第39卷 第5期 物理学报 Vol. 39, No. 5
1990年5月 ACTA PHYSICA SINICA May, 1990

荷电费密子和阿贝耳双子的束缚态波函数及其应用*

张鉴祖[1)] 祁永昌
山西大学物理系，太原，030006

1989年5月29日收到

本文获得荷电费密子与阿贝耳双子束缚系统在双子电荷 $Z_d<Z_d^c$ 和系统总角动量 $j\geqslant |q|+1/2$ 条件下的束缚态波函数和能谱. 计算了该系统在外电磁场中的跃迁矩阵元和确定了相应的选择定则. 发现存在与通常类氢原子不同的、破坏宇称守恒的 $\Delta j=0$ 的电偶极跃迁.

PACC: 1110; 1220D; 1480

一、引　言

强作用和电弱作用统一理论的一个主要预言是磁单极的存在. 若磁单极同时带有磁荷和电荷，则称双子. 大统一理论预言，超重磁单极和双子在早期宇宙中丰富地产生，因而它们可能存留至当今的宇宙中. 双子可能与一个荷电费密子，例如一个电子，形成束缚态，检测的方法之一是观察这个系统的电磁辐射谱.

近年来，对费密子与阿贝耳磁单极[1]或非阿贝耳磁单极[2]与双子的束缚态问题进行了广泛的讨论[3-22]. 本文在文献[9,17,21,22]的基础上，讨论荷电费密子与阿贝耳双子束缚系统. 在双子电荷 $Z_d<Z_d^c$（双子电荷的某一临界值，其量级为 α^{-1}，α 为电磁作用的精细结构常数）和系统总角动量 $j\geqslant |q|+\frac{1}{2}$ 的条件下[9]，求得了系统的束缚态波函数和能谱. 利用所获得的波函数，计算了该系统在外电磁场中的跃迁矩阵元并确定之相应的选择定则. 我们发现，与通常氢原子不同，由于双子的磁荷破坏宇称守恒，此系统存在宇称不守恒的 $\Delta j=0$ 的电偶极跃迁. 这是此系统的最引人注目的特点之一.

在 $\lambda\ll 1$ 和弱束缚能的近似条件下，我们所得的能谱与 Osland 和吴大峻[8]的结果一致. 但是，我们的结果更为普遍，因为它包含 $\lambda=0(1)$ 的量级，并且不限于非相对论束缚能的情形.

---

* 国家自然科学基金资助的课题.
1) 中国高等科学技术中心(世界实验室)理论物理分中心.

二、束缚态波函数与能谱

如所熟知，对于费密子-狄喇克磁单极系统，存在 Lipkin-Weisberger-Peshkin(LWP)困难[23]，这表现在最低角动量 $j=|q|-1/2$ 中费密子径向波函数在零点并不为零，因而系统的哈密顿量在原点无很好定义．为克服此困难，按杨振宁和 Kazama 的方案，可赋予费密子一无限小额外磁矩．在文献[9]中我们指出，对于费密子-阿贝耳双子系统，在另一类角动量态 $j\geqslant|q|+1/2$ 中，当双子电荷超过某一临界值 Z_d^c 后，也存在 LWP 困难．为克服此困难，除杨振宁-Kazama 项$-(\kappa q/2Mr^3)\beta\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{r}$ 外，还需引入 $(\kappa ZZ_de^2/2Mr^3)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}$ 项．这样，系统的哈密顿量为

$$H=\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla-Ze\boldsymbol{A})+\beta M-\lambda/r-(\kappa q/2Mr^3)\beta\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{r}+(\kappa\lambda/2Mr^3)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}, \tag{1}$$

