

自相似结构的谱函数

钟锡华

北京大学物理系, 北京, 100871

1989年6月2日收到

本文设计了两自相似平面结构, 制成相应的衍射屏, 获得夫琅和费衍射图样。理论上以逐代繁衍的眼光看待自相似结构, 导出频谱递推公式, 并给出了总频谱函数与谱函数曲线, 讨论了谱函数曲线的某些特征与能量转移性质。本文提出了一种研究实际自相似问题的光学模拟方法。

PACC: 4280C; 0545; 4230

一、两种自相似结构及其衍射图样

图1是按以下程序绘制的几何图形: “正方形边长放大三倍”, 成为一个包含9个原正方形的大正方形, 然后将中央3个正方形涂黑, 留下两侧6个正方形串成的白宽带。接着, 再将白带的中央涂黑, 留下两侧的白色窄带。如此一遍遍操作下去, 黑带一代代繁衍, 白带将变得越来越窄。于是, 形成了这样一幅图形, 在每条黑带两侧有一对黑带, 后者的宽度始终是前者的1/3, 与前者距离始终等于前者的宽度。该图形仅繁衍到第四代。按几何图形维数的定义, 该结构的维数 $n = \ln 6 / \ln 3 = 1.63^{[1]}$ 。

经照相机拍摄得到一张负片, 将它作为衍射屏, 获得它的夫琅和费图样, 如图2。这

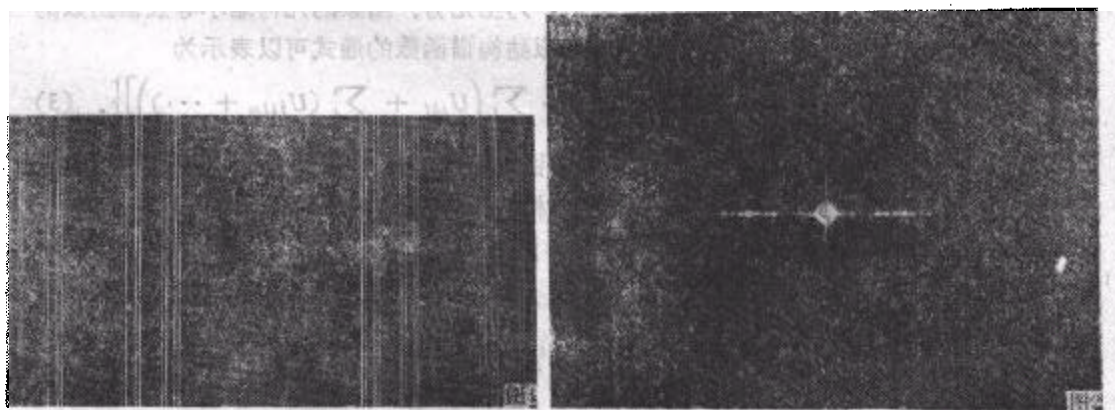


图1 自相似1.63维的康托尔矩形孔

图2 相应的衍射图样

1) 基元图形也可以是矩形孔。本文绘制的是长宽比约为3/2的矩形孔。

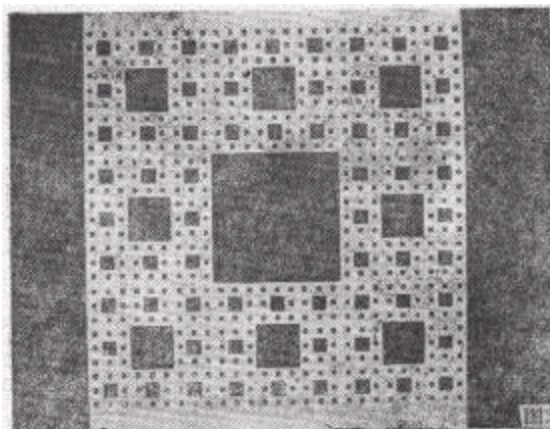


图 3 1.89 维的谢尔宾斯基地毯



图 4 相应的衍射图样

张衍射图样便是该结构的功率谱,即光学系统谱面上的光强分布

$$I(\theta_1, \theta_2) = U(\theta_1, \theta_2)U^*(\theta_1, \theta_2). \quad (1)$$

其中 (θ_1, θ_2) 是衍射角,用以标定场点位置. 它与空间频率 (f_x, f_y) 一一对应

$$(\sin \theta_1, \sin \theta_2) = \lambda(f_x, f_y). \quad (2)$$

夫琅和费衍射场的复振幅分布函数 $U(\theta_1, \theta_2)$ 就是本文所指的自相似结构的谱函数.

