

矩形谐振器中非传播重力-表面 张力孤波的理论研究*

黄国翔

颜家壬

复旦大学物理系, 上海, 200433 湘潭大学物理系, 湘潭, 411105

戴显熹

复旦大学物理系, 上海, 200433

1989年4月10日收到; 1989年12月6日收到修改稿

本文用多重尺度微扰方法研究了外加驱动下, 计及表面张力时矩形谐振器中有限深流体重力-表面张力驻波模的弱非线性调制. 对吴君汝等人所发现的非传播表面孤波现象进行了较为详细的分析计算, 修正和发展了 Larraza, Putterman 和 Miles 的非传播孤波理论, 得到了正确的二次谐波共振条件. 在 $\theta-kd$ 图上对非传播表面孤波的存在区域进行了仔细的理论分析, 发现除静态液面深度外, 流体的表面张力是产生和控制非传播表面孤波的另一重要参数. 最后讨论了矩形谐振器的非线性共振曲线特性, 并与实验进行了比较.

PACC: 4735; 4325

一、引言

近年来, 人们对有限水深情形下行波模的非线性相互作用进行了深入的研究^[1,2]. 1984年, 吴君汝等人在实验室中首次发现了非传播表面孤波^[3], 这种新型的孤波实际上是由表面波矩形谐振器中驻波模式的自相互作用形成的, 因而称之为非传播孤子 (nonpropagating soliton). 我国物理学工作者在实验与理论上对非传播孤波现象进行了一系列有益的探索^[4-11]. 但是, 正如魏荣爵所指出, 在非传播孤波的理论方面, 仍存在一系列尚待解决的问题^[8].

对非传播孤波现象的理论解释, 是由 Larraza, Putterman 和 Miles 首先作出的^[12,13]. Larraza 与 Putterman 使用多重尺度技术, 但不够规范, 其各级近似解带有某些猜测的成份, 并且未将外加驱动与流体的表面张力效应考虑进去. 这在理论上不令人满意. 因为从实验来看, 外加驱动是形成非传播孤波的重要因素^[3,6]; 另外实验也表明表面张力对非传播孤波的形成与波形有重要影响^[14]. Miles^[13] 使用 Lagrangian 平均法, 上述因素虽已考虑, 但计算中量级不够显明, 且文中计入表面张力后所得到的重力-表面张力波的二次谐波共振条件与波相互作用一般理论^[2,16]所给出的相应条件不一致. 尽管文献[15]给出

* 国家自然科学基金部分资助的课题.

了文献[13]的一个更正,但这个问题依然存在。本文计入外加驱动、表面张力及表面波阻尼,用多重尺度法对矩形谐振器中重力-表面张力驻波模的弱非线性自调制进行较为详细的逐级计算,修正和发展 Larraza, Putterman 与 Miles 的非传播孤波理论,导出与波相互作用一般理论相一致的二次谐波共振条件,在 $\sigma-kd$ 图上分析非传播孤波的存在区域。最后讨论矩形谐振器的非线性共振特性,并与实验进行比较。

二、基本方程与多重尺度展开

根据吴君汝的实验^[3,4],考虑长为 l 宽为 b 的矩形槽(见图1),其内注入深为 d 的液

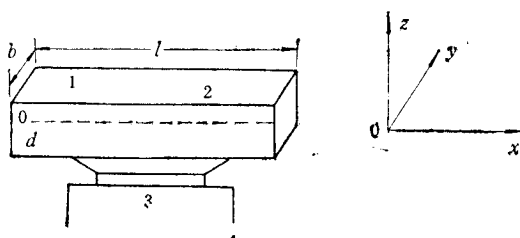


图1 矩形谐振器示意图与坐标系的选取

1 为水槽; 2 为静态液面; 3 振动台

体,设 $b, d \ll l$ 。取直角坐标系如图1所示,则计及表面张力后流体无旋运动的速度势 ϕ 满足以下运动方程与边界条件:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -d < z < \zeta, \quad (1)$$