式中最后两项可合并为协变形式$-\frac{\kappa Ze}{2M}(F^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu})$，此处 $F_{\mu\nu}$ 为双子电磁场．$\boldsymbol{A}$ 为双子矢势，相应于重迭区域的数目，需用两个或多个函数来定义[3]．$\lambda=ZZ_de^2$，Z 为费密子电荷数，应取整数；Z_d 为双子电荷数，不一定取整数．对于 $j\geqslant|q|+1/2$ 态，存在 $\boldsymbol{J}^2$，J_z 和H的两类共同本征态[4]

$$\text{类型 A:}\ \psi_{jm}^{(1)}=\frac{1}{r}\begin{bmatrix}h_1(r)\xi_{jm}^{(1)}\\-ih_2(r)\xi_{jm}^{(2)}\end{bmatrix}\quad(j\geqslant|q|+1/2), \tag{2}$$

$$\text{类型 B:}\ \psi_{jm}^{(2)}=\frac{1}{r}\begin{bmatrix}h_3(r)\xi_{jm}^{(2)}\\-ih_4(r)\xi_{jm}^{(1)}\end{bmatrix}\quad(j\geqslant|q|+1/2), \tag{3}$$

式中

$$\xi_{jm}^{(1)}=c\phi_{jm}^{(1)}-s\phi_{jm}^{(2)}, \tag{4}$$

$$\xi_{jm}^{(2)}=s\phi_{jm}^{(1)}+c\phi_{jm}^{(2)}, \tag{5}$$

$$c=q[(2j+1+2q)^{1/2}+(2j+1-2q)^{1/2}]/2|q|(2j+1)^{1/2}, \tag{6}$$

$$s=q[(2j+1+2q)^{1/2}-(2j+1-2q)^{1/2}]/2|q|(2j+1)^{1/2}, \tag{7}$$

$$\phi_{jm}^{(1)}=\begin{bmatrix}\left(\frac{j+m}{2j}\right)^{1/2}Y_{q,j-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\\\left(\frac{j-m}{2j}\right)^{1/2}Y_{q,j-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}\end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\phi_{jm}^{(2)}=\begin{bmatrix}-\left(\frac{j-m+1}{2j+2}\right)^{1/2}Y_{q,j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\\\left(\frac{j+m+1}{2j+2}\right)^{1/2}Y_{q,j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}\end{bmatrix}, \tag{9}$$

式中 $Y_{q,l,m}$ 为磁单极球谐函数，其基本性质见文献 [3,24—26]．

对于 $j\geqslant|q|+1/2$ 和双子电荷 $Z_d<Z_d^c$ 的情形，不存在原点奇异性，故可在 (1) 式中取 $\kappa\to0$，并将 (1) 式化为

$$H=\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla-Ze\boldsymbol{A})+\beta M-\lambda/r. \tag{10}$$

在 (2) 和 (3) 式中，径向波函数 $h_i(r)(i=1,2,3,4)$的定义与文献 [4] 略为不同．

按(2)和(3)式的定义，$h_i(r)$ 所满足的径向方程较易处理。利用文献[4]的引理 I,将(2)和(3)式分别代入(10)式,对类型 A，得

$$(M-E-\lambda/r)h_1(r)+(\partial_r+\mu/r)h_2(r)=0, \tag{11}$$

$$(\partial_r-\mu/r)h_1(r)+(M+E+\lambda/r)h_2(r)=0. \tag{12}$$

对类型 B，得

$$(M-E-\lambda/r)h_3(r)+(\partial_r-\mu/r)h_4(r)=0, \tag{13}$$

$$(\partial_r+\mu/r)h_3(r)+(M+E+\lambda/r)h_4(r)=0, \tag{14}$$

式中 $\mu=[(j+1/2)^2-q^2]^{1/2}>0$，$q=Zeg$，$g$ 为磁单极强度；狄喇克量子化条件为 $eg=N\ (N=0,\pm1,\pm2,\cdots)$[1]。此处的 q 应不为零。

(11)和(12)式可按量子力学的标准方法处理[27]。当 $r\to0$ 时,(11)和(12)式化为

$$(\lambda/r)h_1(r)-(\partial_r+\mu/r)h_2(r)=0, \tag{15}$$

$$(\partial_r-\mu/r)h_1(r)+(\lambda/r)h_2(r)=0. \tag{16}$$

令 $h_1(r)=ar^\nu$，$h_2(r)=br^\nu$，a 和 b 为常数。由 $h_1(r)$ 和 $h_2(r)$ 非零解及 $r\to0$ 时的有限性,得

$$\nu=(\mu^2-\lambda^2)^{1/2}=\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-q^2-(ZZ_de^2)^2\right]^{1/2}>0. \tag{17}$$

