

论引力波探测器方位与引力波源方位间的关系

郑庆璋 唐孟希 胡恩科

中山大学物理系, 广州, 510275

1989年7月3日收到

本文从计算棒状引力波天线的指向性函数出发, 讨论了引力波源的方位和天线棒方位间的关系, 找到了从符合实验数据求出引力波源方位以及利用单一引力波探测器对连续引力波源的定位方法. 所得的结果也适用于其他形式的一维引力波天线. 一旦引力波探测器的灵敏度达到足以确定引力波强度时, 本文的结果无疑对引力波天文学将是很有意义的.

PACC: 0480; 0430; 9580S; 9590

一、引言

在目前的技术水平上, 引力波探测器还不能把一切非引力波的干扰完全有效地隔离, 探测器的灵敏度也仅达银河系内及其近邻超新星爆发所产生的引力辐射强度的上限. 因此, 为了正确区分探测器接收到的信号的性质, 提高被认为可能是引力波信号的置信度, 符合实验往往是行之有效的办法之一.

早期的符合实验, 仅限于同一实验室或相距较近两地的探测器之间进行. 随着全球性合作的发展, 参加符合的探测器越来越多, 基线越来越长, 实验持续时间也越来越长. 例如在1986年5月至7月进行的广州—斯坦福—马里兰—路易斯安娜—罗马等探测器的符合实验就是一个例子. 但从已发表的文献来看, 目前还没有得到被确认为引力波信号的事件^[1-9].

人类一旦接收到来自宇宙的引力波信号, 引力波探测器就成为人类观测宇宙的一个窗口. 从参加符合实验的天线对引力波各个偏振态的不同响应, 可以研究引力波的偏振性质, 从各天线接收到的信号强度和时间的差别, 可以确定引力波源的方位. 最近, Schutz 等人^[10]比较详细地研究了准自由质量天线的指向性函数 (directivity pattern), 讨论了天线的灵敏度和符合几率等问题. 本文从另一角度考虑, 假定引力波探测器已具有能确定引力波强度的灵敏度, 就引力波探测器方位与引力波源方位之间的关系进行讨论, 着重解决天线棒对引力波源的定位问题, 这对今后有望建立的引力波天文学无疑是很有意义的.

二、棒状引力波天线对任意入射方向引力波的响应

对引力波的探测,实质上是测量引力波场对物体作用的起潮力。在弱场慢变的情况下,引力场对粒子作用的分量的起潮力为⁽¹⁾

$$f^i = c^2 R_{ik0} n^k \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

式中 c 为真空中的光速; R_{ik0} 为引力场的黎曼曲率张量的某些空间分量; n^k 为粒子间相对位矢的第 k 个分量。

若引力波天线为沿地面坐标系 (S 系) 的 x^1 轴放置的韦伯棒, 则对它作用的起潮力主要决定于黎曼曲率张量的 R_{010} 分量。考虑到沿 S 系 (θ, φ) 方向入射的引力波, 设其局部横向零迹 (TT) 坐标系为 S' (图 1), 若引力波的两个偏振态分别用“+” (由 R_{010} 和 R_{020} 决定, 且 $R_{010} = -R_{020}$) 和“ \times ” (由 R_{010} 和 R_{030} 决定, 且 $R_{010} = R_{030}$) 标记; 则

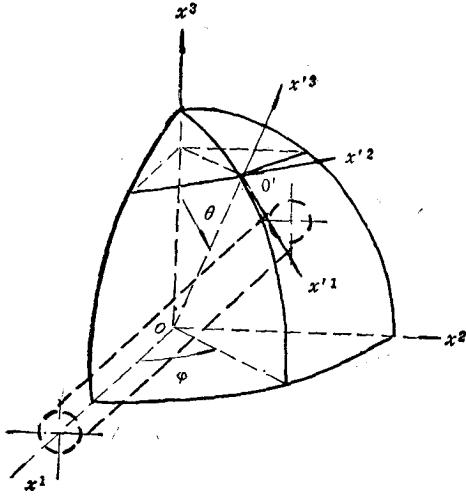


图 1 天线棒与入射波的方向关系图

“+”偏振态对 R_{010} 的贡献为

$$\begin{aligned} R_{010}(+) &= R_{010}^1 \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} + R_{020}^2 \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} \\ &= R_{010}^1 \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} - \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

