第 39 卷 第 4 期
1990 年 4 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 39, No. 4
Apr., 1990

Riemann 面上多极点亚纯向量场的代数及其在亚纯 λ-微分的实现 (I)

王 世 坤
中国科学院应用数学研究所，北京，100080

沈 建 民　　郭 汉 英[1)]
中国科学院理论物理研究所，北京，100080

1989 年 5 月 25 日收到

本文给出球面上亚纯向量场代数的明显构造，并给出这一代数的中心扩充. 研究了作为这一代数的实现球面上亚纯 λ-微分的性质.

PACC: 0210; 0240

一、引　言

众所周知，Virasoro 代数在共形场论和其它具有共形对称性的理论中具有十分重要的地位[1]. 从数学的角度来理解 Virasoro 代数，我们可以把 Virasoro 代数看作为 Riemann 球面上两极点亚纯向量场代数的扩张形式. 基于这种思想，本文构造了球面上多极点亚纯向量场的代数，并且给出了这一代数的中心扩张形式. 同时本文中还讨论了与这一代数的实现相关的球面上的多极点亚纯 λ-微分，特别是阿贝耳第三类微分的一些重要性质. 作为系列文章，我们将在 (II)，(III) 中给出一般紧致 Riemann 面上多极点亚纯向量场的代数和多极点亚纯 λ-微分整体基表示的构造，深入讨论这些代数的中心扩张，从而把 K-N 代数[2]推广到多极点的情况，并且讨论这些代数在物理上的应用.

二、球面上多极点亚纯向量场代数及其中心扩张

现先说明几个将在本文中出现的符号和术语. $P_i (i=1,2,\cdots,N)$ 表示 Riemann 球面 S^2 上 N 个不同点，用非齐次坐标表示为

$$z(P_1)=0,\quad z(P_N)=\infty,$$
$$z(P_i)=z_i\quad i=2,3,\cdots,N-1.$$

$\mathscr{H}_\lambda$ 表示仅在 P_i 点有极性的亚纯 λ-微分 (λ 是整数)构成的空间. 如果用

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室).

$$D = \sum_{i=1}^{N} m_i P_i$$

表示 S^2 上一个给定的除子，则我们用 $\mathscr{H}_\lambda(D)$ 来代表在 P_i 点赋值[4]不小于 $(-m_i)$ 的亚纯 λ-微分所构成的空间。

由 Riemann-Roch 定理[3]

$$\dim \mathscr{H}_\lambda(D) = \dim \mathscr{H}_{1-\lambda}(-D) + (1 - 2\lambda) + \deg D. \quad (1)$$

当 $\lambda = -1$, $D = 0$ 时，可知 $\dim \mathscr{H}_2(0) = 0$，即 S^2 上不存在全纯二次微分，因此

$$\dim \mathscr{H}_{-1}(0) = 3. \quad (2)$$

即 S^2 上有 3 个独立的全纯向量场。设 L_0, $L_{\pm1}$ 是 $\mathscr{H}_{-1}(0)$ 的一组基，它们用参数 z 可以表示为

$$L_{+1} = z^2\partial/\partial z, \quad L_{-1} = \partial/\partial z,$$
$$L_0 = z\partial/\partial z.$$

若仍用 $\mathscr{H}_{-1}$ 表示 S^2 上亚纯(包括全纯)向量场的代数，显然 $\mathscr{H}_{-1}(0)$ 构成了 $\mathscr{H}_{-1}$ 的一个子代数。它同构于李代数 $sL(2, C)$。现在我们来构造 $\mathscr{H}_{-1}$ 的基。以下的讨论将说明 $\mathscr{H}_{-1}$ 是一无穷维代数。设

$$\mathscr{H}^i_{-1}(m_i) \equiv \{H^i_{1-n},\ m_i \geqslant n \geqslant 2\} \quad i = 1, 2, \cdots, N. \quad (3)$$

这里

$$H^i_{1-n} = (z - z_i)^{1-n}\partial/\partial z \quad i = 1, 2, \cdots, N-1, \quad (4)$$

$$H^N_{1-n} = z^{1+n}\partial/\partial z = -w^{1-n}\partial/\partial w \quad w = 1/z. \quad (5)$$

