第 39 卷 第 4 期
1990 年 4 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 39, No. 4
Apr., 1990

超导体流体动力学方程

谢学纲1) 陈式刚 洪朝生
中国科学院物理研究所，北京，100080

1989 年 4 月 3 日收到

本文从超导体中准粒子和声子的动力学方程及序参量方程出发得到了超导体流体动力学方程，从理论上证明了出现准粒子从浓度小的区域向浓度大的区域反常扩散的可能性以及对于短波涨落的稳定项.

PACC: 7440

一、引 言

实验表明，当外界注入使超导体远离平衡时，超导体可以出现多种形式的一级或二级非平衡相变. 在理论工作方面，Scalapino 和 Huberman[1] 在准粒子分布的 μ^* 模型[2]基础上，假设准粒子扩散流与有效化学势 μ^* 的梯度成正比而方向相反，提出了准粒子和声子的反应扩散型方程 (S-H 方程)，他们考虑到序参量在空间的关联，在方程中还引入一个取决于相干长度 ξ 的对于短波涨落的稳定项. 从 S-H 方程可以得到，当注入强度大于某一临界值时，超导体的热力学分支均匀定态解将变为不稳定，在临界点上出现的空间周期结构的特征长度为准粒子扩散长度 d 和相干长度 ξ 的几何平均值. S-H 方程中包含着很重要的合理成份，其最基本的一点，即该理论预示的在一定的注入条件下非平衡超导体中将会出现准粒子从浓度低的区域向浓度高的区域反常扩散，这已为实验所证实[3]. 这个唯象理论指出非平衡超导体出现不稳定的一种机制——扩散不稳定，并且包含了超导体出现多种形式非平衡相变 ($S \rightarrow N$，$S \rightarrow$ 非均匀态的一级或二级相变) 的可能性. 但这个理论是一个唯象理论，准粒子流和短波涨落的稳定项都是以假设的形式引入的，缺乏理论依据. 更主要的是作为理论基础的 μ^* 模型一般来说并不可靠[4]. 这个理论预示的随着环境温度升高出现一级和二级相变的次序恰与实验结果相反[5]，由它得到的临界点周期结构的尺度比实验值要小一个数量级.

Willemsen 和 Gray[4] 提出准粒子定态分布的 $T^*\mu^*$ 模型. 他们表明，除了一些小的结构外，$T^*\mu^*$ 模型可以正确地代表分布函数的总体特性. 本文从超导体中准粒子和声子的动力学方程及序参量方程出发，分别在 μ^* 模型和 $T^*\mu^*$ 模型的基础上，并在局域定态成立的条件下，得到超导体流体动力学方程. 从理论上证明了在一定条件下可以出现准粒子从浓度小的区域向浓度大的区域反常扩散，也从理论上得到了对于短波涨落的

1) 现在工作单位：中国科学院地理研究所，北京，100012.

稳定项．讨论还表明，S-H 方程与局域定态条件是矛盾的．

二、μ^* 模型下的超导体流体动力学方程

对于超导体，一般情况下有

$$\lambda \gg d \gg \frac{\hbar v_F}{\Delta} \sim \xi_0, \qquad \tau \gg \tau_E \gg \frac{\hbar}{\Delta} \sim \tau_\Delta, \tag{1}$$

式中 λ, τ 分别为非平衡超导态空间变化和时间变化的尺度；d 和 τ_E 分别为准粒子的扩散长度和特征弛豫时间；ξ_0 为相干长度；τ_Δ 为序参量的弛豫时间．这时，准粒子分布函数 $f=f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r},t)$，声子分布函数 $n=n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r},t)$ 和序参量 $\Delta=\Delta(\boldsymbol{r},t)$ 满足如下的动力学方程和序参量方程[6]：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{p}}-\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{r}}=-\frac{1}{\tau_1}\frac{|\varepsilon|}{E}(f-\langle f\rangle_E)+C_2(f,n)+I_{qp}(p), \tag{2a}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}=D(f,n)-\frac{n-n_a}{\tau_{es}}+I_{ph}(q), \tag{2b}$$