“ \times ”偏振态对 R_{010} 的贡献为

$$\begin{aligned} R_{010}(\times) &= R_{020}^1 \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} + R_{010}^2 \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} \\ &= R_{020}^1 \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

引力波探测器检测到的信号强度 I 与作用在天线上的起潮力的平方成正比, 可以写成

$$I = k(R_{010})^2, \quad (4)$$

式中 k 为与探测器性能有关的系数。设入射引力波两偏振态强度之比为 α^2 , 即

$$(R_{010}^1)^2 = \alpha^2 (R_{020}^1)^2,$$

则 (4) 式可写成

$$\begin{aligned} I &= k \{ [R_{010}(+)]^2 + [R_{010}(\times)]^2 \} \\ &= \left[\left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} - \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} \right)^2 + \alpha^2 \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} \right)^2 \right] I_{0+}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $I_{0+} = k(R_{010}^1)^2$ 为入射引力波“+”偏振态的强度。

三、棒状天线的指向性函数

引力波的 TT 坐标系 (S' 系) 和天线坐标系 (S 系) 之间的关系, 是一个只与坐标轴转动有关的线性正交变换关系^[12], 即

$$X' = AX$$

或

$$X = A^{-1}X' = \tilde{A}X', \quad (6)$$

式中 X 和 X' 分别为 S 和 S' 系中的位矢; A , A^{-1} 和 \tilde{A} 分别为两坐标系的变换矩阵、它的逆矩阵和转置矩阵。若

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

和

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\text{则有 } \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = a_{ij}, \quad \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

$$\text{于是 (5) 式可以写成 } I = [(a_{11}^2 - a_{21}^2) + (2\alpha a_{11}a_{21})^2] I_{0+} \\ = f(\theta, \varphi, \alpha) I_{0+}, \quad (8)$$

式中

$$f(\theta, \varphi, \alpha) = (a_{11}^2 - a_{21}^2) + (2\alpha a_{11}a_{21})^2 \quad (9)$$

称为天线的指向性函数, 它反映了天线对不同方向入射的引力波的响应程度。

对于图 1 所示的情况, 变换矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (10)$$

于是有指向性函数

$$f(\theta, \varphi, \alpha) = (\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 + 4(\alpha^2 - 1)\cos^2\theta \cdot \cos^2\varphi\sin^2\varphi. \quad (11)$$

当两偏振态是随机独立的, 即两者有相同的强度时, 有

$$\alpha = 1,$$

这时

$$f(\theta, \varphi) = (\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2,$$

与文献[13]中给出的结果一致。

四、棒状天线指向性函数的一般形式

在一般情况下, 可以选用与地球固联的地心坐标系 S'' 做基本参照系. 假定入射引

力波的 TT 系 (S 系) 相对于 S'' 系的方位角为 (θ, φ) , 天线所在处的经纬线在辅助参照系 S'' 中的方位角为 (θ_0, φ_0) , 天线与经线的夹角为 ψ (图 2), 则各坐标系之间的变换关系为:

$$\begin{aligned} X' &= A_1 X'', & X''' &= A_2 X'', \\ X &= A_3 X'', & & \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (13a)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \cos \varphi_0 & \cos \theta_0 \sin \varphi_0 & -\sin \theta_0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ \sin \theta_0 \cos \varphi_0 & \sin \theta_0 \sin \varphi_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix}, \quad (13b)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13c)$$

有

$$X' = AX = A_1 [A_2 (A_3 X)], \quad (14)$$

即

$$A = A_1 A_2 A_3. \quad (15)$$

由此可以算出变换矩阵的矩阵元为

$$a_{11} = \cos \psi [\cos \theta \cos \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0) + \sin \theta \sin \theta_0] + \sin \psi \cos \theta \sin (\varphi - \varphi_0), \quad (16a)$$

$$a_{12} = \cos \psi \sin \theta \sin (\varphi - \varphi_0) - \sin \psi [\cos \theta \cos \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0) + \sin \theta \sin \theta_0], \quad (16b)$$

$$a_{13} = \cos \theta \sin \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0) - \sin \theta \cos \theta_0, \quad (16c)$$

$$a_{21} = -\cos \psi \cos \theta_0 \sin (\varphi - \varphi_0) + \sin \psi \cos (\varphi - \varphi_0), \quad (16d)$$

$$a_{22} = \cos \psi \cos (\varphi - \varphi_0) + \sin \psi \cos \theta_0 \sin (\varphi - \varphi_0), \quad (16e)$$