$$\phi_y = 0, \quad y = 0, b, \quad (2)$$

$$\phi_z = 0, \quad z = -d, \quad (3)$$

$$\zeta_t + \phi_x \zeta_x + \phi_y \zeta_y - \phi_z = 0, \quad z = \zeta, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \phi_t + (g + z_0) \zeta + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \\ & = \sigma \frac{\zeta_{xx}(1 + \zeta_y^2) + \zeta_{yy}(1 + \zeta_x^2) - 2\zeta_x \zeta_y \zeta_{xy}}{(1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)^{3/2}}, \quad z = \zeta, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\zeta(x, y, t)$ 为当流体受到扰动时自由表面相对于静止表面 $z = 0$ 的偏离; σ 为表面张力系数 α 与密度 ρ 之比; g 为重力加速度; $z_0 = a_0 \cos 2\omega_0 t$ 为振动台在竖直方向所加的驱动两点代表对时间的二次导数。对有限水深弱非线性波,可设波振幅的相对大小为 ε ($\varepsilon = a/\lambda$ 代表波的斜度, a, λ 分别为表面波的特征振幅与特征波长),引入多重尺度变量^[110]

$$X_j = \varepsilon^j x, \quad T_j = \varepsilon^j t \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

将 ϕ, ζ 在平衡静止状态 $\phi = 0, \zeta = 0$ 作渐近展开

$$\phi = \sum_{j=1} \varepsilon^j \phi^{(j)}, \quad \zeta = \sum_{j=1} \varepsilon^j \zeta^{(j)}. \quad (6)$$

将方程(4),(5)在 $z = 0$ 作 Taylor 展开到 $O(\varepsilon^3)$ 级,且设 $z_0 = O(\varepsilon^2)$,则方程(1)–(3)可改写为

$$\phi_{xx}^{(j)} + \phi_{yy}^{(j)} + \phi_{zz}^{(j)} = \alpha^{(j)}, \quad -d < z < \zeta, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

$$\phi_y^{(j)} = 0, \quad y = 0, b, \quad (8)$$

$$\phi_z^{(j)} = 0, \quad z = -d, \quad (9)$$

$$\alpha^{(1)} = 0, \quad \alpha^{(2)} = -2\phi_{xz}^{(1)}, \quad \alpha^{(3)} = \dots, \quad (10)$$

方程(4)可改写为

$$\zeta_i^{(j)} - \phi_z^{(j)} = \beta^{(j)}, \quad z = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

$$\beta^{(1)} = 0, \quad \beta^{(2)} = -[\zeta_{T_1}^{(1)} + \phi_x^{(1)}\zeta_x^{(1)} + \phi_y^{(1)}\zeta_y^{(1)} - \zeta^{(1)}\phi_{zz}^{(1)}], \quad \beta^{(3)} = \dots, \quad (12)$$

方程(5)可化为

$$\phi_i^{(j)} + g\zeta^{(j)} - \sigma(\zeta_{xx}^{(j)} + \zeta_{yy}^{(j)}) = \gamma^{(j)}, \quad z = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (13)$$

$$\gamma^{(1)} = 0, \quad \gamma^{(2)} = 2\sigma\zeta_{xz}^{(1)} - \left[\phi_{T_1}^{(1)} + \frac{1}{2}(\nabla\phi^{(1)})^2 + \zeta^{(1)}\phi_{iz}^{(1)} \right], \quad \gamma^{(3)} = \dots. \quad (14)$$