这说明 H^i_{1-n} 只在 P_i 点 $(1 \leqslant i < N)$ 有 $n-1$ 重奇点，在 P_N 点有 $1+n$ 重零点。H^N_{1-n} 只在 P_N 点具有 $n-1$ 重极性，而在 P_1 点有 $1+n$ 重零点。即

$$\mathrm{ord}_{P_i}(H^i_{1-n}) = 1 - n \quad 1 \leqslant i < N, \quad (6a)$$

$$\mathrm{ord}_{P_N}(H^i_{1-n}) = 1 + n, \quad (6b)$$

$$\mathrm{ord}_{P_N}(H^N_{1-n}) = 1 - n, \quad (6c)$$

$$\mathrm{ord}P_1(H^N_{1-n}) = 1 + n. \quad (6d)$$

因为全纯向量场 L_0, $L_{\pm1}$ 和亚纯向量场 H^i_{1-n}, $(i = 1, 2, \cdots, N,\ m_i \geqslant n \geqslant 2)$ 是复线性无关的，这些基可张成 $\left(\sum_{i=1}^{N} m_i + 3\right)$ 维线性空间。另一方面由 Riemann-Roch 定理，当 $D = \sum_{i=1}^{N} m_i P_i$ 时

$$\dim \mathscr{H}_{-1}(D) = \dim \mathscr{H}_2(-D) + 3 + \sum_{i=1}^{N} m_i. \quad (7)$$

当 $\sum_{i=1}^{N} m_i$ 适当大时，$\dim \mathscr{H}_2(-D) = 0$，所以

$$\dim \mathscr{H}_{-1}(D) = 3 + \sum_{i=1}^{N} m_i. \quad (8)$$

综上所述

$$\left\{\bigcup_{i=1}^{N} \mathscr{H}^i_{-1}(m_i)\right\} \cup \mathscr{H}_{-1}(0).$$

可以构成 $\mathscr{H}_{-1}(D)$ 的一组基．显然 Riemann 球面上任何两个只在 $P_i(i=1,2,\cdots,N)$ 点具有极性的亚纯向量场 X, Y，对它们作李运算后，只要取 m_i 足够地大，则李括号 $[X, Y]$ 都可以用上述的基来展开．这就说明如果我们设

$$\mathscr{H}^i_{-1} \equiv \{H^i_{1-n},\ n \geqslant 2\} \quad i=1,2,\cdots,N, \tag{9}$$

则 $\left\{\bigcup_{i=1}^{N} \mathscr{H}^i_{-1}\right\} \cup \mathscr{H}_{-1}(0)$ 就构成了无穷维代数 $\mathscr{H}_{-1}$ 的一组完备基． 总之构造球面上多极点亚纯向量场的代数的基本思想是以全纯向量场的一组基添上具有单极点的亚纯向量场的一组基(例如在 P_1 点)可以得到单极点的向量场代数．如果再添上以 P_N 为极点的一组基，就得到 S^2 上双极点亚纯向量场的代数． 它的中心扩张就是 Virasoro 代数．如此构造即得到多极点亚纯向量场的代数． 这一思想对于我们在高亏格 Riemann 面上构造多极点亚纯 λ-微分的基和亚纯向量场的代数是非常重要的．

现在我们给出 S^2 上多极点亚纯向量场关于基 [(9) 式]的代数关系． 必须说明的是这些代数关系与极点 P_i 所取的坐标无关．另一方面若用不同于 P_i 的 N 个点 $Q_i(i=1,2,\cdots,N)$ 来代替 P_i，所得到的新的亚纯向量场的代数 $\mathscr{H}'_{-1}$ 应与 $\mathscr{H}_{-1}$ 同构． 所以我们可适当选取点 P_i 及其坐标，使

$$z(P_i)=i-1,\ z(P_N)=\infty \quad i=1,2\cdots,N-1,$$

则我们有以下代数关系：

$$[H^i_{1-n},\ H^i_{1-m}]=(n-m)H^i_{1-(m+n)}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}[H^i_{1-n},\ H^j_{1-m}] = &\sum_{\alpha=2}^{n+1}(2n-\alpha)\,X^{ij}_{mn}(\alpha)H^i_\alpha \\ &-\sum_{\alpha=2}^{m+1}(2m-\alpha)\,X^{ji}_{nm}(\alpha)H^j_\alpha.\end{aligned} \tag{11}$$

这里 $i<j,\ i,j=1,2,\cdots,N-1$.

$$X^{ij}_{nm}(\alpha)=\begin{cases}C^{n+1-\alpha}_{1-m}\cdot(i-j)^{\alpha-m-n} & n\geqslant 2\\ (1-\delta_{2-\alpha,0})C^{\alpha-m-n}_{1-m}\cdot(i-j)^{\alpha-m-n} & \text{当 } i=1 \text{ 且 } m\leqslant 1.\end{cases} \tag{12}$$

这里

$$C^{n+1-\alpha}_{1-m}=\frac{(1-m)(-m)(-m-1)\cdots(\alpha-m-n+1)}{(n+1-\alpha)!},$$

$C^M_K=0$　当 $M<0,\ M>K>0$ 时.