令

$$\rho=2(M^2-E^2)^{1/2}r=2pr\quad(p=(M^2-E^2)^{1/2}), \tag{18}$$

$$h_1(\rho)=2p(M+E)^{1/2}e^{-\rho/2}\rho^\nu(Q_1(\rho)+Q_2(\rho)), \tag{19}$$

$$h_2(\rho)=2p(M-E)^{1/2}e^{-\rho/2}\rho^\nu(Q_1(\rho)-Q_2(\rho)), \tag{20}$$

(15)和(16)式化为

$$\rho Q_1'(\rho)+(\nu-\lambda E/p)Q_1(\rho)-(\mu+\lambda M/p)Q_2(\rho)=0, \tag{21}$$

$$\rho Q_2'(\rho)+(\nu-\rho+\lambda E/p)Q_2(\rho)-(\mu-\lambda M/p)Q_1(\rho)=0 \tag{22}$$

或者

$$\rho Q_1''(\rho)+(2\nu+1-\rho)Q_1'(\rho)-(\nu-\lambda E/p)Q_1(\rho)=0, \tag{23}$$

$$\rho Q_2''(\rho)+(2\nu+1-\rho)Q_2'(\rho)-(\nu+1-\lambda E/p)Q_2(\rho)=0. \tag{24}$$

对类型 B，若令

$$h_3(\rho)=2p(M+E)^{1/2}e^{-\rho/2}\rho^\nu(Q_3(\rho)-Q_4(\rho)), \tag{25}$$

$$h_4(\rho)=2p(M-E)^{1/2}e^{-\rho/2}\rho^\nu(Q_3(\rho)+Q_4(\rho)), \tag{26}$$

则 $Q_3(\rho)$ 满足(23)式，$Q_4(\rho)$ 满足(24)式。

(23)和(24)式为标准的合流超几何方程，它在原点邻域有限的解为合流超几何函数 $F(a,b;\rho)$。

$$Q_{1,3}(\rho)=A_{1,3}F(\nu-\lambda E/p,2\nu+1;\rho), \tag{27}$$

$$Q_{2,4}(\rho)=A_{2,4}F(\nu+1-\lambda E/p,2\nu+1;\rho). \tag{28}$$

由(2),(19),(20),(27)和(28)式得径向波函数

$$R_{\substack{1\\2}}(\rho)=2ph_{\substack{1\\2}}(\rho)/\rho=4p^2(M\pm E)^{1/2}e^{-\rho/2}\rho^{\nu-1}[A_1F(\nu-\lambda E/p,2\nu+1;\rho)$$
$$\pm A_2F(\nu+1-\lambda E/p,2\nu+1;\rho)], \tag{29}$$

当 $\rho\to 0$ 时，$F(a,b;\rho)\to 1$，从而由 (21) 和 (22) 式得

$$A_2=[(\nu-\lambda E/p)/(\mu+\lambda M/p)]A_1, \tag{30}$$

对于 A_3 和 A_4，类似地可得

$$A_4=[(\nu-\lambda E/p)/(\mu-\lambda M/p)]A_3. \tag{31}$$

当 $\rho\to\infty$ 时，$F(a,b;\rho)\to e^{\rho}$，$R_i(\rho)$ $(i=1,2)$ 发散．为避免发散，必须设

$$\nu-\lambda E/p=-n\quad(n=0,1,2,\cdots). \tag{32}$$

这时 $F(\nu-\lambda E/p,2\nu+1;\rho)$ 有限．虽然 $n=0$ 时 $F(\nu+1-\lambda E/p,2\nu+1;\rho)$ 发散，但由 (30)，(29) 式仍为有限．将 ν 和 λ 的定义式代入 (32) 式，得[17]

$$\begin{aligned}E^{(\pm)}_{n,q,j}&=\pm M[1+1/(n+\nu)^2/\lambda^2]^{-1/2}\\&=\pm M\left\{1+\left[\frac{ZZ_de^2}{n+[(j+1/2)^2-q^2-(ZZ_de^2)^2]^{1/2}}\right]^2\right\}^{-1/2},\end{aligned} \tag{33}$$