方程组(1)–(5)已转换为线性但非齐次的无穷方程链。一般说来它们的解具有长期项(secular term)。引入多重尺度变量,正是为了消除这些长期项。

三、(0,1)驻波模的自调制

首先分析(0,1)驻波模的自调制,由于篇幅限制,这里省去具体求解过程,仅指出求解步骤和给出计算结果。

1) 一级近似 在方程(7)–(14)中令 $j = 1$, 得一级近似方程组,注意到 $\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}$ 均为零,不难求得单模解

$$\phi^{(1)} = \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos ky [\phi^{(1,1)} e^{i(\omega t - k_x x)} + \text{c.c.}], \quad (15)$$

$$\zeta^{(1)} = -i(kT/\omega) \cos ky [\phi^{(1,1)} e^{i(\omega t - k_x x)} - \text{c.c.}], \quad (16)$$

$$\omega^2 = (gk + \sigma k^3)T, \quad T = \tanh kd, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad (17)$$

式中 k_x 为任意实数, $k_y = n(\pi/b)$, n 为整数; c.c. 代表相应的复共轭项; $\phi^{(1,1)}$ 为慢变量 X_i, T_i 的函数。矩形槽作为波导,表面波沿 x 方向传播,在 y 方向为驻波,对(0,1)模($k_x = 0, n = 1$),有

$$\phi^{(1)} = \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos ky [\phi^{(1,1)} e^{i\omega t} + \text{c.c.}], \quad (18)$$

$$\zeta^{(1)} = -i(kT/\omega) \cos ky [\phi^{(1,1)} e^{i\omega t} - \text{c.c.}], \quad (19)$$

式中 $k = \pi/b$ 。

2) 二级近似 在方程(7)–(14)中令 $j = 2$, 利用已得到的 $\phi^{(1)}, \zeta^{(1)}$ 求出 $\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}, \gamma^{(2)}$, 不难求得二级近似解为

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &= \frac{ik^2}{8\omega} (1 + 3T^2) \phi^{2(1,1)} e^{2i\omega t} \\ &\quad - i \frac{3k^2(1 + T^2)}{8\omega} \eta \frac{\cosh 2k(z+d)}{\cosh 2kd} \cos 2ky \phi^{2(1,1)} e^{2i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (20) \\ \zeta^{(2)} &= \frac{k^2(T^2 - 1)}{2g} |\phi^{(1,1)}|^2 + \frac{k^2(1 + T^2)}{2g(1 + 4\sigma k^2/g)} \cos 2ky |\phi^{(1,1)}|^2 \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \frac{k^2(T^2 - 3)}{4[gT^2 - \sigma k^2(3 - T^2)]} \cos 2ky \phi^{(1,1)} e^{2i\omega t} + \text{c.c.} \right\}, \quad (21)$$

$$\eta = \frac{g + \sigma k^2(3 - T^2) - gT^2}{gT^2 - \sigma k^2(3 - T^2)}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \phi^{(1,1)}}{\partial T_1} = 0 \quad (\text{消除长期项条件}). \quad (23)$$

方程(23)实际上为 $(\partial/\partial T_1)\phi^{(1,1)} + c_g(\partial/\partial X_1)\phi^{(1,1)} = 0$, c_g 为群速度. 因为 $(0, 1)$ 模 $c_g = 0$, 所以退化为(23)式.

3) 三级近似 令 $j = 3$ 得三级近似方程组. 利用前两级近似中得到的 $\phi^{(1)}$, $\zeta^{(1)}$, $\phi^{(2)}$, $\zeta^{(2)}$ 求出 $\alpha^{(3)}$, $\beta^{(3)}$ 和 $\gamma^{(3)}$, 求解三级近似方程组. 经过详细计算, 消除长期项条件给出

$$2i\omega\zeta_{T_2}^{(1,1)} - \hat{c}^2\zeta_{X_1}^{(1,1)} - Q|\zeta^{(1,1)}|^2\zeta^{(1,1)} - \nu\zeta^{*(1,1)}e^{2i\Delta\omega t} = 0, \quad (24)$$