$$\tau_\Delta\frac{\partial \Delta}{\partial t}=-\Delta\left(\frac{1}{\lambda_e}-\frac{1}{2N(0)}\sum_p\frac{1-2f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r},t)}{E}\right)+\xi_0^2\nabla^2\Delta, \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 分别为准粒子和声子的准动量；$E=\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}$，$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}-\mu_e$，$\mu_e$ 为超导体的化学势；$I_{q_p}(p)$ 和 $I_{ph}(q)$ 分别为准粒子和声子的注入项，假定它们均匀且各向同性；τ_{es} 为声子逃逸时间，$n_a=(e^{\beta_a\Omega}-1)^{-1}$ 为在环境温度 $T_a=1/k\beta_a$ 下的声子平衡分布．(2a) 式等号右边第一项为准粒子与杂质或缺陷的弹性散射项．$C_2(f,n)$ 为电声子相互作用引起的准粒子散射项；$D(f,n)$ 为电声子相互作用引起的声子散射项，它们的形式在文献[6]中已给出．在声子的动力学方程 (2b) 中忽略了声子扩散的影响．考虑到不等式(1)，可以忽略(3)式中 Δ 的时间微商和空间微商项，(3)式即化为通常的 BCS 能隙方程

$$\frac{1}{\lambda_e}=\frac{1}{2N(0)}\sum_p\frac{1-2f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r},t)}{E}. \tag{4}$$

下面从方程 (2a)，(2b) 和(4)式出发推导超导体的流体动力学方程．为简单起见，先在 μ^* 模型下讨论．从方程 (2a) 和 (2b) 可得到准粒子和声子数目的输运方程

$$\frac{\partial N_{qp}}{\partial t}=I_{q_p}+\sum_{p\sigma}C_2(f,n)-\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{qp}, \tag{5a}$$

$$\frac{\partial N_{ph}}{\partial t}=I_{ph}+\sum_{\substack{q\lambda\\(\Omega>2\Delta)}}D(f,n)-\frac{1}{\tau_{es}}(N_{ph}-N_{ph}^a), \tag{5b}$$

式中 $N_{qp}=\sum_{p\sigma}f$ 为准粒子浓度；$N_{ph}=\sum_{\substack{q\lambda\\(\Omega>2\Delta)}}n$ 为能量大于 2 倍能隙的高能声子的浓度 (σ 为电子的自旋指标，λ 为声子的极化指标，Ω 为声子的能量)；$N_{ph}^a=\sum_{\substack{q\lambda\\(\Omega>2\Delta)}}n_a$ 为环

境温度 T_a 下达到平衡时的高能声子浓度；$I_{qp}=\sum_{p\sigma} I_{qp}(p)$，$I_{ph}=\sum_{\substack{q\lambda \\ (\Omega>2\Delta)}} I_{ph}(q)$ 分别为准粒子和高能声子的注入率；$\frac{\partial N_{ph}}{\partial t}=\sum_{\substack{q\lambda \\ (\Omega>2\Delta)}}\frac{\partial n}{\partial t}$，忽略了由于能隙 Δ 变化引起的对声子状态的求和范围的变化；

$$J_{qp}=\sum_{p\sigma}\frac{\varepsilon}{mE}pf \tag{6}$$

为准粒子的流密度. 利用 $C_2(f,n)$ 和 $D(f,n)$ 的表达式可直接验证，如果忽略准粒子非弹性散射过程中吸收或产生的 $\Omega>2\Delta$ 的高能声子，有

$$\sum_{p\sigma} C_2(f,n)+2\sum_{\substack{q\lambda \\ (\Omega>2\Delta)}} D(f,n)=0. \tag{7}$$

它代表电声子相互作用下总的元激发数目 $N=N_{qp}+2N_{ph}$ 守恒. 利用(7)式可得到非平衡超导体中元激发总数的输运方程

$$\frac{\partial N}{\partial t}=I_{qp}+2I_{ph}-\frac{2}{\tau_{es}}(N_{ph}-N_{ph}^{a})-\nabla\cdot J_{qp}. \tag{8}$$

在 μ^* 模型下，定态的准粒子分布 $\bar{f}$ 具有如下形式(以下用横道表示定态的物理量)：

$$\bar{f}=\frac{1}{e^{\beta_s(E-\mu^*)}+1}\equiv f_0(p,\mu^*,\Delta(\mu^*)), \tag{9a}$$