式中 $n=0,1,2,\cdots$；$j\geqslant|q|+1/2$；$q=Zeg\neq 0$；$eg=\pm 1/2,\pm 1,\pm 3/2,\cdots$．值得注意的是，$j$ 除了可取半整数(与类氢原子一样)外，当 q =半整数时，j 还可取整数值．所以 (33) 式包含了与类氢原子不同的新的谱系．如果双子在自然界中存在，(33) 式给出了寻求束缚态条件下的双子的新的可能途径(例如从天文谱的分析)．

当 $\lambda\ll 1$ 时，(33) 式化为

$$(M-E)/M=[\lambda^2/2(n+\mu)^2]\cdot[1+\lambda^2/\mu(n+\mu)], \tag{34}$$

式中 $E=E^{(+)}=-E^{(-)}>0$．

吴大峻和 Osland 对于角动量态 $j\geqslant|q|+1/2$ 和费密子具有杨振宁-Kazama 额外磁矩项条件下求出了双子-费密子束缚能谱和相应的束缚态波函数的近似结果[8]．他们的结果仅在弱束缚条件 $M-E\ll M$ 和小电荷 $\lambda\ll 1$ 下成立．容易验证，在文献 [8] 的最后一篇文章的相应公式中取极限 $\kappa\to 0$，则他们的结果与 (34) 式的第一项相同．显然，我们的结果比文献 [8] 更为普遍和精确．

利用 (30) 和 (32) 式，(29) 式化为

$$\begin{aligned}R^{nqj}_{\substack{1\\2}}(\rho)&=4p^2_{nqj}(M\pm E_{nqj})^{1/2}A^{nqj}_1e^{-\rho/2}\rho^{\nu-1}[F(-n,2\nu+1;\rho)\\&\mp(n/(\mu+(\mu^2+n^2+2n\nu)^{1/2}))F(-(n-1),2\nu+1;\rho)],\end{aligned} \tag{35}$$

对于类型 B，类似地可得

$$\begin{aligned}R^{nqj}_{\substack{3\\4}}(\rho)&=4p^2_{nqj}(M\pm E_{nqj})^{1/2}A^{nqj}_3e^{-\rho/2}\rho^{\nu-1}[F(-n,2\nu+1;\rho)\\&\pm(n/(\mu-(\mu^2+n^2+2n\nu)^{1/2}))F(-(n-1),2\nu+1;\rho)].\end{aligned} \tag{36}$$

因为 $\xi^{(1)}_{jm}$ 和 $\xi^{(2)}_{jm}$ 是归一化的，所以径向函数 $R_i(\rho)$ 满足如下的归一化条件：

$$\int_0^\infty\sum_{i=1(3)}^{2(4)}|R^{nqj}_i(2p_{nqj}r)|^2r^2dr=1.$$

归一化常数为

$$\begin{aligned}A^{nqj}_{\substack{1\\3}}&=(1/2\Gamma(2\nu+1))\{(n!Mp_{nqj}/\Gamma(2\nu+n+1))\\&\times[1+n(2\nu+n)/(\mu\pm(\mu^2+n^2+2\nu n)^{1/2})^2]\}^{-1/2}.\end{aligned} \tag{37}$$

三、在外电磁场中的跃迁矩阵元和选择定则

设外电磁场由四矢势

$$A_\mu(\boldsymbol{x}, t) = A_{0,\mu}\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)] \tag{38}$$