图 3 是一幅自相似 1.89 维的谢尔宾斯基地毯^[6]. 其特点是在每个黑方块四周有 8 个黑方块,后者边长始终是前者的 1/3. 该结构仅繁衍至第三代. 将它的负片作为衍射屏,获得它的夫琅和费衍射图样,如图 4.

二、自相似结构的谱函数

一般说来,可以用几种不同的眼光看待每一种自相似结构,从而有几种不同的组合或解析方式导出自相似结构的谱函数. 我们以“一代代繁衍”的眼光看待自相似结构. 从母代开始,运用缩小与位移两步操作,逐代繁衍,乃至无穷. 图象的几何缩小导致谱函数的放大. 图象的位移导致谱函数的相移. 自相似结构谱函数的通式可以表示为

$$U(\theta_1, \theta_2) = U_0 + \sum_i \left\{ U_i + \sum_k \left[U_{ik} + \sum_l \left(U_{ikl} + \sum_m (U_{iklm} + \dots) \right) \right] \right\}. \quad (3)$$

其中 U_0 表示母代频谱, $\sum U_i$ 表示第一代频谱, $\sum \sum U_{ik}$ 与 $\sum \sum \sum U_{ikl}$ 分别表示第二代与第三代频谱. 为了简化下角标的个数,自相似结构谱函数的通式也可以写成

$$U(\theta_1, \theta_2) = U_0 + \sum_j U_j^{(1)} + \sum_k U_k^{(2)} + \sum_l U_l^{(3)} + \sum_m U_m^{(4)} + \dots \quad (4)$$

其中下角标 j, k, l, m 的取值从 1 分别至第一代结构单元的总个数、第二代、第三代、第四代单元的总个数.

1. 自相似 1.63 维康托尔矩形孔的谱函数 从图 1 中看到,中央母代是一个宽度为 a , 长度为 $b = 3a$ 的矩形孔,其夫琅和费衍射场是

$$U_0 = c_0 \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \frac{\sin \beta_0}{\beta_0}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda}, \quad \beta_0 = \frac{\pi b \sin \theta_2}{\lambda}, \quad c_0 = \frac{A}{\lambda F} (ab), \quad (5)$$

其中 λ , A 分别表示入射光波长与振幅, F 表示傅里叶透镜的焦距. 第一代繁衍成两条窄带, 宽度缩小三倍, 位移分别为 $+a$, $-a$. 故其谱函数是

$$U_0 \begin{cases} \rightarrow U_1^{(1)} = c_1^{(1)} \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \frac{\sin \beta}{\beta} \right), & c_1^{(1)} = \frac{c_0}{3} e^{-i k a \sin \theta_1}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_0}{3}, \\ \rightarrow U_2^{(1)} = c_2^{(1)} \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \frac{\sin \beta}{\beta} \right), & c_2^{(1)} = \frac{c_0}{3} e^{i k a \sin \theta_1}, \quad \beta = \beta_0. \end{cases}$$

注意到系数 $c_1^{(1)}$ 与 $c_2^{(1)}$ 共轭, 得

$$U^{(1)} = \sum_{j=1}^2 U_j^{(1)} = \frac{2}{3} c_0 \cos(k a \sin \theta_1) \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \frac{\sin \beta}{\beta} \right). \quad (6)$$

其中 $k = 2\pi/\lambda$ 表示波数.

第二代繁衍成两对窄带共 4 条, 宽度再缩小三倍, 位移量分别为 $a/3$, $-a/3$. 故谱函数是

$$U_1^{(1)} \begin{cases} \rightarrow U_1^{(2)} = c_1^{(2)} \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \frac{\sin \beta}{\beta} \right), & c_1^{(2)} = \frac{c_1^{(1)}}{3} e^{-i k a \sin \theta_1 / 3}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{3}, \\ \rightarrow U_2^{(2)} = c_2^{(2)} \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \frac{\sin \beta}{\beta} \right), & c_2^{(2)} = \frac{c_1^{(1)}}{3} e^{i k a \sin \theta_1 / 3}, \end{cases}$$

$$U_2^{(1)} \begin{cases} \rightarrow U_3^{(2)} = c_3^{(2)} \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \frac{\sin \beta}{\beta} \right), & c_3^{(2)} = \frac{c_2^{(1)}}{3} e^{-i k a \sin \theta_1 / 3}, \\ \rightarrow U_4^{(2)} = c_4^{(2)} \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \frac{\sin \beta}{\beta} \right), & c_4^{(2)} = \frac{c_2^{(1)}}{3} e^{i k a \sin \theta_1 / 3}, \end{cases}$$