$H^1_0=L_{-1},\ H^1_1=L_0,\ H^1_2=L_{+1},$

$H^1_{1-n}=H^N_{1+n}$　当 $n\leqslant -2$.

如果我们用 $\widetilde{\mathscr{H}}_{-1}$ 表示代数 $\mathscr{H}_{-1}$ 的中心扩张形式，$\widetilde{\mathscr{H}}_{-1}$ 的基用 $\widetilde{H}^i_{1-n}$ 表示，则 $\widetilde{\mathscr{H}}_{-1}$ 的代数关系为

$$[\widetilde{H}^i_{1-n},\ \widetilde{H}^i_{1-m}]=(n-m)\,\widetilde{H}^i_{1-(m+n)}-c\delta_{i,1}\delta_{m+n,0}(n^3-n), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}[\widetilde{H}^i_{1-n},\widetilde{H}^j_{1-m}] = &\sum_{\alpha=2}^{n+1}(2n-\alpha)X^{ij}_{nm}(\alpha)\widetilde{H}^i_\alpha \\ &-\sum_{\alpha=2}^{m+1}(2m-\alpha)X^{ji}_{mn}(\alpha)\widetilde{H}^j_\alpha - c\delta_{i,1}C^{1+n}_{1-m}\cdot(i-j)^{1-m}(n^3-n).\end{aligned} \tag{14}$$

这里 $i<j$, $i,j=1,2,\cdots,N-1$.

$$[c, \tilde{H}^{i}_{1-n}]=0. \tag{15}$$

三、Riemann 球面上亚纯 λ-微分

由 Riemann-Roch 定理,我们同样可以构造 $\mathscr{H}_\lambda$ 的一组基:

$$\mathscr{H}^{i}_{\lambda}\equiv\{\phi^{\lambda}_{i,n},\ n\leqslant-1\}\quad i=1,2,\cdots,N-1. \tag{16}$$

这里的亚纯 λ-微分 $\phi^{\lambda}_{i,n}$ 在 $S^2\backslash\{P_i,P_N\}$ 上全纯,并且

$$\begin{aligned}&\mathrm{ord}_{P_i}(\phi^{\lambda}_{i,n})=n\quad n\leqslant-1,\ i=1,2,\cdots,N-1,\\&\mathrm{ord}_{P_N}(\phi^{\lambda}_{i,n})=-n-2\lambda.\end{aligned} \tag{17}$$

另外我们构造

$$\mathscr{H}^{N}_{\lambda}\equiv\{\phi^{\lambda}_{N,n},\ n\leqslant-2\lambda\}, \tag{18}$$

满足条件:

$$\begin{aligned}&\mathrm{ord}_{P_N}(\phi^{\lambda}_{N,n})=n,\\&\mathrm{ord}_{P_1}(\phi^{\lambda}_{N,n})=-n-2\lambda.\end{aligned} \tag{19}$$

由 Riemann-Roch 定理可知,受(17)和(19)式约束的亚纯 λ-微分被唯一确定到相差一常数因子. 设除子 $D=\sum\limits_{i=1}^{N}m_iP_i$,

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}^{i}_{\lambda}(D)=\{\phi^{\lambda}_{i,n},\ -m_i\leqslant n\leqslant-1\}\quad i=1,2,\cdots,N-1,\\&\mathscr{H}^{N}_{\lambda}(D)=\{\phi^{\lambda}_{N,n},\ -m_N\leqslant n\leqslant-2\lambda\}.\end{aligned} \tag{20}$$

显然这些亚纯 λ-微分复线性无关,它们构成 $\sum\limits_{i=1}^{N}m_i+1-2\lambda$ 维线性空间. 由Riemann-Roch 定理

$$\dim\mathscr{H}_\lambda(D)=\dim\mathscr{H}_{1-\lambda}(-D)+(1-2\lambda)+\deg D.$$

当正整数 m_i 足够大时, 因为 $(1-\lambda)$ 型亚纯微分 $\phi^{1-\lambda}$ 其相应除子的 degree 为 $2(\lambda-1)$, 当

$$\sum_{i=1}^{N}m_i>2(\lambda-1)$$

时

$$\dim\mathscr{H}_{1-\lambda}(D)=0,$$

所以

$$\dim\mathscr{H}_\lambda(D)=\sum_{i=1}^{N}m_i+1-2\lambda. \tag{21}$$

(21)式说明(20)式构成了 $\mathscr{H}_\lambda(D)$ 的一组基. 对于 $\mathscr{H}_\lambda$ 中任一个元素,我们总可以取充分大的 m_i $(i=1,2,\cdots,N)$, 使这个元素属于 $\mathscr{H}_\lambda(D)$. 因此可以用(20)式的基线性表示. 由此可知(16)和(18)式可以作为无穷维空间 $\mathscr{H}_\lambda$ 的一组基.