描写，其中 $A_{0\mu}k_\mu = 0$. 取库仑规范，$A_{0\mu} = (A_{0i}, 0)$. 费密子-双子系统与外电磁场相互作用的哈密顿量为

$$H_i = -Ze\alpha_j A_j(\boldsymbol{x}, t). \tag{39}$$

设 H_i 可作微扰处理. 设在费密子-双子束缚系统的波函数显著不为零的范围内 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} \ll 1$，则 $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \approx 1 + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + \cdots$. 为了给出矩阵元计算的一般方法，我们不仅讨论上述展开的第一项，而且处理 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ 项. 取 $\boldsymbol{A}_0$ 沿 x 轴，$\boldsymbol{k}$ 沿 z 轴，则有

$$H'_{N',N} = H'^{(0)}_{N',N} + H'^{(1)}_{N',N}, \tag{40}$$

式中 N 为量子数集合 $(qnjm)$. H' 为从 H_i 中分离出时间因子 $\exp(-i\omega t)$ 后的部分. 在 (40) 式中，对类型 A，

$$\begin{aligned} H'^{(0)}_{N',N} &= -ZeA_0\int d^3\boldsymbol{x}\,\psi^{(1)+}_{N'}\alpha_1\psi^{(1)}_N \\ &= -iZeA_0[\Omega^{(2)qn'j',nj}_{21}(\sigma_1)^{21}_{j'm',jm} - \Omega^{(2)qn'j',nj}_{12}(\sigma_1)^{12}_{j'm',jm}], \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} H'^{(1)}_{N',N} &= -iZeA_0k\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int d^3\boldsymbol{x}\,\psi^{(1)+}_{N'}rY_{010}\alpha_1\psi^{(1)}_N \\ &= ZeA_0k\sqrt{\frac{4\pi}{3}}[\Omega^{(3)qn'j',nj}_{21}(Y_{010}\sigma_1)^{21}_{j'm',jm} \\ &\quad - \Omega^{(3)qn'j',nj}_{12}(Y_{010}\sigma_1)^{12}_{j'm',jm}]. \end{aligned} \tag{42}$$

以上

$$\Omega^{(2)qn'j',nj}_{st} = \int_0^\infty r^2dr\,R^{n'qj'*}_s(2p_{n'qj'}r)R^{nqj}_t(2p_{nqj}r) \quad (s, t = 1,2), \tag{43}$$

$$\Omega^{(3)qn'j',nj}_{st} = \int_0^\infty r^3dr\,R^{n'qj'*}_s(2p_{n'qj'}r)R^{nqj}_t(2p_{nqj}r) \quad (s, t = 1,2), \tag{44}$$

$$(\sigma_1)^{st}_{j'm'jm} = \int d\Omega\,\xi^{(s)+}_{j'm'}\sigma_1\xi^{(t)}_{jm} \quad (s,t = 1,2), \tag{45}$$

$$(Y_{010}\sigma_1)^{st}_{j'm'jm} = \int d\Omega\,\xi^{(s)+}_{j'm'}Y_{010}\sigma_1\xi^{(t)}_{jm} \quad (s,t = 1,2). \tag{46}$$

利用 (35) 式，注意到当 n 取零或正整数时

$$F(-n, b; \rho) = \sum_{l=0}^{n} C^n_{bl}\rho^l \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{47}$$

式中 $C^n_{bl} = [(-1)^l n(n-1)\cdots(n-l+1)]/[l!\,b(b+1)\cdots(b+l-1)]$,

$$C^n_{b0} \equiv 1, \quad C^0_{b0} \equiv 1, \tag{48}$$

可求得 (43) 式的具体表达式为

$$\begin{aligned} \Omega^{(2)qn'j',nj}_{st} &= G^{(1)}_{n'qj'(\mp)}G^{(1)}_{nqj(\pm)}2^{\nu+\nu'-2}p^{\nu'-1}_{n'qj'}p^{\nu-1}_{nqj} \\ &\cdot\Big[\sum_{l=0}^{n}\sum_{l'=0}^{n'} C^n_{2\nu+1,l}C^{n'}_{2\nu'+1,l'} \pm K^{(+)}_{n'j'}\sum_{l=0}^{n}\sum_{l'=0}^{n'-1} C^n_{2\nu+1,l}C^{n'-1}_{2\nu'+1,l'} \end{aligned}$$

$$\mp K_{sj}^{(+)} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{l'=0}^{n'} C_{2\nu+1,l}^{n-1} C_{2\nu'+1,l'}^{n'} \mp K_{nj}^{(+)} K_{n'j'}^{(+)}$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{l'=0}^{n'-1} C_{2\nu+1,l}^{n-1} C_{2\nu'+1,l'}^{n'-1} \Big] I_{ll'}^{\nu\nu'}, \tag{49}$$

