第 39 卷 第 5 期　　物 理 学 报　　Vol. 39, No. 5
1990 年 5 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　May, 1990

孤子方程不同求解方法之间的关系

肖　奕
华中理工大学物理系，武汉，430074

1989 年 7 月 13 日收到

本文从投影矩阵法推导出了孤子方程一些不同求解方法的基本方程或结论．对这些方法之间的关系给出了一种比较简单和统一的描述．

PACC: 0340K; 0365; 0200

一、引　言

孤子方程出现在物理学的许多领域中．目前孤子方程的求解方法主要有逆散射法[1-4]，Riemann 问题法[5,6]，Bäcklund 变换法[7]，Hirota 法[8]和 Darboux 变换法[9]．这些方法之间的关系虽已有不少讨论，但目前并没有一种简单和统一的描述．而且有些方法之间的关系还不清楚，如 Darboux 变换法和 Riemann 问题法．最近我们提出了一种投影矩阵法[10,11]．这种方法求孤子解的过程十分简单．本文将说明，这种方法还可以对上面提到的那些求解法之间的关系给出一个比较简单、清楚和统一的描述．本文中的做法是先从投影矩阵法推导出这些方法的基本方程或结论，然后讨论它们之间的关系．象文献 [11] 一样，仍以 CMKdV 方程和 MKdV 方程为例．

因下面要利用文献 [11] 中的一些公式，所以先归纳该文得到的主要结论．

CMKdV 方程

$$q_t(x, t) + 6|q(x, t)|^2 q_x(x, t) + q_{xxx}(x, t) = 0. \tag{1}$$

可由线性方程对

$$F_x(x, t, \lambda) = L(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda), \tag{2}$$

$$F_t(x, t, \lambda) = M(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda) \tag{3}$$

的相容条件给出，式中

$$L(x, t, \lambda) = -i\lambda\sigma_3 + U, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} M(x, t, \lambda) = &-4i\lambda^3\sigma_3 + 4\lambda^2 U - 2i\lambda(U_x + U^2)\sigma_3 \\ &+ U_x U - U U_x + 2U^3 - U_{xx}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

式中“$\bar{q}$”表示 q 的复数共轭．当 $\bar{q} = q$ 时，上面给出 MKdV 方程．

CMKdV（或 MKdV）方程的 n 孤子解与（$n-1$）孤子解的关系由孤子变换给出

$$F_n(x, t, \lambda) = B_n(x, t, \lambda) F_{n-1}(x, t, \lambda), \tag{7}$$

$$U_n = U_{n-1} + i(\bar{\lambda}_n - \lambda_n)[\sigma_3, P_n], \tag{8}$$

式中

$$B_n(x, t, \lambda) = I + \frac{\lambda_n - \bar{\lambda}_n}{\lambda - \lambda_n} P_n(\lambda_n), \tag{9}$$

$$P_n(\lambda_n) = \frac{F_{n-1}(\lambda_n)\begin{pmatrix}\bar{b}_n \\ 1\end{pmatrix}(b_n, 1) F_{n-1}^{-1}(\lambda_n)}{(b_n, 1) F_{n-1}^{-1}(\lambda_n) F_{n-1}(\lambda_n)\begin{pmatrix}\bar{b}_n \\ 1\end{pmatrix}}, \tag{10}$$

$$P_{nx} = L_n(\lambda_n) P_n - P_n L_{n-1}(\lambda_n), \tag{11}$$

$$P_{nt} = M_n(\lambda_n) P_n - P_n M_{n-1}(\lambda_n). \tag{12}$$

二、Z-S 逆散射法方程组

从投影矩阵法,可以很方便地推导出逆散射法基本方程组[2]. 由孤子变换(7)式, n 孤子解可写为(省去变量 x, t)

$$F_n(\lambda) = G(\lambda) F_0(\lambda), \tag{13}$$

式中

$$G(\lambda) = B_n(\lambda) B_{n-1}(\lambda) \cdots B_1(\lambda). \tag{14}$$

$G(\lambda)$ 可用部分分式展开为

$$G(\lambda) = I + \sum_l \frac{1}{\lambda - \lambda_l} R_l, \tag{15}$$

$$R_l = \lim_{\lambda \to \lambda_l} (\lambda - \lambda_l) G(\lambda). \tag{16}$$