相应的定态声子分布 $\bar{n}$ 通过动力学方程被确定为

$$\bar{n}\equiv n_0(q,\mu^*,\Delta(\mu^*)). \tag{9b}$$

由于(1)式，可以进一步假设局域定态条件成立，即外界注入下超导体的状态在随时间空间变化过程中，在任一时刻空间的任一小区域内，体系都处于局部的定态，该点的分布可用相应于该点的有效化学势 $\mu^*(r,t)$ 表征. 于是有

$$f=f(p,r,t)=f_0+f_0h,\quad n=n(q,r,t)=n_0+n_0g, \tag{10}$$

式中

$$f_0=f_0(p,\mu^*(r,t),\Delta(\mu^*(r,t))),\quad n_0=n_0(q,\mu^*(r,t),\Delta(\mu^*(r,t))) \tag{11}$$

为流体态，而 $\tilde{f}=f_0h(p,r,t)$，$\tilde{n}=n_0g(q,r,t)$ 为加于流体态上的小修正，满足条件

$$\sum_{p\sigma}\tilde{f}=0,\quad \sum_{\substack{q\lambda \\ (\Omega>2\Delta)}}\tilde{n}=0. \tag{12}$$

$\tilde{f}$，$\tilde{n}$ 对于 f_0，n_0 来说为小量，这与状态偏离均匀定态 $\bar{f}$，$\bar{n}$ 的涨落大小没有关系，故可将(2a)，(2b)式中的散射项 $C_2(f,n)$，$D(f,n)$ 在 f_0，n_0 处展开，并只保留 h，g 的一次项，

$$C_2(f,n)=C_2(f_0,n_0)+f_0C_{2l}(h,g), \tag{13a}$$

$$D(f,n)=D(f_0,n_0)+n_0D_l(h,g), \tag{13b}$$

C_{2l}，D_l 为准粒子和声子散射算符 C_2，D 在 f_0，n_0 处的线性化算符，所以它们依赖于 r，t. 令

$$h=h^e+h^o,\quad g=g^e+g^o, \tag{14}$$

式中 h^e，g^e 分别为 p 和 q 的偶函数；h^o，g^o 分别为 p 和 q 的奇函数. 将(13a)和(14)式代入准粒子的动力学方程(2a)，令方程等号两边奇偶部分分别相等，对 $C_{2l}(h^o,g^o)$ 采取弛豫时间近似[7]，在零级近似下，可以得到

$$f_0h^\circ = \tau_{qp}^2(E)\frac{e}{mE}\boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_\Delta - \tau_{qp}(E)\left(\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_\Delta\cdot\frac{e}{mE}\boldsymbol{p},$$

式中 $\tau_{qp}(E) = \left(\frac{1}{\tau_1}\frac{|e|}{E} + \frac{1}{\tau_{qp2}(E)}\right)^{-1}$ 为在 $\boldsymbol{r}$, t 点的流体态 f_0, n_0 中准粒子的总寿命，而 $\tau_{qp2}(E)$ 为由于电声子相互作用引起的准粒子寿命．空间微商中的下角标Δ表示在保持Δ不变的条件下相应的微商．利用(6),(8)式，可以得到

$$\frac{\partial N}{\partial t} = I_{qp} + 2I_{ph} - \frac{2}{\tau_{es}}(N_{ph} - N_{ph}^a) + D_{qp}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\left(\frac{\partial N_{qp}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_\Delta + \nabla D_{qp}\cdot\left(\frac{\partial N_{qp}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_\Delta - \tau_{qp}D_{qp}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\left(\frac{\partial N_{qp}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_\Delta\right], \tag{15}$$

式中 D_{qp} 表示能量为 E 的准粒子的扩散系数 $D_{qp}(E) = \frac{1}{3}\tau_{qp}(E)\left(\frac{e}{mE}\right)^2 p^2$ 按能量的某种平均值．由(10)—(12)式还有

$$N_{qp} = N_{qp}(\mu^*, \Delta(\mu^*)),\ N_{ph} = N_{ph}(\mu^*, \Delta(\mu^*)),\ N = N(\mu^*, \Delta(\mu^*)) \tag{16}$$