注意到 $c_1^{(2)}$ 与 $c_2^{(2)}$ 共轭, $c_3^{(2)}$ 与 $c_4^{(2)}$ 共轭, 所以

$$U_1^{(2)} + U_2^{(2)} = \frac{c_1^{(1)}}{3} 2 \cos\left(\frac{k a \sin \theta_1}{3}\right) \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \frac{\sin \beta}{\beta} \right),$$

$$U_3^{(2)} + U_4^{(2)} = \frac{c_2^{(1)}}{3} 2 \cos\left(\frac{k a \sin \theta_1}{3}\right) \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \frac{\sin \beta}{\beta} \right),$$

由于 $c_1^{(1)}$ 与 $c_2^{(1)}$ 原本共轭, 故进一步求和被简化成

$$U^{(2)} = \sum_{K=1}^4 U_K^{(2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 c_0 \cos(k a \sin \theta_1) \cdot \cos\left(k \frac{a \sin \theta_1}{3}\right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \frac{\sin \beta}{\beta} \right), \quad (7)$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_0}{3^2} = \frac{\pi a \sin \theta_1}{3^2 \lambda}.$$

由上述谱函数 (5)–(7) 式演变的实况中, 可以总结出递推关系, 从而推断第三代的谱函数是

$$U^{(3)} = \sum_{L=1}^8 U_L^{(3)} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 c_0 \cos(k a \sin \theta_1) \cdot \cos\left(k \frac{a \sin \theta_1}{3}\right) \cdot \cos\left(k \frac{a \sin \theta_1}{3^2}\right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha_3}{\alpha_3} \frac{\sin \beta}{\beta} \right),$$

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_0}{3^3} = \frac{\pi a \sin \theta_1}{3^3 \lambda}. \quad (8)$$

第四代的谱函数是

$$\begin{aligned}
 U^{(4)} = \sum_{M=1}^{16} U_M^{(4)} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 c_0 \cos(ka \sin \theta_1) \cdot \cos\left(k \frac{a \sin \theta_1}{3}\right) \cdot \cos\left(k \frac{a \sin \theta_1}{3^2}\right) \\
 \cdot \cos\left(k a \frac{\sin \theta_1}{3^3}\right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha_4}{\alpha_4} \frac{\sin \beta}{\beta}\right), \quad (9) \\
 \alpha_4 = \frac{\alpha_0}{3^4} = \frac{\pi a \sin \theta_1}{3^4 \lambda}.
 \end{aligned}$$

其中 $(1/3)^4$ 因子, 包括参量 α_4 中的 $(1/3)^4$ 倍率是由自相似结构单元的面积缩小引来的, 2^4 因子以及 $\cos$ 函数的连乘积是由位移导致的相移产生的. 递推到第 N 代, 其谱函数是

$$U^{(N)} = \sum_{z=1}^{2^N} U_z^{(N)} = \left(\frac{2}{3}\right)^N c_0 \left(\prod_{p=0}^{N-1} \cos k a \frac{\sin \theta_1}{3^p} \right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha_N}{\alpha_N} \frac{\sin \beta}{\beta} \right),$$