因为

$$I - P_l = \sigma_2 P_l^T \sigma_2, \tag{17}$$

可推得

$$\sigma_2 [B_l^{-1}(\lambda)]^T \sigma_2 = \frac{\lambda - \lambda_l}{\lambda - \bar{\lambda}_l} B_l(\lambda), \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 [G^{-1}(\lambda_l)]^T \sigma_2 &= a_l B_n(\lambda_l) \cdots B_{l+1}(\lambda_l)(\lambda_l - \bar{\lambda}_l) P_l B_{l-1}(\lambda_l) \cdots B_1(\lambda_l) \\ &= a_l \lim_{\lambda \to \lambda_l} (\lambda - \lambda_l) G(\lambda),\end{aligned} \tag{19}$$

式中

$$a_l = \prod_{m \neq l} \frac{\lambda_l - \lambda_m}{\lambda_l - \bar{\lambda}_m} \frac{1}{\lambda_l - \bar{\lambda}_l}, \tag{20}$$

所以

$$R_l = \sigma_2 [G^{-1}(\lambda_l)]^T \sigma_2 / a_l. \tag{21}$$

这样(15)式可写为

$$G(\lambda) = I + \sum_l \frac{1}{(\lambda - \lambda_l)} \frac{1}{a_l} \sigma_2 [G^{-1}(\lambda_l)]^T \sigma_2. \tag{22}$$

同样可证下式成立：

$$\sigma_2[G^{-1}(\lambda)]^T\sigma_2 = I + \sum_l \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}_l}\frac{1}{\bar{a}_l}G(\bar{\lambda}_l). \tag{23}$$

由于

$$(I - P_l)^2 = (I - P_l), \tag{24}$$

$$(I - P_l)P_l = P_l(I - P_l) = 0, \tag{25}$$

得到

$$I - P_l = \frac{F_{l-1}(\lambda_l)\begin{pmatrix}1\\-b_l\end{pmatrix}^{(1,-\bar{b}_l)}F_{l-1}^{-1}(\bar{\lambda}_l)}{(1, -\bar{b}_l)F_{l-1}^{-1}(\bar{\lambda}_l)F_{l-1}(\lambda_l)\begin{pmatrix}1\\-b_l\end{pmatrix}}. \tag{26}$$

这样

$$F_n(\bar{\lambda}_l) = B_n(\bar{\lambda}_l)\cdots B_{l+1}(\bar{\lambda}_l)(I - P_l)F_{l-1}(\bar{\lambda}_l), \tag{27}$$

$$\sigma_2[F_n^{-1}(\lambda_l)]^T\sigma_2 = \sigma_2[F_{l-1}^{-1}(\lambda_l)(I - P_l)B_{l+1}^{-1}(\lambda_l)\cdots B_n^{-1}(\lambda_l)]^T\sigma_2 \tag{28}$$

分别具有如下形式：

$$\sigma_2[F_n^{-1}(\lambda_l)]^T\sigma_2 = \begin{pmatrix}\phi_1(\lambda_l)\\ \phi_2(\lambda_l)\end{pmatrix}(b_l,\ 1), \tag{29}$$

$$F_n(\bar{\lambda}_l) = \begin{pmatrix}\bar{\phi}_2(\bar{\lambda}_l)\\ -\bar{\phi}_1(\bar{\lambda}_l)\end{pmatrix}(1,\ -\bar{b}_l). \tag{30}$$

对 CMKdV 方程

$$F_0(\lambda) = \exp[-i(\lambda x + 4\lambda^3 t)\sigma_3]. \tag{31}$$

因此

$$G(\bar{\lambda}_l) = \begin{pmatrix}\bar{\phi}_2(\lambda_l)\\ -\bar{\phi}_1(\lambda_l)\end{pmatrix}(1, -\bar{b}_l)\exp[i(\bar{\lambda}_l x + 4\bar{\lambda}_l^3 t)\sigma_3], \tag{32}$$

$$\sigma_2[G^{-1}(\lambda_l)]^T\sigma_2 = \begin{pmatrix}\phi_1(\lambda_l)\\ \phi_2(\lambda_l)\end{pmatrix}(b_l, 1)\exp[i(\lambda_l x + 4\lambda_l t)\sigma_3]. \tag{33}$$