等等．$\Delta = \Delta(\mu^*)$ 则是通过 BCS 能隙方程(4)确定．如果选 N_{qp} 作为自变量，那么 Δ, μ^*, N_{ph}, N, τ_{qp} 和 D_{qp} 等又都可以表为 N_{qp} 的函数．这些函数关系可通过 μ^* 模型下的定态数值计算得到．又假设注入 I_{qp}, I_{ph} 在状态变化过程中保持恒定，对于该注入下的均匀定态，有

$$I_{qp} + 2I_{ph} - \frac{2}{\tau_{es}}(\bar{N}_{ph} - \bar{N}_{ph}^a) = 0. \tag{17}$$

可以用叠代法将(15)式改写.(15)式等号右边最后一项与右边最后第二、三项相比的数量级为 $\tau_{qp}/\tau \ll 1$，忽略这一项，可得到 $\partial N/\partial t$，从而得到 $\partial N_{qp}/\partial t$ 的近似解．再将得到的 $\partial N_{qp}/\partial t$ 近似解代入方程(15)等号右边最后一项，且只取到 N_{qp} 的空间微商的一次项，得到

$$\frac{\partial N_{qp}}{\partial t} = -\frac{1}{\frac{dN}{dN_{qp}}}\frac{2}{\tau_{es}}\Delta(N_{ph} - N_{ph}^a) + \frac{1}{\frac{dN}{dN_{qp}}}\frac{dD_{eff}}{dN_{qp}}(\nabla N_{qp})^2 + \frac{1}{\frac{dN}{dN_{qp}}}D_{eff}\nabla^2 N_{qp} - \frac{1}{\left(\frac{dN}{dN_{qp}}\right)^2}\tau_{qp}D_{eff}^2\nabla^4 N_{qp}, \tag{18}$$

式中 $D_{eff} = D_{qp}\left(\frac{\partial N_{qp}}{\partial \mu^*}\right)_\Delta\frac{d\mu^*}{dN_{qp}}$; $\Delta(N_{ph} - N_{ph}^a) = (N_{ph} - N_{ph}^a) - (\bar{N}_{ph} - \bar{N}_{ph}^a)$．上式等号右边各项中除 N_{qp} 的空间微商以外其它因子均为 N_{qp} 的函数，它们的形式通过 μ^* 模型下的定态数值计算原则上是知道的．作为近似，取[1]

$$\mu^* = \mu^{*0} - A(N_{qp} - N_{qp}^0)^2,$$

式中 N_{qp}^0 为 μ^* 取极大值 μ^{*0} 时 N_{qp} 的值，A 为常数．对于其它 N_{qp} 的函数，均在定态 $N_{qp} = \bar{N}_{qp}$ 处展开，且只取到最低级近似．于是得到

$$\frac{\partial N_{qp}}{\partial t} = -\frac{2B}{\tau_{es}}(N_{qp} - \bar{N}_{qp}) - 2ACD_{qp}(\nabla N_{qp})^2$$

$$
-2ACD_{\rm qp}(N_{\rm qp}-N_{\rm qp}^0)\nabla^2 N_{\rm qp}-4A^2C^2\tau_{\rm qp}D_{\rm qp}^2
\cdot(N_{\rm qp}-N_{\rm qp}^0)^2\nabla^4 N_{\rm qp}, \tag{19}
$$

式中 $B=\left(\overline{\frac{d(N_{\rm ph}-N_{\rm ph}^a)}{dN}}\right)$; $C=\left(\overline{\frac{\partial N_{\rm qp}}{\partial\mu^*}}\right)_\Delta\left(\overline{\frac{dN_{\rm qp}}{dN}}\right)$; $D_{\rm qp}=\overline{D}_{\rm qp}$; $\tau_{\rm qp}=\bar{\tau}_{\rm qp}$ 均指在定态处相应物理量的值．方程(18)或它的简化式(19)即为在 μ^* 模型下的超导体流体动力学方程．

现在将本结果与S-H方程作一比较．对照(18)式与(8)式，可以看出(18)式等号右边第二、三、四项为准粒子扩散流的贡献．相应于前两项，准粒子流密度为

$$
\boldsymbol{J}_{\rm qp}=-D_{\rm qp}\left(\frac{\partial N_{\rm qp}}{\partial\mu^*}\right)_\Delta\frac{d\mu^*}{dN_{\rm qp}}\nabla N_{\rm qp}. \tag{20}
$$