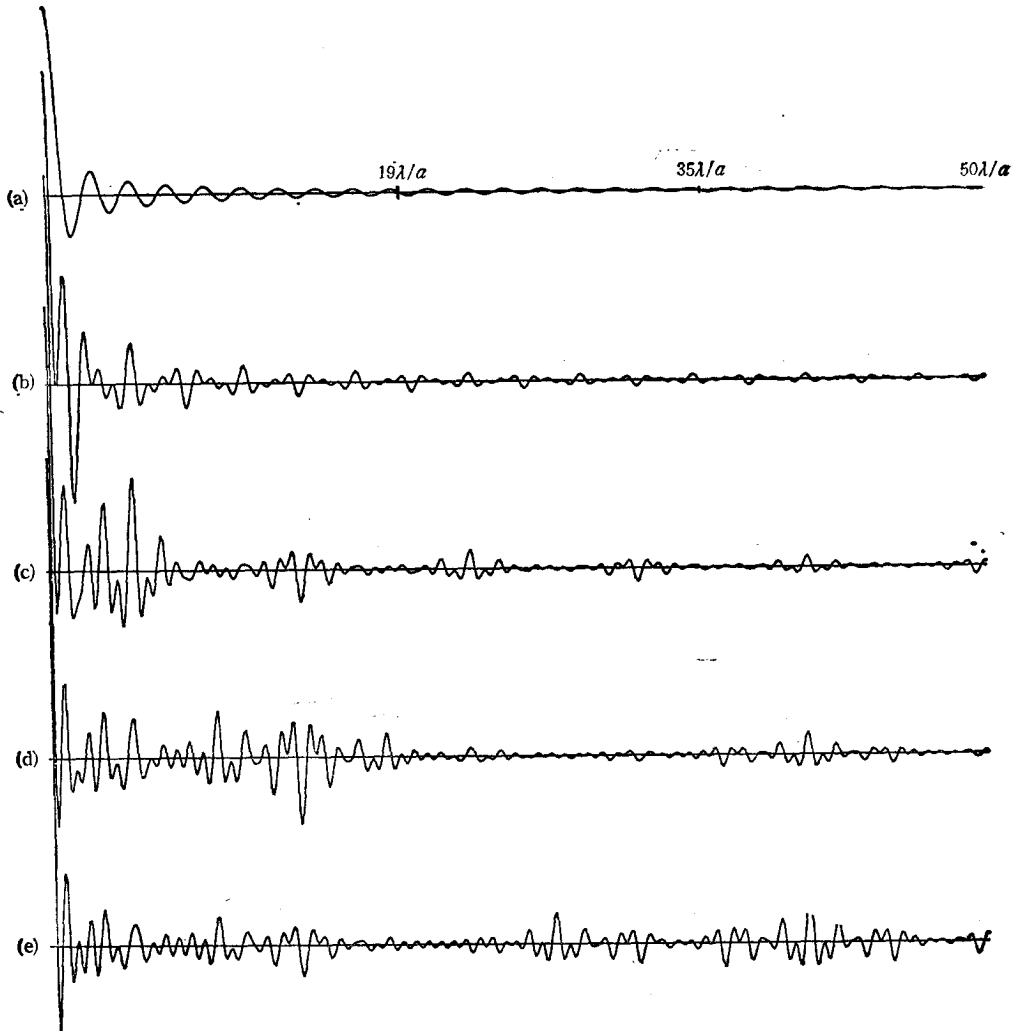


图 5 自相似 1.63 维康托尔矩形孔的谱函数曲线

(a) 为 U_0 ; (b) 为 $U_0 + U^{(1)}$; (c) 为 $U_0 + U^{(1)} + U^{(2)}$; (d) 为 $U_0 + U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)}$; (e) 为 $U_0 + U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + U^{(4)}$

$$\alpha_N = \frac{\alpha_0}{3^N} = \frac{\pi a \sin \theta_1}{3^N \lambda}. \quad (10)$$

将各代谱函数求和得到总谱函数. 考虑到第四代, 自相似 1.63 维结构的总谱函数是

$$U(\theta_1, \theta_2) = U_0 + U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + U^{(4)}. \quad (11)$$

谱函数曲线如图 5. 图中曲线 (a)~(e) 分别表示

$$U_0, U_1 = U_0 + U^{(1)}, U_2 = U_1 + U^{(2)}, U_3 = U_2 + U^{(3)}, U_4 = U_3 + U^{(4)}$$

等逐代繁衍的总谱曲线. 从几代同堂的谱曲线的比较中, 可以看出自相似结构的总谱变化的某些特点.

2. 自相似 1.89 维谢尔宾斯基地毯的谱函数 此结构的特点是, 围绕每个方块四周有 8 个小方块, 编号如图 6. 中央母块的谱函数是边长为 a 的正方孔的夫琅和费衍射场.

$$U_0(\theta_1, \theta_2) = c_0 \left(\frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \frac{\sin \beta_0}{\beta_0} \right) = c_0 \text{sinc}(\alpha_0, \beta_0), \quad (12)$$

其中 $c_0 = Aa^2/\lambda F$, $\alpha_0 = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda}$, $\beta_0 = \pi b \sin \theta_2/\lambda$, 编写记号

$$\text{sinc}(\alpha_0, \beta_0) \equiv \left(\frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \frac{\sin \beta_0}{\beta_0} \right).$$