把上面二式代入(22)和(23)式，得到

$$\begin{pmatrix}\phi_1(\lambda_m)\\ \phi_2(\lambda_m)\end{pmatrix}\exp[-i(\lambda_m x + 4\lambda_m^3 t)] = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \sum_l \frac{1}{\lambda_m - \bar{\lambda}_l}\frac{\bar{b}_l}{\bar{a}_l}\begin{pmatrix}\bar{\phi}_2(\bar{\lambda}_l)\\ -\bar{\phi}_1(\bar{\lambda}_l)\end{pmatrix}\exp[-i(\bar{\lambda}_l x + 4\bar{\lambda}_l^3 t)], \tag{34}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{\phi}_2(\bar{\lambda}_m)\\ -\bar{\phi}_1(\lambda_m)\end{pmatrix}\exp[i(\bar{\lambda}_m x + 4\bar{\lambda}_m^3 t)] = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sum_l \frac{1}{\bar{\lambda}_m - \lambda_l}\frac{b_l}{a_l}\begin{pmatrix}\phi_1(\lambda_l)\\ \phi_2(\lambda_l)\end{pmatrix}\exp[i(\lambda_l x + 4\lambda_l^3 t)]. \tag{35}$$

另外二式和它们等价. 如果把 λ_l, λ_m 限制在上半 λ 复平面，(34)和(35)式就是在无反射情况下的 Z-S 逆散射法基本方程组[2-4]. 可以看出，从投影矩阵法推导出(34)和(35)式的关键是 $G(\lambda)$ 满足的闭合方程组(22)和(23). 这二式的导出并不涉及具体

的方程，它们对其它 AKNS 系统也成立。

三、含零点的 Riemann 问题

用 Riemann 问题法求孤子解也是一种逆方法，它从含零点的 Riemann 问题之解构造出该解满足的非线性方程。投影矩阵法可以称为直接 Riemann 问题法，它是从孤子方程直接求出含零点的 Riemann 问题的解。该解就是(14)式定义的 $G(\lambda)$ 和 $G^{-1}(\lambda)$。

利用(9)式不难证明下列各式:

$$G(\lambda) \xrightarrow{|\lambda|\to\infty} I, \quad G^{-1}(\lambda) \xrightarrow{|\lambda|\to\infty} I, \tag{36}$$

$$\det G(\lambda) = \prod_{l=1}^{n} \frac{\lambda - \lambda_l}{\lambda - \bar{\lambda}_l}, \quad \det G^{-1}(\lambda) = \prod_{l=1}^{n} \frac{\lambda - \bar{\lambda}_l}{\lambda - \lambda_l}. \tag{37}$$

这表明 $G(\lambda)$ 和 $G^{-1}(\lambda)$ 各有 n 个零点和 n 个简单极点，而且 $G(\lambda)$ 的零点是 $G^{-1}(\lambda)$ 的极点，$G^{-1}(\lambda)$ 的零点是 $G(\lambda)$ 的极点。只要把 $\lambda_l, \bar{\lambda}_l$ 分别限制在 λ 复平面上某个迴路的内外，则除有限个简单极点外，$G(\lambda)$ 和 $G^{-1}(\lambda)$ 分别在迴路内外解析。所以 $G(\lambda)$ 和 $G^{-1}(\lambda)$ 构成含零点的 Riemann 问题的解[12]。

投影矩阵法虽然和 Riemann 问题法只是一正一反问题，但却使求解变得十分简单。另外在投影矩阵法中，λ_l 和 $\bar{\lambda}_l$ 并不要求在某迴路的内外。

四、Bäcklund 变换

Bäcklund 变换是用微分方程表示的 n 孤子解和 $(n-1)$ 孤子解之间的关系[7]。由于我们已经得到了它们之间的代数关系，只要对它们求导就可得到 Bäcklund 变换。

由(8)式得到

$$(U_n - U_{n-1})_x = i(\lambda_n - \bar{\lambda}_n)[\sigma_3, P_{nx}], \tag{38}$$

$$(U_n - U_{n-1})_t = i(\lambda_n - \bar{\lambda}_n)[\sigma_3, P_{nt}]. \tag{39}$$

把(11)和(12)式分别代入上式，然后取矩阵的(1,2)元，并利用投影矩阵 P_n 各元素间的关系

$$(P_n)_{11} + (P_n)_{22} = 1, \tag{40}$$

$$(P_n)_{11} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4(P_n)_{12}(P_n)_{21}}\right), \tag{41}$$

$$(P_n)_{22} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - 4(P_n)_{12}(P_n)_{21}}\right), \tag{42}$$