$$a_{23} = -\sin \theta_0 \sin (\varphi - \varphi_0), \quad (16f)$$

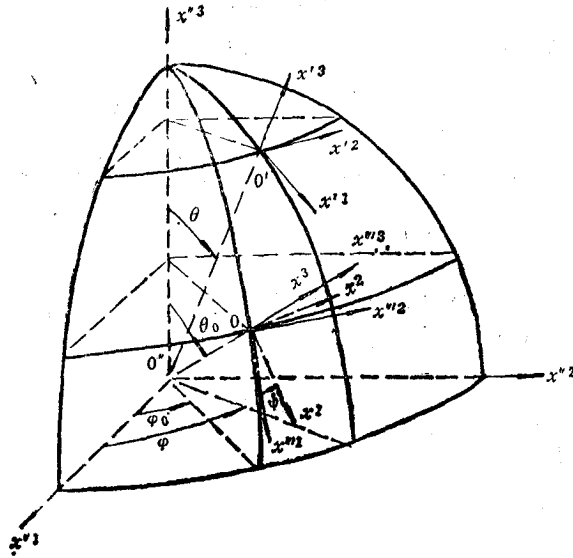


图 2 各坐标系方位角与地心系关系图

$$a_{31} = \cos \phi [\sin \theta \cos \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0) - \cos \theta \sin \theta_0] + \sin \phi \sin \theta \sin (\varphi - \varphi_0), \quad (16g)$$

$$a_{32} = \cos \phi \sin \theta \sin (\varphi - \varphi_0) - \sin \phi [\sin \theta \cos \theta_0 \cdot \cos (\varphi - \varphi_0) - \cos \theta \sin \theta_0], \quad (16h)$$

$$a_{33} = \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0). \quad (16i)$$

把以上结果代入(9)式,即可得一般形式的棒状引力波天线的指向性函数。

方位角 φ 虽然由于固联于地球上的地心坐标系的不断转动而变化,但只要知道记录测量数据的时刻,就不难把它换算为天体上的位置。

五、符合实验与引力波源的定位

假定引力波探测器的灵敏度足够高,以致不但能确定引力波的存在而且还能测得引力波在天线中的信号强度 I , 我们在此前提下讨论引力波源的定位问题。

1) 由指向性函数的表示式(9)和变换系数表示式(16)可知信号强度 I 为 a_{11}, a_{21}, α 和 I_{0+} 的函数,而 a_{11} 和 a_{21} 都是天线位置 (θ_0, φ_0) 和取向 ϕ 以及引力波源方位角 (θ, φ) 的函数,所以

$$I = F(\theta, \varphi, \alpha, I_{0+}, \theta_0, \varphi_0, \phi).$$

若我们在四根不同位置和取向的天线同时测得来自同一引力波源的信号,得到一组关于 θ, φ, α 和 I_{0+} 的方程

$$F(\theta, \varphi, \alpha, I_{0+}, \theta_{0i}, \varphi_{0i}, \phi_i) = I_i,$$

式中 $i = 1, 2, 3, 4$, $(\theta_{0i}, \varphi_{0i}, \phi_i)$ 表示第 i 根天线的位置和取向, I_i 为第 i 根天线测得的信号强度。便可以从方程组中解出引力波源的方位角 (θ, φ) , 引力波两偏振态贡献之比 α 及引力波源的强度 I_{0+} 。当然,若入射引力波两个偏振态是随机独立的,即 $\alpha = 1$, 则用三根天线就可以确定波源的方位角和强度。

若天线的数目大于 4, 可以用最小二乘法确定最佳的 (θ, φ) 值。

此外,由(15)式可见,当天线沿南北方向,即 $\phi = 0$ 放置时,

$$a_{11} = \cos \theta \cos \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0) + \sin \theta \sin \theta_0, \quad (17a)$$

$$a_{21} = -\cos \theta_0 \sin (\varphi - \varphi_0); \quad (17b)$$

而当天线东西放置,即 $\phi = \pi/2$ 时,

$$a_{11} = \cos \theta \sin (\varphi - \varphi_0), \quad (18a)$$

$$a_{21} = \cos (\varphi - \varphi_0). \quad (18b)$$

由此可见,天线沿东西方向放置时,指向性函数(9)式具有比较简单的形式,这对多天线符合确定引力波源方位的计算比较有利。

2) 对于猝发 (burst) 过程的短脉冲引力波源,由于引力波脉冲到地球上两探测器的最大时差 $\Delta t = 2R/c \approx 2 \times 6.4 \times 10^6 / 3 \times 10^8 = 3.4 \times 10^{-2} \text{s}$, 比目前的引力波探测取样时间要小得多。因此,希望通过测量引力波到达探测器的时间差来确定引力波源的位置是毫无意义的。即对短脉冲引力波源的定位还是要有四个或四个以上的符合点,除非取样时间比 10^{-2}s 小得多。