式中*代表复共轭, 而

$$\zeta^{(1,1)} = -i(kT/\omega)\phi^{(1,1)}, \quad \Delta\omega = \omega_0 - \omega, \quad (25)$$

$$\hat{c}^2 = (g/2k)B_*, \quad B_* = (1 + \hat{\sigma})[T + kd(1 - T^2)] + 2\hat{\sigma}T, \quad (26)$$

$$Q = g(1 + \hat{\sigma})(k^3/T)A_*,$$

$$A_* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma})(1 - T^2)^2 + \frac{1}{4}\frac{1 + \hat{\sigma}}{1 + 4\hat{\sigma}}(1 + T^2)^2 - \frac{1 + \hat{\sigma}}{8}\frac{(3 - T^2)^2}{T^2 - \hat{\sigma}(3 - T^2)} + \frac{9\hat{\sigma}T^2}{8(1 + \hat{\sigma})}, \quad (27)$$

$$\hat{\sigma} = \sigma k^2/g, \quad \nu = 2\omega^4 a_0/g. \quad (28)$$

当令 $\sigma \rightarrow 0$ (即不计表面张力时), 有

$$\hat{c}^2 \rightarrow c^2 = (g/2k)[T + kd(1 - T^2)], \quad (29)$$

$$A_* \rightarrow A = (1/8)[6T^4 - 5T^2 + 16 - 9T^{-2}]. \quad (30)$$

与 Larraza 和 Putterman 的结果^[12]一致. 作变换^[10]

$$\zeta^{(1,1)} = (1/\varepsilon)u(X_1, T_2)e^{i\Delta\omega T_1/\varepsilon^2} = (1/\varepsilon)u(x, t)e^{i\Delta\omega t}, \quad (31)$$

则方程(24)回到原来的变量 x, t

$$2i\omega u_t - \hat{c}^2 u_{xx} + (\omega^2 - \omega_0^2)u - Q|u|^2 u - \delta u^* = 0, \quad (32)$$

式中 $\delta = \nu\varepsilon^2$. 因 ω_0 (驱动圆频率)与 ω (固有圆频率)十分接近, 已近似取

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega \approx (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)/2\omega = (\omega_0^2 - \omega^2)/2\omega.$$

按照 Miles^[13], 引入表面波阻尼, 即令 $\partial/\partial t \rightarrow \partial/\partial t + \hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}$ 为代表表面波实际阻尼对自由振荡时临界阻尼之比(见文献[13]), 有

$$2i\omega u_t - \hat{c}^2 u_{xx} + (\omega^2 - \omega_0^2)u - Q|u|^2 u + i\gamma u - \delta u^* = 0, \quad (33)$$

式中 $\gamma = 2\omega\hat{\alpha}$.

四、非传播孤波解及其特性

方程(33)是带有阻尼和驱动项的非线性 Schrödinger 方程, 不难直接验证有非传播孤波解(精确解)

$$u = (2/Q)^{1/2} \hat{c} a e^{-i\varphi} \operatorname{sech} ax, \quad (34)$$

$$a = (1/\hat{c})[(\omega^2 - \omega_0^2) + (\delta^2 - \gamma^2)^{1/2}]^{1/2}, \quad (35)$$

$$\cos \varphi = (1/\sqrt{2})[1 - (1 - \gamma^2/\delta^2)^{1/2}]^{1/2}, \quad (36)$$

$$\sin \varphi = (1/\sqrt{2})[1 + (1 - \gamma^2/\delta^2)^{1/2}]^{1/2}, \quad (37)$$

式中 $(2/Q)^{1/2}, \hat{c}, a$ 和 φ 为实数。由此有

(1) a 与 φ 为实数要求 $\delta > \gamma$, 即外加驱动必须足够大以克服表面波的阻尼作用, 使孤波得以形成;

(2) a 为实数也要求有 $\omega_0^2 < \omega^2 + (\delta^2 - \gamma^2)^{1/2}$ 。另外, 由方程(33)可近似得到非线性色散关系。联合起来有

$$\omega^2 + (\delta^2 - \gamma^2)^{1/2} - Q|u|^2 < \omega_0^2 < \omega^2 + (\delta^2 - \gamma^2)^{1/2}; \quad (38)$$