可以得到 CMKdV 方程的 Bäcklund 变换

$$(q_n - q_{n-1})_x = -i\xi_n(q_n - q_{n-1}) + (q_n + q_{n-1})\varepsilon\sqrt{4\eta_n^2 - |q_n - q_{n-1}|^2}, \tag{43}$$

$$\begin{aligned}(q_n - q_{n-1})_t = {} & 2i\xi_n[(q_n - q_{n-1})_{xx} + 2(q_n^2\bar{q}_n - q_{n-1}^2\bar{q}_{n-1})] \\ & - \varepsilon\sqrt{4\eta_n^2 - |q_n - q_{n-1}|^2}\,[(q_n + q_{n-1})_{xx} \\ & + 2(q_n^2\bar{q}_n + q_{n-1}^2\bar{q}_{n-1})] + (q_n - q_{n-1})[(q_n\bar{q}_{nx} - q_{nx}\bar{q}_n) \\ & + (q_{n-1}\bar{q}_{n-1x} - q_{n-1x}\bar{q}_{n-1})] \quad (\varepsilon = \pm 1, \ \lambda_n = \xi_n + i\eta_n).\end{aligned} \tag{44}$$

MKdV 方程的 Bäcklund 变换可由上二式中，令 $\xi_n = 0$ 和 $q_n = \bar{q}_n$ 得到。把它们再积分就得到通常文献中给出的形式[13]，即

$$(\omega_n - \omega_{n-1})_x = 2\eta_n \varepsilon \sin(\omega_n + \omega_{n-1}), \tag{45}$$

$$(\omega_n + \omega_{n-1})_t = -4\eta_n \omega_{n-1xx} \varepsilon \cos(\omega_n + \omega_{n-1}) - (8\eta_n^3 + 4\eta_n \omega_{n-1x}^2)\varepsilon \sin(\omega_n + \omega_{n-1}) - 2\omega_{n-1xxx} - 8\eta_n^2 \omega_{n-1x} - 4\omega_{n-1}^3$$

$$\left(\omega_n = \int_{-\infty}^{x} q_n(x')dx'\right). \tag{46}$$

利用 Bäcklund 变换求解，是利用它推出的一个简单的非线性叠加公式进行的。对于象 CMKdV 方程 q 是复数的情况，是推不出这样一个公式的，所以实际上用 Bäcklund 变换求这类方程解是很困难的。投影矩阵法则不存在这样的问题。

五、Darboux 变换

孤子解之间的关系也可用 Darboux 变换来表示[9]

$$F_n(\lambda) = D(\lambda) F_0(\lambda). \tag{47}$$

但文献中定义的 Darboux 变换矩阵 $D(\lambda)$ 与 $G(\lambda)$ 相差一因子。令

$$D(\lambda) = G(\lambda) \prod_{l=1}^{n} (\lambda - \lambda_l), \tag{48}$$

则 $D(\lambda)$ 就满足通常文献中给出的定义[9]，即

$$\det D(\lambda) = \prod_{l=1}^{n} (\lambda - \lambda_l)(\lambda - \bar{\lambda}_l), \tag{49}$$

$$\det D(\lambda_l) = \det D(\bar{\lambda}_l) = 0. \tag{50}$$

(50) 式表明，当 $\lambda = \lambda_l$ 或 $\bar{\lambda}_l$ 时，$D(\lambda)$ 的二列是线性相关的。

虽然 Darboux 矩阵与 $G(\lambda)$ 只差一因子，但它与 Riemann 问题法间这么简单和直接的关系以前却一直不知道。这是因为在求 $D(\lambda)$ 时，通常是把它按幂级数展开，而不是象 (15) 式那样展开，从这里可以看到用投影矩阵表示的优越性。

六、孤子解与呼吸子解的显式

n 孤子解的显式通常是由 Hirota 法给出的。下面从投影矩阵法推导出 n 孤子解显式。

如果把 $G(\lambda)$ 展成 (15) 式，n 孤子解可写为

$$U_n = U_0 + i \sum_{l=1}^{n} [\sigma_3, R_l]. \tag{51}$$

这是因为

$$G_x(\lambda) = L_n(\lambda) G(\lambda) - G(\lambda) L_0(\lambda). \tag{52}$$

在 (22) 式中令 $\lambda = \bar{\lambda}_m$，把 (32) 和 (33) 式代入，并用

$$\exp[-i(\lambda_m x + 4\bar{\lambda}_m^3 t)\sigma_3]\begin{pmatrix} b_m \\ 1 \end{pmatrix}$$

右乘，得到

$$0 = |m\rangle + \sum_l \frac{1}{\bar{\lambda}_m - \lambda_l} S_l\langle l|m\rangle. \tag{53}$$