3) 对于连续型的引力波源,原则上可以利用单一天线进行定位。

天体物理学的研究表明,可能产生连续型引力波的天体源有非轴对称的旋转中子星和旋转黑洞,以及密近双星等。而这些天体源在辐射引力波的同时,往往伴随着电磁辐射,对于这类天体源,可以通过电磁探测方法对源定位。但是,由于星际物质对电磁波相当强烈的吸收,用电磁方法对深星际引力波源定位有时是很困难的;而引力波的穿透性极高,用它来定位不存在被吸收的问题。此外,也不排除在宇宙中存在另一类的天体源,它在辐射引力波的同时没有电磁辐射的伴随。比如高速旋转的、不带电荷的非对称中子星或黑洞就是这类天体源的可能形式。在这种情况下,利用引力波对源定位就显得有必要了。

首先考虑天线取向角 ϕ 对引力波的响应。由于引力波是横波,只要天线棒与引力波线垂直,即天线棒落在引力波的波面上,天线的响应便达到极大值,即

$$f(\theta, \varphi) = f_{\max}.$$

为此,只需把天线棒置于引力波的波面与水平面(地球球面的切面)的交线上即可。

引力波的波面方程为 $x'^3 = 0$, 利用(14)式作 $X' \rightarrow X$ 的变换,有

$$x'^3 = a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3 = 0. \quad (19)$$

此外,由于天线棒位于 x^1 轴上,即有 $x^2 = x^3 = 0$, 把这个关系代入上式并利用(16)式的结果,得

$$a_{31} = \cos \phi [\sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - \cos \theta \sin \theta_0] + \sin \phi \sin \theta \sin(\varphi - \varphi_0) = 0. \quad (20)$$

由此可解得天线达到极大响应时,天线棒与地球经线的夹角 ϕ_1 应满足关系

$$\tan \phi_1 = \frac{\cos \theta \sin \theta_0 - \sin \theta \cos \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{\sin \theta \sin(\varphi - \varphi_0)}. \quad (21)$$

当然,要在短时间内调整 ϕ 使天线的响应达到极大而不引人附加的机械噪声是不可能的。幸而实际上不必用人工的方法去迅速改变 ϕ , 利用地球的自转就能达到目的。大家知道,地球以匀角速度 ω 自转,因而观察到的引力波源以相反的角速度 $-\omega$ 绕地心坐标系 S'' 旋转,即 $\varphi = -\omega t + \varphi_0$ 。

为了确定 φ_0 , 可把天线置于东西取向的位置,此时 $\phi = \pi/2$, 由(18)和(9)式可见,当 $\varphi - \varphi_0 = (-\omega t_1 + \varphi_0) - \varphi_0 = 0$ 或 $n\pi$ (n 为整数)时,则不管 θ , α 取何值,恒有 $f(\theta, \varphi) = 1$, 即当 $t_1 = (\varphi_0 - \varphi_0)/\omega$ 时,天线的响应达到极大值,由此可得 $\varphi_0 = \omega t_1 + \varphi_0$ 。于是有

$$\varphi - \varphi_0 = (-\omega t_1 + \varphi_0) - \varphi_0 = \omega(t_1 - t), \quad (22)$$

式中 t_1 为当天线东西取向的情况下,天线达到极大响应的时刻。

在一般的情况下, ϕ 不等于 $\pi/2$ 。对于天线棒的某一取向角 ϕ_2 , 若当 $t = t_2$ 时达到极大值,则由(21)和(22)式得

$$\tan \phi_2 = \frac{\cos \theta \sin \theta_0 - \sin \theta \cos \theta_0 \cos \omega(t_1 - t_2)}{\sin \theta \sin \omega(t_1 - t_2)},$$