式中

$$G_{nqj(\pm)}^{(1)} = 4p_{nqj}^2 (M \pm E_{nqj})^{1/2} A_1^{nqj}, \quad K_{nj}^{(+)} = n/[\mu + (\mu^2 + n^2 + 2n\nu)^{1/2}],$$

$$I_{ll'}^{\nu\nu'} = \int_0^\infty dr e^{-(p_{nqj}+p_{n'qj'})r} r^{\nu+\nu'+l+l'}$$

$$= (p_{nqj} + p_{n'qj'})^{-(\nu+\nu'+l+l'+1)} \Gamma(\nu + \nu' + l + l' + 1).$$

类似地可计算 $Q_{st}^{(3)qn'j',nj}$。

角度积分 (45), (46) 式的结果较冗长. 将 (45) 式的计算结果列在附录中. 从计算结果可以看出 $H_{N',N}^{\prime(0)}$ 的选择定则为

$$\Delta j = 0, \pm 1; \quad \Delta m = \pm 1. \tag{50}$$

在一般坐标系中,则为 $\Delta j = 0, \pm 1$; $\Delta m = 0, \pm 1$ (电偶极跃迁).

$H_{N',N}^{\prime(1)}$ 的选择定则为

$$\Delta j = 0, \pm 1, \pm 2; \quad \Delta m = \pm 1. \tag{51}$$

在一般坐标系中则为 $\Delta j = 0, \pm 1, \pm 2$; $\Delta m = 0, \pm 1, \pm 2$.

对于类型 B, 有类似的结果.

以上最显著的特点是,对于费密子-双子系统, 空间宇称被双子的磁荷所破坏. 这导致跃迁选择定则的修改. 特别地, 在 (50) 式中出现了破坏宇称守恒的 $\Delta j = 0$ (总角动量无变化) 的偶极跃迁. 此系统的宇称破坏的另一效应表现在系统具有非零的电偶极矩 $\langle eZ \rangle_{qnjm,njm}$[28].

本文还得到山西省自然科学基金的资助.

作者之一张鉴祖对他在访问 CERN 理论部和 BNL 理论部期间受到的款待和财政支持表示衷心感谢. 他还对 John Ellis 教授, Paul H. Framton 教授和 Tai Tsun Wu (吴大峻) 教授的有益讨论表示感谢.

附 录

$(\sigma_1)_{j'm',jm}^{qq}$ 的计算结果

利用磁单极球谐函数的正交归一关系[3]

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{q,L',M'}^*(\theta,\varphi) Y_{q,L,M}(\theta,\varphi) = \delta_{LL'}\delta_{MM'}, \tag{A.1}$$

由 (4)--(9),(45) 式得

$$(\sigma_1)_{j'm'jm}^{qq} = \frac{q}{2j(j+1)} [(j+m+1)(j-m)]^{1/2}, \ (m = -j, \cdots, j-1)$$

$$当\ j' = j, \ m' = m+1; \tag{A.2}$$

$$(\sigma_1)_{j'm'jm}^{qq} = \frac{q}{2j(j+1)} [(j-m+1)(j+m)]^{1/2}, \ (m = -(j-1), \cdots, j)$$

$$当\ j' = j, \ m' = m-1; \tag{A.3}$$

$$(\sigma_1)^{st}_{j'm'jm} = \pm \frac{[(j+m+1)(j+m+2)]^{1/2}}{8(j+1)[(2j+1)(2j+3)]^{1/2}}[(2j+3+2q)^{1/2} \pm (2j+3-2q)^{1/2}]$$
$$\cdot [(2j+1+2q)^{1/2} \pm (2j+1-2q)^{1/2}], \ (m = -(j+1), \cdots, j)$$
$$当\ j' = j+1,\ m' = m+1; \tag{A.4}$$