由于 $\left(\frac{\partial N_{\rm qp}}{\partial\mu^*}\right)_\Delta$ 永远为正值，所以当 $d\mu^*/dN_{\rm qp}<0$ 时，出现准粒子从浓度小的区域向浓度大的区域反常扩散．对于它的出现可作如下解释：在动力学方程 (2a) 中，$-\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\partial E}{\partial\boldsymbol{r}}$ 项相当于准粒子受到一个有效力 $\boldsymbol{F}=-\partial E/\partial\boldsymbol{r}=-\Delta/E\cdot\partial\Delta/\partial\boldsymbol{r}$ 的作用．这个有效力以及由它引起的扩散流是沿着能隙Δ下降，即准粒子浓度 $N_{\rm qp}$ 增加的方向的．当 $N_{\rm qp}$ 大于某一临界值后，$N_{\rm qp}$ 的增加引起能隙Δ很快下降，这个有效力增大，从而使得总的准粒子流出现反常扩散的情况．(20) 式与 Scalapino 和 Huberman 作为假设引进的准粒子扩散流 $\boldsymbol{J}_{\rm qp}=-N(0)D\nabla\mu^*=-N(0)D\frac{d\mu^*}{dN_{\rm qp}}\nabla N_{\rm qp}$ 具有相同的形式．也就是说，我们从理论上证明了S-H的假设．而(18)式等号右边第四项，可以看出它对于短波涨落是一个稳定项，这一项在涨落的波长 λ 接近准粒子平均自由程 $l_{\rm qp}$ 时起作用．序参量的空间关联引起的形变能的影响仅在涨落波长 $\lambda\approx\xi_0$ 时才起作用．在我们的处理中，由于不等式(1)式，它实际上不起作用．

我们的结果与S-H方程的另一区别在于对准粒子数和声子数输运方程 (5a), (5b) 中反应项 $\sum\limits_{p\sigma}C_2(f,n)$ 和 $\sum\limits_{\substack{q\lambda\\(\Omega>2\Delta)}}D(f,n)$ 的处理上．S-H 采用了 Rothwarf 和 Taylor[8] 的形式，得到

$$
\frac{\partial N_{\rm qp}}{\partial t}=I_{\rm qp}-2RN_{\rm qp}^2+2BN_{\rm ph}-\nabla\cdot\boldsymbol{J}, \tag{21a}
$$

$$
\frac{\partial N_{\rm ph}}{\partial t}=I_{\rm ph}+RN_{\rm qp}^2-BN_{\rm ph}-\frac{N_{\rm ph}-N_{\rm ph}^a}{\tau_{\rm es}}, \tag{21b}
$$

并且把 R, B 看作常数．这样，在任何一个随时间空间变化的过程中，反应项的大小完全由准粒子浓度和声子浓度决定．从下面的分析可以看到，S-H 方程是与局域定态条件矛盾的．考虑在 t 时刻样品中某一点 $\boldsymbol{r}$ 处的小体元．设想保持这个小体元的准粒子浓度 $N_{\rm qp}$ 和声子浓度 $N_{\rm ph}$ 不变，但这个小体元周围的准粒子浓度发生了变化．这时，方程(21a) 中准粒子扩散部分 $-\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\rm qp}$ 将发生变化，而 $I_{\rm qp}$ 和反应项 $-2RN_{\rm qp}^2+2BN_{\rm ph}$ 都保持不变，因此 $\partial N_{\rm qp}/\partial t$ 要发生变化．在方程 (21b) 中，等号右边各项都不改变，因此