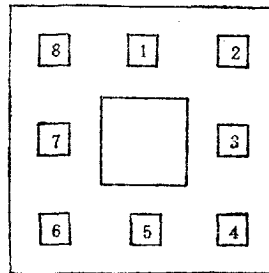


图 6 一代单元编号

四周 8 个方孔的几何尺寸缩小三倍, 位移量分别是: 1 号 $(0, a)$, 5 号 $(0, -a)$; 3 号 $(a, 0)$, 7 号 $(-a, 0)$; 2 号 (a, a) , 6 号 $(-a, -a)$; 4 号 $(a, -a)$, 8 号 $(-a, a)$.

所以各自的谱函数分别是

$$U_0 \rightarrow \begin{cases} U_1^{(1)} = c_1 \exp[-ik a \sin \theta_2] \text{sinc}(\alpha_1, \beta_1), & c_1 = \frac{c_0}{3^2}, (\alpha_1, \beta_1) = \frac{1}{3}(\alpha_0, \beta_0), \\ U_5^{(1)} = c_1 \exp(ik a \sin \theta_2) \text{sinc}(\alpha_1, \beta_1), \\ U_3^{(1)} = c_1 \exp(-ik a \sin \theta_1) \text{sinc}(\alpha_1, \beta_1), \\ U_7^{(1)} = c_1 \exp(ik a \sin \theta_1) \text{sinc}(\alpha_1, \beta_1), \\ U_2^{(1)} = c_1 \exp[-ik a (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)] \text{sinc}(\alpha_1, \beta_1), \\ U_6^{(1)} = c_1 \exp[ik a (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)] \text{sinc}(\alpha_1, \beta_1), \\ U_4^{(1)} = c_1 \exp[-ik a (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)] \text{sinc}(\alpha_1, \beta_1), \\ U_8^{(1)} = c_1 \exp[ik a (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)] \text{sinc}(\alpha_1, \beta_1) \end{cases}$$

注意到以上 8 个系数配成 4 对共轭, 有助于求和化简, 得到第一代谱函数

$$U^{(1)} = \sum_{j=1}^8 U_j^{(1)} = 2c_1 [\cos(k a \sin \theta_1) + \cos(k a \sin \theta_2) + 2 \cos(k a \sin \theta_1) \cos(k a \sin \theta_2)] \text{sinc}(\alpha_1, \beta_1) = \frac{2}{9} c_0 \text{coss}(a) \cdot \text{sinc}(\alpha_1, \beta_1), \quad (13)$$

其中缩写记号 $\text{coss}(a) \equiv \cos(k a \sin \theta_1) + \cos(k a \sin \theta_2) + 2 \cos(k a \sin \theta_1) \cos(k a \sin \theta_2)$ 以此类推, 第二代有 64 个单元, 其谱函数是

$$U^{(2)} = \sum_{K=1}^{51} U_K^{(2)} = \left(\frac{2}{9}\right)^2 c_0 \text{coss}(a) \cdot \text{coss}\left(\frac{a}{3}\right) \cdot \text{sinc}(\alpha_2, \beta_2), \quad (14)$$

$$(\alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{3} (\alpha_1, \beta_1) = \frac{1}{3^2} (\alpha_0, \beta_0),$$

$$\text{coss}\left(\frac{a}{3}\right) = \cos\left(k \frac{a \sin \theta_1}{3}\right) + \cos\left(k \frac{a \sin \theta_2}{3}\right) + 2 \cos\left(k \frac{a \sin \theta_1}{3}\right) \cos\left(k \frac{a \sin \theta_2}{3}\right),$$

第三代有 512 个单元, 其谱函数是

$$U^{(3)} = \sum_{L=1}^{512} U_L^{(3)} = \left(\frac{2}{9}\right)^3 c_0 \text{coss}(a) \cdot \text{coss}\left(\frac{a}{3}\right) \cdot \text{coss}\left(\frac{a}{3^2}\right) \cdot \text{sinc}(\alpha_3, \beta_3), \quad (15)$$

$$(\alpha_3, \beta_3) = \frac{1}{3^3} (\alpha_0, \beta_0),$$

第 N 代有 8^N 个单元, 其谱函数是

$$U^{(N)} = \sum_{Z=1}^{8^N} U_Z^{(N)} = \left(\frac{2}{9}\right)^N c_0 \left[\prod_{p=0}^{N-1} \text{coss}\left(\frac{a}{3^p}\right) \right] \cdot \text{sinc}(\alpha_N, \beta_N), \quad (16)$$

