

# 二维费密液体理论 (I)

崔世民 蔡建华<sup>1)</sup>

上海交通大学凝聚态物理研究所, 上海, 200030

1989 年 4 月 17 日收到

通过关于二维低密度费密系统准粒子寿命和二维巡游电子系的自旋涨落的计算, 本文证明朗道费密液体理论适用于二维相互作用费密粒子系。

PACC: 6750; 0530

## 一、引 言

三维和二维强相互作用费密系统一直是凝聚态物理研究的重要课题之一。早在 60 年代朗道提出了描述三维相互作用费密系统的平均场理论<sup>[1]</sup>, 对于解释低温下 <sup>3</sup>He, 核物质、中子星物质的行为非常成功。由于实验已经能够很好地实现二维或准二维费密系统, 如二维电子系统、<sup>3</sup>He 膜等, 文献中已开始出现对于二维费密体系的理论研究<sup>[2]</sup>, 许多作者<sup>[3]</sup>自然地将三维费密液体理论推广到二维费密系来研究其性质。但是, 最近 Thenmann 和 Béal-Monod<sup>[4]</sup> 通过研究二维顺磁费密系统, 发现高级自旋涨落效应使得不可约顶角函数  $J(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{k})$  在  $k$  趋于零时发散, 同时更高级费曼图也是发散的, 因而对于在二维情形能否直接套用朗道费密液体理论提出疑问。鉴于此, 我们对二维低密度相互作用费密体系和二维巡游费密系作了计算, 结果表明朗道费密液体理论在二维情形仍属有效。

## 二、低密度强相互作用费密系

研究低密度、短程、排斥型、任意强相互作用的二维费密系<sup>[5]</sup>, 采用刚球模型, 阶梯近似仍然适用。近似到  $O[\ln^{-2}(qa)]$ , 双粒子顶角部分为

$$m\Gamma^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', P) = -\frac{2\pi}{\ln(qa)} - \frac{2\pi\gamma}{[\ln(qa)]^2} + \frac{(2\pi)^2}{[\ln(qa)]^2} \times \left[ \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[ \frac{N(\mathbf{P}, \mathbf{k})}{\varepsilon - k^2 + i\eta N(\mathbf{P}, \mathbf{k})} - \frac{\mathcal{D}}{k^2 - q^2} \right] \right]. \quad (1)$$

式中符号含义同文献[5]。

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室)理论物理分中心。

准粒子的衰减由不可约自能的虚部确定

$$\gamma_p^{(1)} = \text{Im}\Sigma^{*(1)}(\mathbf{p}), \quad (2)$$

$$\Sigma^{*(1)}(\mathbf{p}) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G^0(k) [-2\Gamma^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{p}) + \Gamma^{(1)}(-\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{p})]. \quad (3)$$

经过冗长的积分计算得到

$$\gamma_p^{(1)} = \frac{k_F^2}{2m} \cdot \frac{-1}{2\pi^2(\ln k_F a)^2} \cdot \left(1 - \frac{p}{k_F}\right)^2 \ln \left|1 - \frac{p}{k_F}\right| \text{sgn}\left(1 - \frac{p}{k_F}\right). \quad (4)$$

准粒子寿命  $\tau_p = \gamma_p^{(1)}$ . 在  $p \rightarrow k_F$  时,  $\gamma_p^{(1)}$  与能量相比是小量, 故在费密面附近, 单粒子元激发有足够长的寿命, 使准粒子图象成立, 因而意味着朗道理论适用于这一类二维费密粒子系.

### 三、巡游费密系

1. 考虑哈密顿量为

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_{k\sigma} a_{k\sigma}^\dagger a_{k\sigma} + I \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \sum_{\sigma} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}'\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma} \quad (5)$$

的二维费密粒子系.

按常规定义自旋涨落函数  $\chi(\mathbf{k}, \omega)$  如下:

$$\chi(\mathbf{k}, \omega) = \langle s^-(\mathbf{k}) | s^+(-\mathbf{k}) \rangle_{\omega+i\eta}. \quad (6)$$

式中  $s^a(\mathbf{k})$  为自旋密度涨落的傅氏分量,  $\langle \dots | \dots \rangle_{\omega+i\eta}$  表示动量能量表象的格林函数.