$\partial N_{ph}/\partial t$ 不变．所以由 S-H 方程(21)，在准粒子浓度 N_{qp} 和声子浓度 N_{ph} 不变的条件下，$\frac{\partial N_{qp}}{\partial t}\Big/\frac{\partial N_{ph}}{\partial t}$ 仍没有确定的数值． 但是按照局域定态条件，在任意时刻空间任意小体元中，体系都处于局域定态，因而有 $N_{qp}=N_{qp}(\mu^*)$，$N_{ph}=N_{ph}(\mu^*)$，$\frac{\partial N_{qp}}{\partial t}\Big/\frac{\partial N_{ph}}{\partial t}=\left(\frac{dN_{qp}}{d\mu^*}\frac{\partial\mu^*}{\partial t}\right)\Big/\left(\frac{dN_{ph}}{d\mu^*}\frac{\partial\mu^*}{\partial t}\right)=\frac{dN_{qp}}{dN_{ph}}$ 是由该点的准粒子浓度 N_{qp} (从而 N_{ph}) 唯一确定的．可见 S-H 方程与局域定态条件是矛盾的． 从物理上考虑，在 $\tau\gg\tau_{qp}$ 和 $\lambda\gg d_{qp}$ 的条件下，局域定态假设应该是合理的，这正如非平衡热力学和统计物理学中通常的局域平衡假设一样． 事实上，R-T 关于反应项的形式可由准粒子和声子的散射算符的形式得到[9]，其中 R，B 依赖于分布函数 f，n 的形式．利用(10)，(11)和(13)式，可将(5a)、(5b)式中的反应项表成

$$\sum_{p\sigma}C_2(f,n)=-2R(\mu^*)N_{qp}^2+2B(\mu^*)N_{ph}$$
$$+\sum_{p\sigma}f_0(p,\mu^*,\Delta(\mu^*))C_{2l}^{\mu^*}(h,g),\tag{22a}$$

$$\sum_{\substack{q\lambda\\(\Omega>2\Delta)}}D(f,n)=R(\mu^*)N_{qp}^2-B(\mu^*)N_{ph}$$
$$+\sum_{\substack{q\lambda\\(\Omega>2\Delta)}}n_0(q,\mu^*,\Delta(\mu^*))D_l^{\mu^*}(h,g),\tag{22b}$$

式中 $C_{2l}^{\mu^*}$，$D_l^{\mu^*}$ 分别表示准粒子和声子的散射算符 C_2，D 在 $f_0(p,\mu^*,\Delta(\mu^*))$，$n_0(q,\mu^*,\Delta(\mu^*))$ 处的线性化算符；$R(\mu^*)$，$B(\mu^*)$ 为该流体态下的相应系数，它们可由 μ^* 或 N_{qp} 决定．(22a)，(22b)式等号右边第一部分正是反应项中由粒子数决定的部分，亦即 S-H 方程中考虑的部分．第二部分则是反应项中不由粒子数决定的部分． 实际上，$\tilde{f}=f_0h$ 和 $\tilde{n}=n_0g$ 对粒子数的贡献为零． 正是这一部分保证了局域定态条件的成立．$\sum_{p\sigma}f_0C_l^{\mu^*}(h,g)$ 和 $\sum_{\substack{q\lambda\\(\Omega>2\Delta)}}n_0D_l^{\mu^*}(h,g)$ 为方程(5a)和(5b)中的未知因素，因而从方程组(5a)，(5b)不能确定 N_{qp} 和 N_{ph}．为了解决这个困难，引入总元激发数 $N=N_{qp}+2N_{ph}$，利用关于 N 的率方程和局域定态条件(16)式，可以确定超导体状态的变化．

三、$T^*\mu^*$ 模型下的超导体流体动力学方程

μ^* 模型一般情况下并不可靠． 为了与实验作定量的比较，需采取更符合实际的 $T^*\mu^*$ 模型．在 $T^*\mu^*$ 模型下，同时需要总元激发数目及总能量的输运方程．

从准粒子和声子的动力学方程(2a)，(2b)，利用在电声子相互作用下总能量守恒和总元激发数目守恒，并进一步假设局域定态条件成立，可得

$$\frac{\partial N}{\partial t}=I_{qp}+2I_{ph}-\frac{2}{\tau_{es}}(N_{ph}-N_{ph}^a)+D_{qp}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\left(\frac{\partial N_{qp}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)_\Delta$$
$$+\nabla D_{qp}\cdot\left(\frac{\partial N_{qp}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)_\Delta-\tau_{qp}D_{qp}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\left(\frac{\partial N_{qp}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)_\Delta\right],\tag{23a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=I_{\mathrm{qp}}^{\mathrm{H}}+I_{\mathrm{ph}}^{\mathrm{H}}-\frac{1}{\tau_{\mathrm{es}}}(H_{\mathrm{ph}}-H_{\mathrm{ph}}^{\mathrm{a}})+D_{\mathrm{qp}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\left(\frac{\partial H_{\mathrm{qp}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_{\Delta}$$
$$+\nabla D_{\mathrm{qp}}\cdot\left(\frac{\partial H_{\mathrm{qp}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_{\Delta}-\tau_{\mathrm{qp}}D_{\mathrm{qp}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\left(\frac{\partial H_{\mathrm{qp}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_{\Delta}\right], \tag{23b}$$