$$(\alpha_N, \beta_N) = \frac{1}{3^N} (\alpha_0, \beta_0)$$

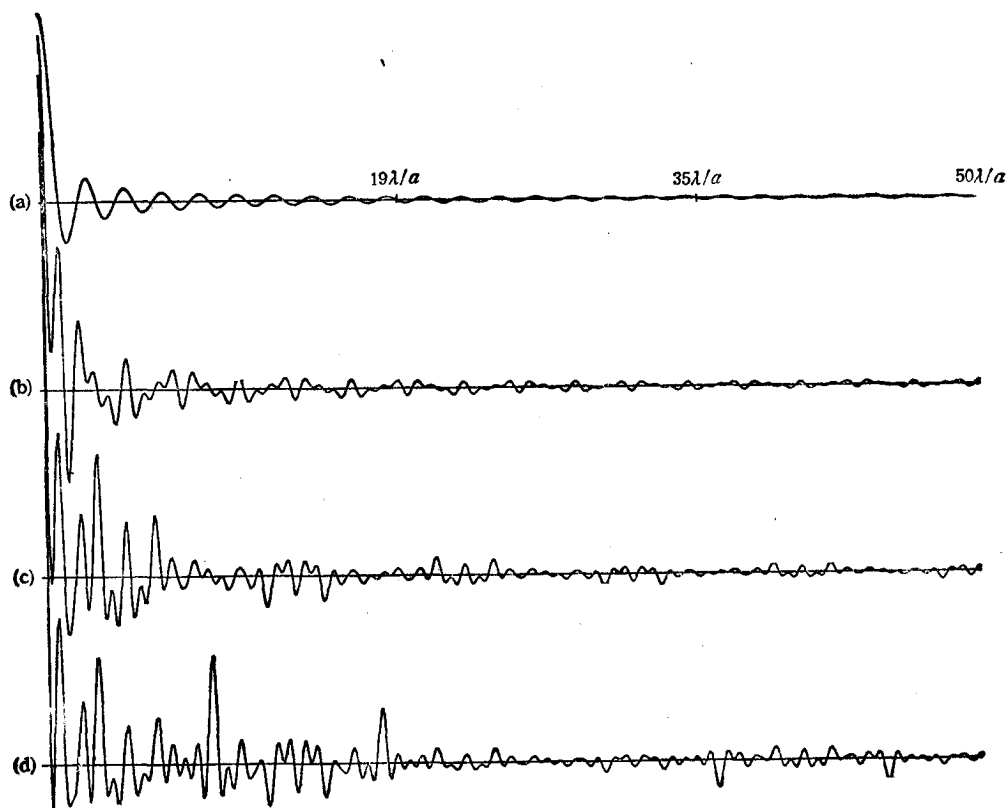


图 7 自相似 1.89 维谢尔宾斯基地毯的谱函数曲线

(a) 为 U_0 ; (b) 为 $U_0 + U^{(1)}$; (c) 为 $U_0 + U^{(1)} + U^{(2)}$; (d) 为 $U_0 + U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)}$

将各代频谱求和, 得到总频谱. 考虑至第三代(四代同堂), 自相似 1.89 维结构的总谱是

$$U(\theta_1, \theta_2) = U_0 + U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)}. \quad (17)$$

令 $\theta_2 = 0$, 考察 $\sin \theta_1$ 轴上即 x' 轴上的谱分布,

$$\begin{aligned} U_0(\theta_1) &= c_0 \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0}, \\ U^{(1)}(\theta_1) &= \frac{2}{9} c_0 [1 + 3 \cos(k a \sin \theta_1)] \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1}, \\ U^{(2)}(\theta_1) &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 c_0 [1 + 3 \cos(k a \sin \theta_1)] \left[1 + 3 \cos\left(k \frac{a \sin \theta_1}{3}\right)\right] \frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2}, \\ U^{(3)}(\theta_1) &= \left(\frac{2}{9}\right)^3 c_0 [1 + 3 \cos(k a \sin \theta_1)] \left[1 + 3 \cos\left(k \frac{a \sin \theta_1}{3}\right)\right] \\ &\quad \cdot \left[1 + 3 \cos\left(k \frac{a \sin \theta_1}{3^2}\right)\right] \cdot \frac{\sin \alpha_3}{\alpha_3}. \end{aligned} \quad (18)$$

其函数曲线如图 7. 图 7(a)–(d) 分别是 U_0 , $U_0 + U^{(1)}$, $U_0 + U^{(1)} + U^{(2)}$, $U_0 + U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)}$ 的曲线.