在零级近似下关于  $\chi^0(\mathbf{k}, 0)$  的计算表明二维系统是介于  $2-0^+$  和  $2-0^-$  维的一个界限维度. 由于  $\chi^0(\mathbf{k}, 0)$  在  $k \leq 2k_F$  时始终为一常数, Stoner 判据失去意义. 自由能的分析<sup>[5,6]</sup>表明  $\left. \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial B^2} \right|_{B=0}$  这个量是发散的. 因此无法确定这一体系是否具有平均场行为. 但是, 尽管每一个费曼图是发散的, 只要自洽地计入费曼图形, 在一级近似下计算自旋涨落函数, 结果是收敛的.

记不可约自旋涨落函数为  $\chi^*(\mathbf{k}\omega)$ , 有

$$\chi(\mathbf{k}\omega) = -\chi^*(\mathbf{k}\omega) \cdot (1 - I\chi^*(\mathbf{k}\omega))^{-1}. \quad (7)$$

在零级(即 RPA) 近似下

$$\chi^*(\mathbf{k}\omega) = \chi^0(\mathbf{k}\omega) = i \sum_p G(p+k)G(p). \quad (8)$$

在一级近似下,  $\chi^*(\mathbf{k}\omega)$  由图 1 和图 2 的图形给出. 对于我们的自洽计算, 还需要计入图 3 的贡献. 在图 1 至图 3 中波浪线表示自旋涨落传播子. 三类传播子分别由图 4 至图 6 给出.

$$V_1^* = V_1 + I = I \cdot (1 - I^2\chi^0)^{-1}, \quad (9)$$

$$V_2 = -I^2\chi^0(1 - I^2\chi^0)^{-1}, \quad (10)$$

$$V_3^* = V_3 + I = I \cdot (1 - I\chi^0)^{-1}. \quad (11)$$

图 1 对  $\chi^*(\mathbf{k}, 0)$  的贡献为

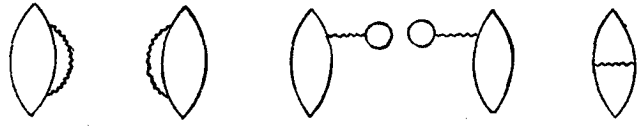


图1

图2



图3



图 4 传播子  $V_1^*$

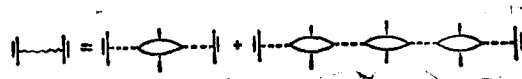


图 5 传播子  $V_2$

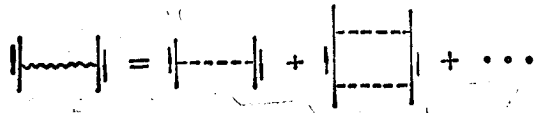


图 6 传播子  $V_3^*$

$$\chi^0(k) = 2i \sum_p G(p+k)G(p)\Sigma(p)G(p). \quad (12)$$

式中

$$\Sigma(p) = i \sum_q G(p+q)[V_2(q) - V_3^*(q)]. \quad (13)$$

利用恒等式

$$G^2(p) = -\frac{\partial G(p)}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial G(p)}{\partial \mu} + 2\pi i \delta(\varepsilon) \delta(\varepsilon_p - \mu),$$

$$\frac{\partial \chi^0}{\partial \mu} = 4\pi \sum_p G(p+k) \delta(\varepsilon) \delta(\mu - \varepsilon_p),$$

得到

$$\chi^a(k) = -2i \sum_p G(p+k) \frac{\partial}{\partial \mu} G(p) \Sigma(p) - \Sigma(p_i, 0) \frac{\partial}{\partial \mu} \chi^a(k, 0).$$

为了得到  $\chi^a(k)$  的  $k^2$  系数项, 展开  $G(p+k)$  和  $\frac{\partial}{\partial \mu} \chi^a(k, 0)$

$$G(p+k) = G(p) - \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{k^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \mu} G(p) + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} G(p).$$