式中

$$S_l\langle l| = R_l, \tag{54}$$

$$|m\rangle = \begin{pmatrix} b_m \exp[-2i(\lambda_m x + 4\lambda_m^3 t)] \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

令

$$\bar{\alpha}_m^2 = b_m \exp[-2i(\lambda_m x + 4\lambda_m^3 t)], \tag{56}$$

$$S_l = \begin{pmatrix} S_{l1} \\ S_{l2} \end{pmatrix}, \tag{57}$$

由 (53) 式得到

$$0 = \bar{\alpha}_m^2 + \sum_l \frac{(\alpha_l^2 \bar{\alpha}_m^2 + 1)}{(\bar{\lambda}_m - \lambda_l)} S_l, \tag{58}$$

根据 Cramer 法则，S_{l1} 可以解出

$$iS_{l1} = \frac{1}{\det D} \sum_m \bar{\alpha}_m^2 D(l, m), \tag{59}$$

式中

$$D_{lm} = \frac{\alpha_l^2 \bar{\alpha}_m^2 + 1}{p_l + \bar{p}_m} \quad p_l = i\lambda_l, \tag{60}$$

$D(l, m)$ 为 D_{lm} 的代数余子式。

这样，n 孤子解可表为

$$q_n = 2 \sum_l \sum_m \bar{\alpha}_m^2 D(l, m)/\det D. \tag{61}$$

把 D 分为二矩阵之和

$$D = A + B, \tag{62}$$

$$A_{lm} = \frac{\alpha_l^2 \bar{\alpha}_m^2}{p_l + \bar{p}_m}, \quad B_{lm} = \frac{1}{p_l + \bar{p}_m}, \tag{63}$$

利用等式

$$\det\left[\frac{1}{p_k + \bar{p}_l}\right] = \prod_{k,l} \frac{1}{p_k + \bar{p}_l} \prod_{k<l} (p_k - p_l)(\bar{p}_k - \bar{p}_l), \quad (l, k = 1, 2, \cdots, n), \tag{64}$$

可把 (61) 式的分母和分子展开为

$$\begin{aligned} f_n &\equiv \det D \\ &= \left(\prod_{s,t=1}^{n} \frac{1}{p_t + \bar{p}_s} \prod_{t<s} (p_t - p_s)(\bar{p}_t - \bar{p}_s)\right) \sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant l_1 < l_2 \cdots < l_r \leqslant n \\ 1 \leqslant m_1 < m_2 \cdots < m_r \leqslant n}} \prod_l c_l \prod_m \bar{c}_m^2 \\ &\quad \cdot \prod_{l<l'} (p_l - p_{l'})^2 \prod_{m<m'} (p_m - \bar{p}_{m'})^2 \prod_{l,m} (p_l + \bar{p}_m)^{-2} \end{aligned}$$

$$m, m' \in \{m_1, m_2, \cdots, m_r\},$$
$$l, l' \in \{l_1, l_2, \cdots, l_r\}. \tag{65}$$

$$g_n \equiv \sum_m \sum_l \alpha_m^2 D(l, m)$$
$$= \left(\prod_{s,t=1}^{n} \frac{1}{p_t + \bar{p}_s} \prod_{t<s} (p_s - p_t)(\bar{p}_t - \bar{p}_s)\right) \sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant l_1 < l_2 \cdots < l_{r-1} \leqslant n \\ 1 \leqslant m_1 < m_2 \cdots < m_{r-1} \leqslant n}} \prod_l c_l^2 \prod_m \bar{c}_m^2$$
$$\cdot \prod_{l<l'} (p_l - p_{l'})^2 \prod_{m<m'} (p_m - \bar{p}_{m'})^2 \prod_{l,m} (p_l + \bar{p}_m)^{-2}$$
$$l, l' \in \{l_1, l_2, \cdots, l_{r-1}\},$$
$$m, m' \in \{m_1, m_2, \cdots, m_{r-1}\}, \tag{66}$$

式中

$$c_k^2 = \alpha_k^2 \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq k}}^{n} \frac{(p_k + \bar{p}_t)(p_k + \bar{p}_k)}{(p_k - p_t)}. \tag{67}$$