三、谱函数曲线的特点

曲线横轴表示 $\sin \theta_1$, 单位是 λ/a . 横轴取值范围是 $0-50\lambda/a$. 图 5 曲线 (a) 呈现衰减振荡, 在 λ/a 整数倍的位置, 其谱值为零. 于是我们就以该曲线零值点的间隔数目作为尺度, 客观地标定其它曲线的横坐标值. 总的看来, 频谱曲线起伏连绵. 从起伏幅度看, 整个频域大体可分为三段: 低频段 ($0-19\lambda/a$), 大起大落, 属强起伏区; 中频段 ($19-35\lambda/a$), 小起小落, 属弱起伏区; 高频段 ($35-50\lambda/a$), 随代数的增加, 其起伏程度逐渐加强. 令人注目的是在 $41\lambda/a$ 处, 有个脉冲中心, 其高度从图 5 曲线 (a)–(e) 是不断上升的, 似乎波及到两侧, 也随之强起伏, 此时低频段的起伏却相对减弱, 表现出“能量转移”的性质.

另外, 我们也注意到 $4.5\lambda/a$ 处的脉冲高度先是加强, 从图 5 曲线 (d) 开始减弱. 在 $14\lambda/a$ 附近有个负脉冲, 从图 5 曲线 (a)–(d) 都在加强, 到图 5 曲线 (e) 开始减弱. 可见, 谱函数曲线的全貌和主要特征与自相似结构的代数(或称之为层次)有着密切的关系.

值得提出的是上述频谱曲线特征的分析仅限于从母代直到五代同堂的自相似结构, 它们不能简单地被推广到更多代繁衍的情形. 因为无限代繁衍后, 条形黑带将覆盖整个方孔, 其总频谱必定是边长为 $3a$ 正方孔的夫琅和费衍射场, 即

$$U = U_0 + \sum_{N=1}^{\infty} U^{(N)} = c \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \beta}{\beta} \right), \quad (19)$$

$$c = 9c_0 = \frac{A}{\lambda F} (3a)^2, \quad \alpha = \frac{\pi 3a \sin \theta_1}{\lambda}, \quad \beta = \frac{\pi 3a \sin \theta_2}{\lambda}.$$

其曲线仍然如图 5 曲线 (a), 复归到衰减振荡型. 区别在于零谱值的横轴间隔缩小三倍, 即在 $\lambda/3a$ 整数倍的位置, 谱值为零. 由此可见, 频谱曲线纷繁无常的起伏皆出现于

有限代的自相似结构。

自相似 1.89 维结构的谱斑分布具有更鲜明的二维性。仅就 $\sin \theta_1$ 轴上的谱分布曲线看,具有类似 1.63 维的某些特点,本文不再详述。有兴趣的读者,可以进一步参阅文献 [2—5]。

感谢汪滨同志为本文拍摄冲印有关照片。

作者真诚地感谢中国科学院物理研究所张洪钧同志,他在全中国高等院校第五届光学教学研讨会上(1988年,济南),作了“光学混沌”的综合报告,使作者受益匪浅。

- [1] B. B. Mandelbort, *Fractals: forms, chance and dimension*, W. H. Freeman, (1977).
- [2] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, (1977).
- [3] L. Pietronero and E. Tosatti, *Fractals in Physics*, North-Holland, (1986).
- [4] H. O. Peitgen and P. H. Richter, *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, (1986).
- [5] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, (1986).
- [6] 郝柏林,分形与分维在地球科学中的应用,学术期刊出版社,(1988),97 页。

THE SPECTRAL FUNCTIONS OF SELF-SIMILAR STRUCTURES

ZHONG XI-HUA

Department of Physics, Peking University, Beijing, 100871

(Received 2 June 1989)

ABSTRACT

In this paper, two self-similar plane structures are designed, the corresponding diffraction screens are made and its Fraunhofer pattern are obtained. Based on the view point of successive re-production, the spectral recurrence formulas are deduced, and a series of spectral function curves are drawn. Finally we discuss some characters of the curves. This investigation provides an optical analogue method for researching practical self-similar problems.

PACC: 41280C; 0545; 4230