利用对称性, 将  $\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})^2}{2}$  用  $\frac{k^2 p^2}{4}$  代替, 则  $\chi^a(k)$  中  $k^2$  项的系数为

$$i \sum_p \Sigma(p) \left[ -\frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial \mu^3} G(p) + \frac{p^2}{24} \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} G(p) \right]. \quad (14)$$

类似地, 图 2 对  $\chi^*(\mathbf{k}, 0)$  的贡献为

$$\chi^b(k) = i^2 \sum_{p,q} G(p+k) G(p) G(p+q+k) G(p) V_1^*(q). \quad (15)$$

定义一级顶角函数  $\Lambda_1^*(p)$

$$\Lambda_1^*(p) = i \sum_{p'} V_1^*(p' - p) \left[ -\frac{\partial}{\partial \mu} G(p') \right], \quad (16)$$

对小  $k$  进行展开得到  $\chi^b(k)$  的  $k^2$  项的系数为

$$i \sum_p \Lambda_1^*(p) \left[ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} G(p) - \frac{p^2}{24} \frac{\partial^3}{\partial \mu^3} G(p) \right]. \quad (17)$$

图 3 对  $\chi^*(\mathbf{k}, 0)$  的贡献稍微复杂些

$$\begin{aligned} \chi^c(k) = & i^3 \sum_{pp'q} G(p+k) G(p) G(p'+k) G(p') G(p+q) G(p'+q) \\ & \times [V_3(q-k) V_2(q) + V_3(q) V_2(q-k)] \\ & + i^3 \sum_{pp'q} G(p) G(p-k) G(p'+k) G(p') G(p+q) G(p'-q+k) \\ & \times [V_3(q-k) V_1(q) + V_3(q) V_1(q-k)] \end{aligned} \quad (18)$$

在小  $k$  情形展开至  $k^2$  项得到两项, 一项来自顶角部分, 另一项来自自旋涨落传播子部分.

定义自治顶角函数  $\Lambda_2(p)$

$$\begin{aligned} \Lambda_2(p) = & 2i^2 \sum_{p'q} [G(p+q) G(p'+q) V_3(q) V_2(q) + G(p+q) G(p' \\ & -q) V_3(q) V_1(q)] \cdot \left[ -\frac{\partial}{\partial \mu} G(p') \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

顶角部分的  $k^2$  项系数为

$$i \sum_p \Lambda_2(p) \left[ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} G(p) - \frac{p^2}{24} \frac{\partial^3}{\partial \mu^3} G(p) \right]. \quad (20)$$

自旋传播子部分的  $k^2$  项的系数为

$$\begin{aligned} & \frac{i}{4} \sum_q \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \chi^0 \right)^2 \left[ (V_1 + V_2) \frac{\partial^2 V_3}{\partial q^2} + V_3 \frac{\partial^2}{\partial q^2} (V_1 + V_2) - 2 \frac{\partial}{\partial q} V_3 \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\partial}{\partial q} (V_1 + V_2) \right] + \left( \frac{\partial}{\partial \mu} J + 2 \frac{\partial}{\partial \omega} \chi^0 \right)^2 \left[ (V_1 - V_2) \frac{\partial^2 V_3}{\partial q^2} \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ V_3 \frac{\partial^2}{\partial q^2} (V_1 - V_2) - 2 \frac{\partial}{\partial q} V_3 \frac{\partial}{\partial q} (V_1 - V_2) \Big] \Big\}. \quad (21)$$

式中  $J$  为下列积分:

$$J(q\omega) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \cdot \frac{n_{\mathbf{p}} + n_{\mathbf{p}+q}}{\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}+q} + i\eta \operatorname{sgn}(\omega)}. \quad (22)$$