由此解得

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta_0}{\tan \phi_2 \sin \omega(t_1 - t_2) + \cos \theta_0 \cos \omega(t_1 - t_2)}. \quad (23)$$

这里 ϕ_2 , θ_0 和 t_1 , t_2 以及 ω 都是已知的, 因而可以求出 θ , 达到波源定位的目的。

现有的连续型引力波源的能流密度要比猝发型源小得多, 在引力波天线灵敏度还不是十分高的情况下, 同步信号积累是一个行之有效的办法。可以在信号积累的过程中同时进行源的定位。

可以把固定在地球表面上的天线在一天内接收到的信号分成若干个时间段。若忽略地球的公转, 可以认为, 对应每天同一宇宙时, 天体源处于同一方位。可以把对应同一宇宙时的时间段的信号进行积累, 把积累后的信号按上述方法去计算源的方位。

六、结 论

在引力波探测器的灵敏度足以确定引力波强度的前提下, 可以利用多根(4根或4根以上)天线的符合实验确定引力波源的方位。由于引力波到达两探测器的最大时差仅为 10^{-2} s, 因而除非引力波探测器的取样时间远比 10^{-2} s 小, 否则这个时差对引力波源的定位就没有意义。目前还没有考虑到引力波的位相差问题, 因为测量引力波的位相远比测量强度困难得多。

用单一根天线棒对引力波源定位原则上是可能的。程序是先把天线棒置于东西取向的位置上, 由其极大响应的时刻 t_1 确定该时刻的 φ , 因而也就确定了任一时刻的经角 φ 。然后使天线棒处于另一取向角 ϕ , 并记下此情况下响应达到极大的时刻 t_2 , 则由(23)式就可确定引力波源的纬角 θ 。当然这种定位方法只对连续型引力波源有效。而且, 用这单一根天线定位的精度是不高的。为了提高定位的精度, 还是采用多根天线作符合实验为好。

最后还应指出, 本文所讨论的天线棒指向性函数其实不但对弹性天线棒(更不用说是否共振型)适用, 而且对任意一维的引力波天线也是适用的。至于涉及二维的迈克耳逊激光干涉仪型引力波探测器, 其中一臂的响应也应和这里讨论的结果相同, 因此本文结果还是具有一定的普遍意义的。

- [1] J. Weber, *Phys. Rev. Lett.*, **22**(1969), 1320.
- [2] J. Weber, *Nuovo Cimento*, **4B**(1971), 1974.
- [3] R. W. P. Drever *et al.*, *Nature*, **246**(1973), 340.
- [4] W. D. Allen *et al.*, *J. Phys.* **A3**(1975), 1720.
- [5] H. Billing *et al.*, *Lett. Nuovo Cimento*, **12**(1975), 111.
- [6] V. B. Braginsky *et al.*, *Phys. Lett.*, **45**(1973), 271.
- [7] D. H. Douglass *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **35**(1975), 480.
- [8] V. Ferrari *et al.*, *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 2471.
- [9] Hu Enke *et al.*, *Chinese Phys. Lett.*, **3**(1986), 529.
- [10] B. F. Schutz *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **224**(1987), 1.
- [11] J. Weber, *General Relativity and Gravitational Waves*, Interscience Publishers Ltd., London, (1961), Eq. (8.15).
- [12] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, (1982), 2nd ed., §4.3; §4.4.
- [13] J. Weber, in *General Relativity and Gravitation, Einstein Commemorative Volume*, ed. by A. Hell, (1980), p. 447.

DISCUSSION ABOUT THE RELATION OF POSITION BETWEEN GRAVITATIONAL WAVES DETECTORS AND THE SOURCE

ZHENG QING-ZHANG TANG MENG-XI HU EN-KE

Departments of Physics, Zhongshan University, Guangzhou, 510275

(Received 3 July 1989)

ABSTRACT

Starting from calculating the directivity pattern of bar-shaped gravitational wave antenna, the relation of position between gravitational waves detectors and source is discussed in this paper. Further, the methods, which is used to determine the position of gravitational wave source, based on the data of coincident experiments, and the position of continuous gravitational wave source, based on the data of single gravitational wave antenna, are obtained. These results are also applicable for other types of one-dimensional gravitational wave detector. Once the sensitivity of the gravitational wave detector reaches the level, enough to determine the intensity of gravitational wave, the results presented in this paper will undoubtedly be useful for gravitational wave astronomy in the future.

PACC: 0480; 0430; 9580S; 9590