(3) 由(36), (37)式知, 孤波有位相滞后 $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$ 。 $\gamma = 0$ 时, $\varphi = \pi/2$ 。尽管 a 随 δ 的增加而增加, 但孤波宽度随之变窄;

(4) 由二级近似解(20), (21)式及方程(33)的非线性项系数 Q 的表达式(27)可知, 若 σ, kd 满足

$$gT^2 - \sigma k^2(3 - T^2) = 0, \quad (39)$$

则微扰展式存在奇异性, 这相应于二次谐波共振。这一结论与波相互作用一般理论^[2, 16]所给出的二次谐波共振条件

$$\omega(2k)/2k = \omega(k)/k \quad (40)$$

是一致的。但文献[13]得不到这个结果;

(5) 当忽略外加驱动, 流体的阻尼和表面张力效应时(即令 $\hat{a}, \delta$ 与 σ 均为零), 以上结果与 Larraza, Putterman 和文献[10]的相应结果完全一致。

将现在的结果与文献[13]的结果比较是有趣的。关于 A_* 与 B_* , 文献[13, 15]给出

$$A_* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - T^2) + \frac{1}{4} \frac{(1 + T^2)^2}{(1 + 4\hat{\sigma})} - \frac{1}{8} \frac{(3 - T^2)^2}{(T^2 - 4\hat{\sigma})} + \frac{9}{8} \hat{\sigma} T^2,$$

$$B_* = T + kd(1 - T^2) + 2\hat{\sigma}T.$$

现在的结果为(见(26), (27)式)

$$A_* = \frac{1}{2} + \frac{1 + \hat{\sigma}}{2} (1 - T^2)^2 + \frac{1}{4} \frac{1 + \hat{\sigma}}{1 + 4\hat{\sigma}} (1 + T^2)^2 \\ - \frac{1 + \hat{\sigma}}{8} \frac{(3 - T^2)^2}{T^2 - \hat{\sigma}(3 - T^2)} + \frac{9}{8} \frac{\hat{\sigma} T^2}{1 + \hat{\sigma}},$$

$$B_* = (1 + \hat{\sigma})[T + kd(1 - T^2)] + 2\hat{\sigma}T.$$

式中 $\hat{\sigma} = \sigma k^2/g$ (无量纲表面张力)。若不计表面张力, 两者相同。但若计入表面张力则两者差别甚大。这反映在 A_* 第四项分母上, Miles 给出的二次谐波共振条件为 $T^2 - 4\hat{\sigma} = 0$, 与(40)不一致。而本文结果能给出正确的二次谐波共振条件, 这对 $\hat{\sigma}-kd$ 图上孤波存在区域的分析是重要的。

五、 $\hat{\sigma}$ - kd 图上孤波的存在区域

吴君汝的实验指出^[3,5], 在表面波矩形谐振器中产生非传播孤波, 液体的静态深度 d 是一个关键参数。下面将指出, 若计入表面张力效应, 则除 d 外, 流体的表面张力系数 α 也是形成和控制非传播表面孤波的另一重要参数。

方程(33)存在孤波解的条件为 $Q > 0$ 。若 $Q \leq 0$ 或 $Q \rightarrow \infty$, 则初始激发不可能形成孤波而发展成为一串 Stokes 波列。由(27)式

$$Q = \frac{g(1+\hat{\sigma})k^3}{T} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+\hat{\sigma})(1-T^2)^2 + \frac{1}{4} \frac{1+\hat{\sigma}}{1+4\hat{\sigma}} (1+T^2)^2 - \frac{1}{8}(1+\hat{\sigma}) \frac{(3-T^2)^2}{T^2 - \hat{\sigma}(3-T^2)} + \frac{9\hat{\sigma}}{8(1+\hat{\sigma})} T^2 \right]. \quad (41)$$