式中 $H=H_{\mathrm{qp}}+H_{\mathrm{ph}}=\sum_{p\sigma}Ef+\sum_{q\lambda}\Omega n$ 为准粒子和声子的总能量密度；$H_{\mathrm{ph}}^{\mathrm{a}}=\sum_{q\lambda}\cdot\Omega na$ 为环境温度 T_{a} 下达到平衡时声子的能量密度；$I_{\mathrm{qp}}^{\mathrm{H}}=\sum_{p\sigma}EI_{\mathrm{qp}}(p)$，$I_{\mathrm{ph}}^{\mathrm{H}}=\sum_{q\lambda}\cdot\Omega I_{\mathrm{ph}}(q)$ 分别为准粒子和声子的能量注入率．此外，还有关系式

$$\Delta=\Delta(\beta^*,\mu^*),\ N_{\mathrm{qp}}=N_{\mathrm{qp}}(\beta^*,\mu^*,\Delta(\beta^*,\mu^*)),\ N_{\mathrm{ph}}=N_{\mathrm{ph}}(\beta^*,\mu^*,\Delta(\beta^*,\mu^*)),$$
$$H_{\mathrm{qp}}=H_{\mathrm{qp}}(\beta^*,\mu^*,\Delta(\beta^*,\mu^*)),\ H_{\mathrm{ph}}=H_{\mathrm{ph}}(\beta^*,\mu^*,\Delta(\beta^*,\mu^*)), \tag{24}$$

以及对于 N，H等的类似关系，这些关系可以通过 $T^*\mu^*$ 模型下定态的数值计算得到．(23),(24)式构成 $T^*\mu^*$ 模型下的超导体流体动力学方程．类似于前面对 μ^* 模型下方程(15)的处理，可以利用叠代法将(23)式进一步简化． 由于 $T^*\mu^*$ 模型在 T^* 保持不变时的形状就是 μ^* 模型的形状，所以 $T^*\mu^*$ 模型保持了 μ^* 模型的一些重要性质，例如当注入增大时 $(\partial N_{\mathrm{qp}}/\partial\mu^*)_{T^*}$ 可以由正值变为负值．在 $T^*\mu^*$ 模型下，定量的结果要改变，但 μ^* 模型下得到的一些重要的定性结果仍然保持，包括出现反常扩散的可能性和存在短波稳定项．

[1] D. J. Scalapino and B. A. Huberman, *Phys. Rev. Lett.*, 21(1977), 1365.
[2] C. S. Owen and D. J. Scalapino, *Phys. Rev. Lett.*, 28(1972), 1559.
[3] H. Schreyer, W. Dietsche and H. Kinder, *Phys. Rev.*, B31(1985), 1334.
[4] H. W. Willemsen and K. E. Gray, *Phys. Rev. Lett.*, 41(1978), 812.
[5] Chen Shigang and Chen Xiaolan, *Commun. in Theor. Phys.*, 2(1983), 951.
[6] A. -M. Tremblay, Bruce R. Patton and P. C. Martin, *Ann. Phys.*, 124(1980), 401.
[7] 谢学纲、陈式刚、洪朝生，中国科学A辑，(11)(1989)，1167.
[8] A. Rothwarf and B. N. Taylor, *Phys. Rev. Lett.*, 19(1967), 27.
[9] Jhy-Jiun Chang and D. J. Scalapino, *Phys. Rev.*, B15(1977), 2651.

HYDRODYNAMIC EQUATION FOR A SUPERCONDUCTOR

XIE XUE-GANG CHEN SHI-GANG HONG CHAO-SHENG

Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080

(Received 3 April 1989)

ABSTRACT

Starting from the quasiparticle and phonon kinetic equations and the order parameter equation, we have obtained a hydrodynamic equation for a superconductor and theoretically verified the possibility of unusual diffusion of quasiparticles from regions with lower concentration to regions with higher concentration as well as the stabilizing term for short-wave fluctuations.

PACC: 7440