangle$ 都是通过反聚束效应来表现其非经典性的．

五、关于 a^N 的正交归一本征态

由上面对 a^3 情况的讨论，不难推知 a^N(N 为正整数)有 N 个本征态，本征值为 α^N，是 N 重简并态，且 a^N 的正交本征态具有如下形式：

$$|\phi_0\rangle_N = C_0\sum_{n=0}\frac{\alpha^{Nn}}{\sqrt{(Nn)!}}|Nn\rangle,$$

$$|\phi_1\rangle_N = C_1\sum_{n=0}\frac{\alpha^{Nn+1}}{\sqrt{(Nn+1)!}}|Nn+1\rangle,$$

$$|\phi_{N-1}\rangle_N = C_{N-1}\sum_{n=0}\frac{\alpha^{Nn+(N-1)}}{\sqrt{(Nn+(N-1))!}}|Nn+(N-1)\rangle.$$

式中 $C_0,C_1,\cdots,C_{N-1}$ 为相应态矢的待定归一化常数．态矢符号中的下标 N 表示它是属于算符 a^N 的本征态．为求归一化常数(需要强调的是，归一化常数中包含了有关光子分布的统计信息)，利用归一化条件

$${}_N\langle\phi_0|\phi_0\rangle_N = C_0^2\sum_{n=0}\frac{x^{Nn}}{(Nn)!} = C_0^2A_0(x) = 1,$$

$${}_N\langle\phi_1|\phi_1\rangle_N = C_1^2\sum_{n=0}\frac{\alpha^{Nn+1}}{(Nn+1)!} = C_1^2A_1(x) = 1,$$

$$\cdots$$

$${}_N\langle\phi_{N-1}|\phi_{N-1}\rangle_N = C_{N-1}^2\sum_{n=0}\frac{x^{Nn+(N-1)}}{[Nn+(N-1)]!} = C_{N-1}^2A_{N-1}(x) = 1.$$

式中 $A_0,A_1,\cdots,A_{N-1}$ 为相应的级数．为求这些级数的值，注意到

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_{N-1} = e^x$$

和

$$A_i(x) = A_0^{(N-i)}(x),$$

$A_0^{(N-i)}(x)$ 表示 $A_0(x)$ 对 x 的 $(N-i)$ 阶导数，于是可得到一个关于 $A_0(x)$ 的$(N-1)$ 阶常系数线性非齐次的微分方程

$$A_0^{(N-1)}(x) + A_0^{(N-2)}(x) + \cdots + A_0'(x) + A_0(x) = e^x.$$

解此微分方程可得到 $A_0(x)$，从而可得 a^N 各本征态的归一化常数．我们将另文发表用这种方法所得到的 a^4，a^5，a^6 的正交归一本征态及对其性质的研究．

值得指出的是，以前文献中 a^2 的正交归一本征态的得出显然带有很大的偶然性，它并没有同时给出一个得到 a^N 的正交归一本征态的一般方法．而我们这里所给出的方法则可用来得到 N 取任何正整数时 a^N 的正交归一本征态，特别是其中也包括了 $N=1$，2 时的情况．

六、结　　语

我们知道，为了用量子力学来揭示光的波粒本性，一个重要的行之有效的办法是尽可能多地构造出一些量子力学所允许的光场态，然后对它们的性质加以研究，从而使我们有可能从中找到光场各非经典态之间的关系以及发现新的迄今尚未被发现的非经典效应．就这方面来讲，我们提出的这个求取 a^N 正交归一本征态的一般方法，能用一种系统的方法产生出大量的量子光场态．

如果我们进而考虑到，在对光进行量子力学的描述中，相干态 $|\alpha\rangle$ 和数态 $|n\rangle$ 处于两个极端情况——相干态是最接近经典的量子光场态，它对应于经典单色波，而数态是偏离经典概念最远的量子光场态，是一种最典型的非经典态——那么我们就会意识到，不论 N 取什么大于 1 的正整数，a^N 的正交归一本征态都将是介于这两个极端之间的量子光场态，它们比起相干态较多地具有粒子性(主要通过反聚束效应来反映)，比起数态则又较多地表现出波动性(主要通过噪声性质来反映)．当然 N 取不同值时，其相应本征态对波粒特性的表现程度将有不同．因此，对与一系列 N 值相应的正交归一本征态的性质进行全面系统的研究，对从量子力学上认识光的波粒本性无疑将是非常有价值的．而且，正如激光(运转良好的单模激光器输出的光是 a 的本征态的物理实现)有很多重要的实际应用一样，a^N 的本征态的物理实现可望也会有其他一些重要的实际应用．

[1] R.J. Glauber, *Phys. Rev.*, **131**(1963),2766.
[2] M. Hiliery, *Phys. Rev.*, **A36**(1987),3796.
[3] 郭光灿、伍昌鸿，物理学报，36(1987),698.

ORTHONORMALIZED EIGENSTATES OF OPERATOR a^N AND THEIR PROPERTIES

PENG SHI-AN

Department of Physics, Hebei Teachers' College, Shijiazhuang, 050091

GUO GUANG-CAN

Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026

(Received 10 February 1989)

ABSTRACT

In this paper, a general method for constructing orthonormalized eigenstates of operator a^N is presented. The emphasis is put on study of mathematical structure and quantum statistical properties in the case $N=3$. It is found that all the orthonormalized eigenstates have nonclassical effects and they form a nonclassical complete representation.

PACC: 4250