可见 Q 为 kd 和 $\hat{\sigma}$ 的函数。由数值计算, 在 $\hat{\sigma}$ - kd 图上得到三个区域(图 2), 有

1) 在区域 I 和区域 III 内 $Q > 0$ 。

在此两区域内可以激发形成孤波。

2) 在区域 II 内 $Q < 0$ 。在该区域

不能激发形成孤波。

3) 曲线 1 对应于 $Q = 0$, 是从存在区域 I 向不存在区域 II 的过渡曲线。曲线 2 即 $T^2 - \hat{\sigma}(3 - T^2) = 0$ 。在该曲线上 Q 有奇性, 此曲线称为二次谐波共振曲线。在其附近前面的微扰展开失效, 需引进另外的展式, 将另文讨论。

4) 若欲在液体表面激发形成稳定的孤波, 必须同时控制静态液面深度和选取一定表面张力系数的液体, 使相应

的 $(\hat{\sigma}, kd)$ 点位于区域 I 或 III 内。由图 2 可见, 形成孤波的临界深度 d^* 与无量纲表面张力系数 $\hat{\sigma}$ 有关。对纯酒精理论上可算得 $d^* = 0.85\text{cm}$, 与实验值 0.8cm 符合甚好, 注意到 $\hat{\sigma} = 0$ 时, 只要 $kd > 1.022$, 则 $Q > 0$, 故图 2 中在 $kd > 1.022$ 的 kd 轴上允许存在稳定的孤波。Larrazza 和 Putterman^[12] 及文献[10]即是研究的这种特殊情形。

5) 对纯表面张力波($\hat{\sigma}$ 较大), $(\hat{\sigma}, kd)$ 总位于区域 III 内。从理论上说, 纯表面张力波孤子总是可以存在的(实验中的大部分液体, $(\hat{\sigma}, kd)$ 均落在区域 I, II 内)。

6) 在深水极限下($d \rightarrow \infty$), 孤波的不存在区间为 $0.27 < \hat{\sigma} < 0.5$ 。

在文献[3]中, $b = 2.54\text{cm}$, $d = 2\text{cm}$, $\rho_{\text{水}} = 1\text{g}/(\text{cm})^3$, $\alpha_{\text{水}} = 72.5\text{dyn}/\text{cm}$, 得 $\hat{\sigma}_{\text{水}} = 0.11$; 由文献[4]中的参数算得 $\hat{\sigma}_{\text{酒精}} = 0.04$, 均落于区域 I 内, 故可以形成孤波。

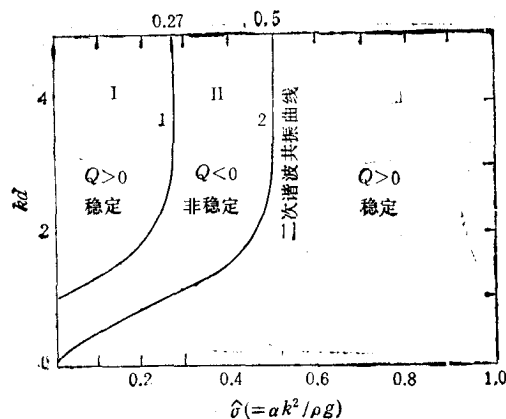


图 2 孤波 $\hat{\sigma}$ - kd 稳定性图

六、非线性共振特性

为了在矩形谐振器内产生非传播表面孤波, 波振幅与频率之间还必须满足另一关系

式(35)

$$a = (1/\varepsilon)[(\omega^2 - \omega_0^2) + (\delta^2 - \gamma^2)^{1/2}]^{1/2}.$$

经简单运算易得

$$\nu_0 = \nu[1 - g^2(1 + \hat{\sigma})^2 A_* D^2 / (64\nu^4 b^4)], \quad (42)$$

式中 $\nu = \omega/(2\pi)$, $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$, $D = (2/Q)^{1/2}\varepsilon a$ 为孤波振幅. 为方便起见, 已在(42)式中令 $\delta = \gamma$, (42)式即表面波矩形谐振器的非线性共振特性关系, 可见 ν_0 与表面张力有关. 由(42)式可知, 当系统参数 $(\hat{\sigma}, kd)$ 处于图 2 中区域 I 或 III 中时, $A_* > 0$, $\nu_0 < \nu$, 矩形谐振器表现出象软弹簧系统(频率向低频端偏移); 当 $(\hat{\sigma}, kd)$ 处在区域 II 中时, $A_* < 0$, $\nu_0 > \nu$, 则表现出象硬弹簧系统(频率向高频端偏移).