因此在  $k$  小时有

$$\chi^*(k, 0) = \chi^0(0, 0) + k^2 \chi^{(2)}(0, 0) + \dots \quad (23)$$

而由(14)(17),(20)和(21)诸式合并有

$$\chi^{(2)}(0, 0) = A + B + C. \quad (24)$$

$$A = -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ \sum_q V_1^* \left( R_1 - \frac{1}{3} R_3 \right) \right], \quad (25)$$

$$\begin{aligned} B = \frac{i}{4} \sum_q \Big\{ & \left[ V_1^* - \frac{2}{3} (V_2 - V_3^*) \right] R_2 - \left[ V_1 \frac{\partial}{\partial \mu} \chi^0 \right. \\ & + V_3^* \left( \frac{\partial}{\partial \mu} J + 2 \frac{\partial}{\partial \omega} \chi^0 - \frac{\partial}{\partial \mu} V_1^* \right) \left( R_1 - \frac{1}{3} R_3 \right) \\ & \left. - \frac{1}{3} (V_1^* - V_2 + V_3^*) \right] R_4 \Big\}, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = \frac{i}{4} \sum_q \Big\{ & \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \chi^0 \right)^2 \left[ (V_1 + V_2) \frac{\partial^2 V_3}{\partial q^2} + V_3 \frac{\partial^2}{\partial q^2} (V_1 + V_2) \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial}{\partial q} V_3 \frac{\partial}{\partial q} (V_1 + V_2) \right] + \left( \frac{\partial}{\partial \mu} J + 2 \frac{\partial}{\partial \omega} \chi^0 \right)^2 \\ & \times \left[ (V_1 - V_2) \frac{\partial^2 V_3}{\partial q^2} + V_3 \frac{\partial^2}{\partial q^2} (V_1 - V_2) \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial}{\partial q} V_3 \frac{\partial}{\partial q} (V_1 - V_2) \right] \Big\}. \quad (27) \end{aligned}$$

式中  $R_1, R_2, R_3, R_4$  分别表示

$$R_1 = i \sum_p G(p+q) \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} G(p), \quad (28)$$

$$R_2 = i \sum_p G(p+q) \frac{\partial^3}{\partial \mu^3} G(p), \quad (29)$$

$$R_3 = i \sum_p G(p+q) \frac{\partial^3}{\partial \mu^3} G(p) \varepsilon_p, \quad (30)$$

$$R_4 = i \sum_p G(p+q) \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} G(p) \varepsilon_p. \quad (31)$$

通过冗长的计算(见附录),得到在  $\bar{I}$  趋于 1 时

$$\chi^{(2)}(0, 0) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\bar{I}^2}{1 - \bar{I}}. \quad (32)$$

2. 定义修正因子  $G(k, 0)$

$$\chi(k, 0) = \frac{\chi^0(k, 0)}{1 - I \chi^0(k, 0) G(k, 0)}. \quad (33)$$

若仅取零级近似,  $G(k, 0) = 1$ . 当  $k \leq 2k_F$  时,  $\chi^0(k, 0)$  为常数, Stoner 判据失去意

义。但是只要计算到自洽的一级近似,在  $q=0$  将发生顺磁失稳,这与三维情形类似。

分析和计算表明自洽的一级修正是有限的。根据文献[7](5)式,涨落传播子

$$\left(r + p_f \frac{\omega}{q}\right)^{-1} \text{ 须由 } \left(r + q^2 + p_f \frac{\omega}{q}\right)^{-1}$$

代替,有

$$V(r) \propto \int_{|q| < q_0} d^2 q \int_0^\infty d\omega \left(r + q^2 + p_f \frac{\omega}{q}\right)^{-1} \\ \propto q_0 - \sqrt{r} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{r}}\right). \quad (34)$$

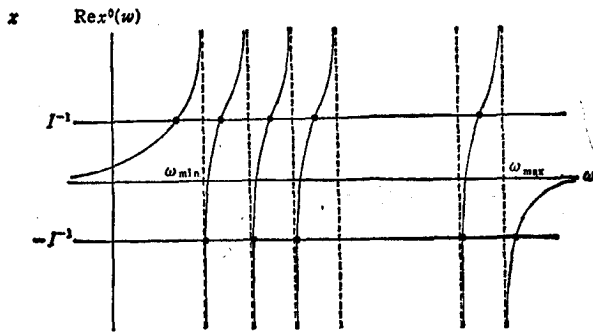
$V(r)$  在转变点附近为一收敛的常数。由重整化判据<sup>[7,9]</sup>知道二维巡游磁理论是可重整化的,有效维度为  $5 - (2 + 3)$ , 平均场理论完全适用。