令

$$p_j = \bar{p}_{n+j},\ e^{\eta_j} = \bar{c}_j^2,\ e^{\eta_{n+j}} = c_j^2 \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$
$$e^{A_{jk}} = \begin{cases} (\bar{p}_j - \bar{p}_k)^2 & \text{当 } j,k = 1,2,\cdots,n \text{ 或 } j,k = n+1,\cdots,2n; \\ (\bar{p}_j + \bar{p}_k)^{-2} & \text{当 } j = 1,2,\cdots,n \text{ 或 } k = n+1,\cdots,2n, \end{cases}$$
$$\mu_j = 1 \text{ 或 } 0,$$
$$D_1(\mu) = \begin{cases} 1 & \sum_{j=1}^{n} \mu_j = \sum_{j=n+1}^{2n} \mu_j; \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$
$$D_2(\mu) = \begin{cases} 1 & \sum_{j=1}^{n} \mu_j = \sum_{j=n+1}^{2n} \mu_j + 1; \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

则 q_n 为

$$q_n = 2\, \frac{\sum_{(\mu)} D_2(\mu) \exp\left\{\sum_{j=1}^{2n} \mu_j \eta_j + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 2n} A_{jk} \mu_j \mu_k\right\}}{\sum_{(\mu)} D_1(\mu) \exp\left\{\sum_{j=1}^{2n} \mu_j \eta_j + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 2n} A_{jk} \mu_j \mu_k\right\}}, \tag{68}$$

式中 $\sum_{(\mu)}$ 是对 $\mu_j = 1$ 或 0 $(j = 1, 2, \cdots, 2n)$ 的各种可能组合求和。

(68)式和由 Hirota 法得到的结果形式一样[14]。对于 MKdV 方程，只要把 $\{\lambda_j\}$ 限制在虚轴上或关于虚轴两两对称，就可得到孤子解或呼吸子解的显式。需要指出的是，Hirota 法并不能直接给出呼吸子解的显式。

七、讨论与结论

上面从投影矩阵法推导出了另外一些求解法的基本公式和结论，并讨论了投影矩阵

法的一些优点. 从推导过程中可以看出，各种求解方法都可以通过投影矩阵 P_n 联系起来. 逆散射法的基本方程组是 P_n 构成的 $G(\lambda)$ 和 $G^{-1}(\lambda)$ 所满足的封闭方程组的一种特殊情况；含零点的 Riemann 问题的解就是 $G(\lambda)$ 和 $G^{-1}(\lambda)$；Darboux 矩阵与 $G(\lambda)$ 仅相差一因子；把 P_n 对 x 和 t 求导，就得到 Bäcklund 变换；把 P_n 用 P_1 展开就得到 n 孤子的 Hirota 形式(显示). 因此，用投影矩阵 P_n 可以对这些方法之间的关系给出一个比较简单、清楚和统一的描述.

目前这种描述还是有局限性的，它只适用于求孤子解和呼吸子解的情况. 另外 Hirota 法可求解的某些方程是否也能和投影矩阵或它的某种推广形式联系起来，还需要进一步探讨.

作者曾与蔡建华教授、黄念宁教授和陈宗蕴副教授进行过有益的讨论，表示衷心感谢.

[1] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**(1967), 1095.
[2] V. B. Zakharov and A. B. Shabat, *Sov. Phys. JETP*, **34**(1972), 62.
[3] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, *Phys. Rev. Lett.*, 30(1973), 1262.
[4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53**(1974), 249.
[5] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Funct. Anal. Appl.* **13**(1979), 166.
[6] V. A. Belinsky and V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP*, **48**(1978), 985.
[7] M. R. Miura (ed.), Bäcklund Transformations, Springer-Verlag, Berlin, (1978).
[8] R. Hirota, *Phys. Rev. Lett.*, **27**(1971), 1192.
[9] C. H. Gu and Z. X. Zhou, *Lett. Math. Phys.*, **13**(1987), 179.
[10] Z. Y. Chen, N. N. Huang and Y. Xiao, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 4355.
[11] 肖奕，物理学报，**38**(1989)，1911.
[12] B. E. 扎哈罗夫，C. B. 马纳科夫，C. П. 诺维科夫，Л. П. 皮达也夫斯基著，彭启才译，孤子理论，科学出版社，北京，(1985)，186 页.
[13] M. Wadati and K. Konno, *Prog. Theor. Phys.*, **19**(1978), 798.
[14] R. Hirota, *J. Math. Phys.*, **14**(1973), 805.

RELATIONS BETWEEN DIFFERENT METHODS FOR SOLVING SOLITON EQUATIONS

XIAO YI

Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074

(Received 13 July 1989)

ABSTRACT

The fundamental equations and results of different methods for solving soliton equations are deduced by using the projection matrix method. A simple and unified discription of the relations between these methods is presented.

PACC: 0340K; 0365; 0200