文献[4]从实验上详细研究了矩形谐振器中水表面波的非线性共振特性, 测得非线性共振曲线如图 3—图 5 所示. 各图中虚线为实测的共振频率, 根据实验参数用(42)式从数值上分别计算了三种情形下的非线性共振曲线, 带点的虚线表示计算结果. 由各图可见, 深水情形 ($d = 0.8\text{cm}$ 和 $d = 2.0\text{cm}$) 理论与实验符合较好. 浅水情形 ($d = 0.5\text{cm}$) 偏差较大, 这是因为在浅水情形波的色散变略, 以上的理论分析不是十分有效的缘故.

注意到形成孤波必须满足 $Q > 0$. 故 $d = 2.0\text{cm}$ 时可以激发形成孤波; $d = 0.8\text{cm}$

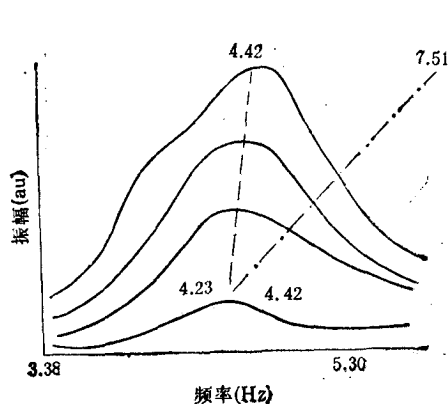


图 3 $d = 0.5\text{cm}$ 时的共振曲线

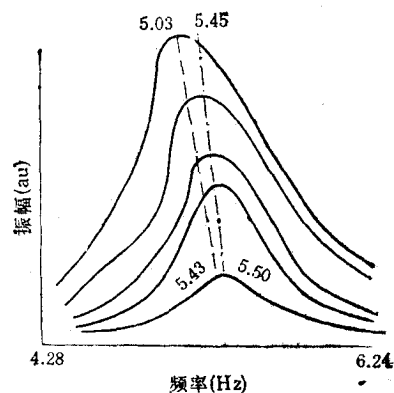


图 4 $d = 2.0\text{cm}$ 时的共振曲线

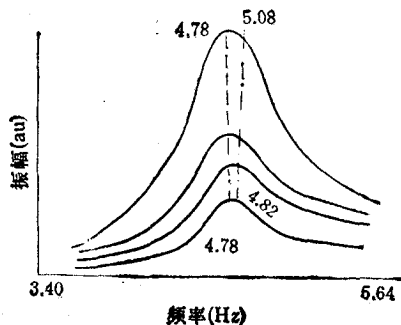


图 5 $d = 0.8\text{cm}$ 时的共振曲线

时孤波开始不稳定; $d = 0.5\text{cm}$ 时不能产生孤波, 这些均与实验较好地符合。

七、结果讨论

本文用多重尺度法研究了矩形谐振器中不可压缩无旋流体的表面波运动, 对非传播孤波现象进行了详细的分析计算, 本文处理有如下特点:

1) 直接从 Euler 方程组(1)–(5)出发作摄动展开, 保持计算结果在每一量级上是严格的。

2) 计入了表面张力、外加驱动和表面波阻尼, 修正了 Larraza, Putterman 和 Miles 等人的结果, 得到了与波相互作用一般理论中相一致的二次谐波共振条件。