## 附 录

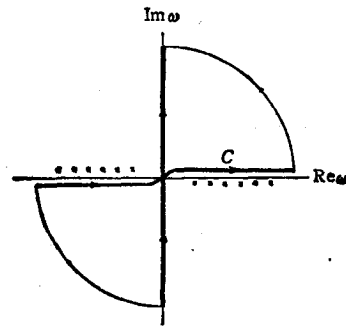
这里说明如何计算  $R_i$ 。考虑积分

$$-i \sum_q (\dots) = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} (\dots),$$

首先分析积分函数的解析行为: 函数  $V_i$  含有  $(1 \pm I\chi^0(q\omega))^{-1}$  项, 从  $\omega_{\min}$  到  $\omega_{\max}$  有不连续发散点(附录图 1), 奇异性来源于 Stoner 激发。在 Stoner 激发区 ( $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$ ),  $\text{Im}\chi^0(q\omega) \neq 0$ , 在其余区域,  $\text{Im}\chi^0(q\omega) = 0$ 。在 Stoner 激发区内,  $\omega > 0$  时满足  $1 \pm \text{Re}\chi^0(q, \omega_x - i\eta) = 0$ , 而  $\omega < 0$  时满足  $1 \pm \text{Re}\chi^0(q, \omega_x + i\eta) = 0$ , 极点表示在图 5 中。在实轴上自旋波激发极点同样上挪或下挪  $i0^+$ , 所有极点均位于第二和第四象限内。积分路径  $C$  示于附录图 2 中。考虑到  $\chi^0(q, \omega)$  和  $J(q, \omega)$  的极点位于正  $\text{Re}\omega$  轴的下方或负  $\text{Re}\omega$  轴的



附录图 1



附录图 2

上方,同时  $|\omega| \rightarrow \infty$  时,  $\chi^0(q, \omega)$  和  $J(q, \omega)$  快速收敛,则沿回路  $C$  的积分可以变形到沿虚轴进行,不经过任何奇点。定义

$$\omega = iqpy,$$

则

$$-i \sum_q (\dots) = \frac{p_f}{2\pi} \int_0^\infty q^2 dq \int_{-\infty}^{\infty} dy (\dots).$$

我们发现主要贡献来自  $q \rightarrow 0$  时,因此只要在小  $q$  积分。作小  $q$  展开后,积分相对简单化,结果得到(32)式。

[1] L.D. Landau, J.E.T.P., 30 (1956), 1058; *ibid.*, 32(1957), 59.

- [ 2 ] A. Czachor *et al.*, *Phys. Rev.*, **B25** (1982), 2144; G. Grumbs *et al.*, *Phys. Rev.*, **B34** (1986), 6847.
- [ 3 ] D.P. Grimmer, *Physica*, **B106** (1981), 9; K. Miyaka and W.J.Mullin, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 197.
- [ 4 ] A. Thenmann and M. T. Beal-Monod, *Phys. Rev.*, **B29** (1984), 2567.
- [ 5 ] 卢德攀、蔡建华, 低温物理, **7**(1985), 1.
- [ 6 ] M. Gabay and M. T. Beal-Monod, *Phys. Rev.*, **B18** (1978), 5033.
- [ 7 ] M. T. Beal-Monod, *Phys. Rev. Lett.*, **34** (1975), 1461.
- [ 8 ] A. Herthz, *Phys. Rev.*, **B14** (1976), 1165.

## THEORY OF TWO-DIMENSIONAL FERMI LIQUIDS (I)

CUI SHI-MIN    CAI JIAN-HUA

*Institute of Condensed Matter Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030*

(Received 17 April 1989)

### ABSTRACT

It is shown that Landau's mean field theory of Fermi liquids is valid in two-dimensional case through evaluation of the quasiparticle life-time of a 2-D interacting Fermi systems at low density as well as the spin fluctuation of 2-D itinerant Fermi systems.

**PACC:** 6750; 0530