对于一般亏格上的紧 Riemann 面,多极点亚纯 λ-微分可以同样构造

$$\mathscr{H}^{i}_{\lambda}\equiv\{\phi^{\lambda}_{i,n};\ n\leqslant-1\}\quad i=1,2,\cdots,N-1,$$

$$\mathscr{H}_\lambda^N \equiv \{\phi_{N,n}^\lambda;\ n \leqslant 2\lambda(g-1)-g\}. \tag{22}$$

这里 g 是亏格数。

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_{P_i}(\phi_{i,n}^\lambda) = n, \\ &\mathrm{ord}_{P_N}(\phi_{i,n}^\lambda) = -n + 2\lambda(g-1) - g \quad i = 1, 2, \cdots, N-1, \\ &\mathrm{ord}_{P_N}(\phi_{N,n}^\lambda) = n, \\ &\mathrm{ord}_{P_1}(\phi_{N,n}^\lambda) = -n + 2\lambda(g-1) - g. \end{aligned} \tag{23, 24}$$

在差一常数因子的意义下，这些基是唯一确定的。需要强调的是 (22), (23) 和 (24) 各式在 $g = 1$ 或 $\lambda = 0, 1$ 的情况下要作若干修正。 关于它们的细节以及亚纯 λ-微分在高亏格 Riemann 面上的显式表示，我们将另文详细讨论。

对于球面 S^2 的情况，本文给出 (16) 和 (18) 式中亚纯 λ-微分的基的表示。 取坐标使得 $z(P_1) = 0$, $z(P_i) = z_i$, $1 < i < N$, $z(P_N) = \infty$ 或 $w(P_N) = 0$, 这里坐标 w 与 z 的关系为 $w = 1/z$, 则有

$$\phi_{i,n}^\lambda = (z - z_i)^n (dz)^\lambda \quad n \leqslant -1, \tag{25a}$$

$$\phi_{N,n}^\lambda = -z^{-n-2\lambda}(dz)^\lambda = w^n (dw)^\lambda. \tag{25b}$$

一般而言，$\mathscr{H}_\lambda$ 中元素，即亚纯 λ-微分 ϕ^λ 可用复参数表示为

$$\phi^\lambda = \varphi_{\underbrace{zz\cdots z}_{\lambda\text{重}}}(dz)^\lambda. \tag{26}$$

这里 $(dz)^\lambda = (dz)^{\otimes\lambda}$。 在 Riemann 面上固定一个第三类阿贝耳微分

$$\omega = K_z dz \tag{27}$$

定义内积

$$\langle \phi^\lambda, \psi^\lambda \rangle = \iint\limits_{M\setminus\bigcup_{i=1}^N D_i} \phi_{\underbrace{zz\cdots z}_{\lambda}} \psi_{\underbrace{\bar z\bar z\cdots \bar z}_{\lambda}} (K^z)^\lambda (\bar K^{\bar z})^\lambda \omega \wedge \bar\omega. \tag{28}$$

这里 ϕ^λ, $\psi^\lambda \in \mathscr{H}_\lambda$, D_i 是以点 P_i 为中心的足够小的圆盘。显然由 (28) 式给出的内积是共形不变的。引入这一内积后，可用标准的正交化程序[5]把 $\mathscr{H}_\lambda$ 的基 $\{\phi_{i,n}^\lambda\}$ 正交归一为一组新的基 $\{\eta_{i,n}^\lambda\}$ ($n \in \mathrm{Z}$, 如果 $i = 1$, $n \leqslant -1$, 如果 $i \neq 1$):

$$\langle \eta_{i,n}^\lambda, \eta_{j,m}^\lambda \rangle = \delta_{i,j}\delta_{n,m}. \tag{29}$$