3) ϕ 及 ζ 关于 t 和 x 的偏导数的数量级不需要象文献 [12, 13] 那样事先作出规定, 而是由多重尺度的引入和消除长期项的条件确定, 参数 $\Delta\omega$ 自然出现在调制方程(24)中。

4) 在 $\delta-kd$ 图上分析了非传播孤波的存在区域, 结果指出, 无量纲表面张力系数 δ 是产生与控制孤波的另一重要参数。

5) 分析了矩形槽水表面波的非线性共振特性, 并与实验结果进行了比较。

本文所有的计算均是在弱非线性近似下作出的, 故不能应用到大振幅情况。另外, 计入表面张力后所预言的深水极限下孤波的存在区域与文献 [14] 所给出的实验结果偏差较大, 这是理论上需要进一步探讨的问题。

高等教育博士点基金资助的课题。

在本文的数值计算过程中曾得到罗中华同志的帮助; 并与李洪芳、钟万衡、黄静宜、徐新闻等同志进行过有益的讨论, 作者在此表示感谢。

- [1] M. J. Ablowitz and H. Segur, *J. Fluid Mech.*, 92(1979), 691.
- [2] A. D. D. Craik, *Wave Interaction and Fluid Flows*, Cambridge Univ. Press, (1985).
- [3] Wu Jun-ru, R. Keolian and I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.*, 52(1984), 1421.
- [4] 吴君汝, A. Larraza and I. Rudnick, *物理学报*, 34(1985), 796.
- [5] Wu Jun-ru and I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.*, 55(1985), 204.
- [6] Wang Ben-ren, Wei Rong-jue et al., *Chin. Phys. Lett.*, 3(1986), 213; *ibid.*, 6 (1989), 397.
- [7] 王本仁、魏荣爵, *物理学报*, 35(1986), 1547.
- [8] Wei Rong-jue et al., the 3rd WESTPA, Shanghai, 1(1988), 11.
- [9] 顾家壬、黄国翔, *应用数学与力学*, 8((1987), 925.
- [10] Yan Jiaren and Huang Guoxiang, *Chin. Phys. Lett.*, 5(1988), 30.
- [11] 顾家壬、黄国翔、黄念宁, *物理学报*, 37(1988), 874.
- [12] A. Larraza and S. Putterman, *J. Fluid Mech.*, 148(1984), 443.
- [13] W. Miles, *J. Fluid Mech.*, 148(1984), 451.
- [14] 崔洪农等, *水动力学研究与进展*, 1(1988), 451.
- [15] W. Miles, *J. Fluid Mech.*, 154(1985), 535.
- [16] A. Jeffery and T. Kawahara, *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory*, Ritman, (1982).

INVESTIGATIONS ON NONPROPAGATING GRAVITY-SURFACE TENSION SOLITON

HUANG GUO-XIANG

Department of Physics, Fudan University, Shanghai, 200433

YAN JIA-REN

Department of Physics, Xiangtan University, Xiangtan, 411105

DAI XIAN-XI

Department of Physics, Fudan University, Shanghai, 200433

(Received 10 April 1989; revised manuscript received 6 December 1989.)

ABSTRACT

In this paper, the method of multiple-scales is used to investigate the weak nonlinear self-modulation of the gravity-surface tension standing wave mode in a finite deep fluid which is filled in a rectangular resonator. The detailed analysis and calculations about the nonpropagating soliton discovered by Wu *et al.* are made when external driving and damping of the surface wave are considered. The nonpropagating soliton theory established by Larraza, Puterman and Miles is revised and developed. The correct second harmonic resonance condition about gravity-surface tension wave in the rectangular trough is obtained. The stabilities of propagating soliton are analyzed in detail according to σ - k - d diagram. It is found, in addition to the static depth d , that the surface-tension of fluid is an important parameter which may control the formation of nonpropagating soliton. Finally, the nonlinear tuning curves of the surface wave resonator are discussed and compared with experimental results.

PACC: 4735; 4325