任意一个多极点的亚纯 λ-微分可用标准基展开:

$$\phi^\lambda = \sum_{m,i} A_{m,i}\eta_{i,m}^\lambda. \tag{30}$$

$$A_{m,i} = \langle \phi^\lambda, \eta_{i,m}^\lambda \rangle. \tag{31}$$

虽然内积是用面积分定义的，但在计算展开系数 $A_{m,i}$ 时，其实和围道积分有联系。我们将另文分析这一问题。

在 (28) 式中引入的第三类阿贝耳微分 ω 在弦理论中有重要作用。在 Riemann 面 M 上引入调和函数

$$\tau(Q) = \mathrm{Re}\int_{Q_0}^{Q} \omega. \tag{32}$$

$Q_0 \in M$ 是一个任意的参照点。 $\tau(Q)$ 是单值函数，并不依赖于积分路径。

$$c_\tau = \{Q \in M \mid \tau = \tau(Q)\}. \tag{33}$$

等时线 c_τ 描述了闭弦在给定时刻 τ 的位置. 当 $\tau\to\pm\infty$ 时, c_τ 变成围绕极点的小圈. 闭曲线 c_τ 在当 τ 取某个 τ_0 时会分裂成若干闭圈, 其分裂点个数依赖于 ω 的极点的个数和 M 的亏格数. 等时圈 c_τ 的分裂或接合很好地描绘了闭弦的相互作用.

以 S^2 上的第三类阿贝耳微分为例:

$$\omega=\frac{z-2}{z(z-1)}dz. \tag{34}$$

将 (34) 式代入 (32) 式, 得

$$\tau=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{(z(Q_0)-1)(\bar{z}(Q_0)-1)}{z^2(Q_0)\bar{z}^2(Q_0)}+\ln\frac{z^2(Q)\bar{z}^2(Q)}{(z(Q)-1)(\bar{z}(Q)-1)}\right]. \tag{35}$$

适当选取 Q_0, 使 (35) 式等号右边第一项为零, 则可以看出当 $\tau\to\pm\infty$ 时, 由于 (35) 式等号右边第二项中 $z(Q)$ 允许有一相因子变化, 所以在 ω 的极点 0, 1, ∞ 附近的等时线是以这些极点为中心的闭圈.

不妨令 $\dfrac{z^2(Q)}{z(Q)-1}=A$, 若取极坐标 $z=re^{i\theta_1}$, $A=ae^{i\theta_2}$, 从方程 $z^2=A(z-1)$ 可以导出

$$r^4=a^2(r^2-2r\cos\theta_1+1). \tag{36}$$

由于 $|A|^2=e^\tau$, 固定了 τ 也就固定了 a, 这时 $r=r(\theta_1)$. 这意味着方程 (36) 实数解是否存在及其个数依赖于 θ_1. 也就是说沿一条经线看, 它和等时线 C_τ 相切或相交的次数即为实数解的个数. 当某条经线经过两个闭圈的分裂(或接合)点时, 必然和两个圈在同一点相切. 这说明在该点方程有二重根. 当 $\theta_1=0$, $a=4$ 时, r 有二重根, 即 $r=2$, 恰好是 ω 的零点 $z=2$ 处. 这说明 τ 关于 $z(Q)$ 是个 Morse 函数. 即

$$\frac{\partial\tau}{\partial z(Q)}=\frac{\partial}{\partial z(Q)}\left[\ln z(Q)-\frac{1}{2}\ln(z(Q)-1)\right]$$
$$=\frac{1}{z(Q)}-\frac{1}{2}\frac{1}{z(Q)-1}=0.$$

得到 $z(Q)=2$.

这个结论对一般紧 Riemann 面上由第三类阿贝耳微分定义的 τ 也是成立的.

[1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B241**(1984) 333;
D. Friedan, Z. Qiu and S. H. Shenker, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1575;
E. Verlinde, *Nucl. Phys.*, **B300** [FS22] (1988), 360;
L. A. Gaumé, C. Gomez, G. Moore and C. Vafa, preprint BUHEP-87/51, CERN TH 4883/87.
[2] I. M. Krichever, S. P. Novikov, *Funk. Anal. i Pril*, 21(4)(1987), 47; *ibid.*, (2)(1987), 46.
[3] H. Farks and I. Kra, Riemann Surfaces, Springer Verlag, Berlin, (1980).
[4] P. Griffiths and J. Harris, Principles of Algebraic Geometry.
[5] V. I. Smirnov, Linear Algebra and Group Theory, Dover Publications, (1970).

THE ALGEBRAS OF MEROMORPHIC VECTOR FIELDS AND ITS REALIZATION ON THE SPACES OF MEROMORPHIC λ-DIFFERENTIALS ON RIEMANN SURFACES (I)

WANG SHI-KUN

Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing, 100080

SHEN JIAN-MIN GUO HAN-YING

Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080

(Received 25 May 1989)

ABSTRACT

The algebra of meromorphic vector fields with multi-poles on Riemann sphere and the central extension of the algebra are constructed explicitly. Some properties of meromorphic λ- differentials, in particular, of the third kind differentials are investigated.

PACC: 0210; 0240