$$(\sigma_1)^{st}_{j'm'jm} = \mp \frac{[(j-m+2)(j-m+1)]^{1/2}}{g(j+1)[(2j+1)(2j+3)]^{1/2}}[(2j+3+2q)^{1/2} \pm (2j+3-2q)^{1/2}]$$
$$\cdot [(2j+1+2q)^{1/2} \pm (2j+1-2q)^{1/2}] \quad m = -j, \cdots, j+1,$$
$$当\ j' = j+1,\ m' = m-1; \tag{A.5}$$

$$(\sigma_1)^{st}_{j'm'jm} = \pm \frac{[(j-m+1)(j-m)]^{1/2}}{gj[(2j-1)(2j+1)]^{1/2}}[(2j \pm 1+2q)^{1/2} \mp (2j \pm 1-2q)^{1/2}]$$
$$\cdot [(2j \mp 1+2q)^{1/2} \mp (2j \mp 1-2q)^{1/2}] \quad m = -j, \cdots, j-1$$
$$当\ j' = j-1,\ m' = m+1; \tag{A.6}$$

$$(\sigma_1)^{st}_{j'm'jm} = \mp \frac{[(j+m-1)(j+m)]^{1/2}}{8j[(2j-1)(2j+1)]^{1/2}}[(2j \pm 1+2q)^{1/2} \mp (2j \pm 1-2q)^{1/2}]$$
$$\cdot [(2j \mp 1+2q)^{1/2} \mp (2j \mp 1-2q)^{1/2}] \quad m = -(j-1), \cdots, j$$
$$当\ j' = j-1,\ m' = m-1; \tag{A.7}$$

$$(\sigma_1)^{st}_{j'm'jm} = 0 \quad j', m'\ 取其它值时, \tag{A.8}$$

当 $st = 12(21)$ 时取上面(下面)的符号.

类似地，$(Y_{010}\sigma_1)^{st}_{j'm'jm}$ 也计算出了具体结果，这里不再赘述.

[1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London, Series A*, 133(1931), 60; *Phys. Rev.*, 74(1948), 817.

[2] G. 'tHooft, *Nucl. Phys.*, **B79**(1974), 276; A. M. Polyakov, *Pis'ma ZETF*, 20(1974), 430; *JETP Lett.*, 20 (1974), 194.

[3] T. T. Wu and C. N. Yang, *Nucl. Phys.*, **B107**(1976), 365.

[4] Y. Kazama, C. N. Yang and A. S. Goldhaber, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 2287.

[5] Y. Kazama and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 2300.

[6] C. N. Yang, Proc. of the Monopole Meeting, Trieste, Italy (Dec. 1981), edited by N. S. Craigie, P. Goddard and W. Nahm, World Scientific, Singapore, (1982), p. 237.

[7] A. S. Goldhaber, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 1815; Y. Kazama, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 3078.

[8] P .Osland and T. T. Wu, *Nucl. Phys.*, **B247**(1984), 421, 450; *Ibid.*, **B256**(1985), 13, 32, 4491; *ibid.*, **B261**(1985), 687.

[9] Li Xin-zhou, Wang Ke-lin and Zhang Jian-zu, *Phys. Lett.*, **148B**(1984), 89.

[10] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 3398; R. Jackiw and J. R. Schrieffer, *Nucl. Phys.*, **B190**[FS3](1981), 253; J. Goldstone and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, 47(1981), 988.

[11] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.*, 36(1976), 1122; P. Hasenfratz and G. 'tHooft, *Phys. Rev. Lett.*, 36(1976), 1119; A. Goldhaber, *Phys. Rev. Lett.*, 36(1976), 1112.

[12] J. Preskill, *Phys. Rev. Lett.*, 43(1979), 1365.

[13] C. Callan, *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 2141; *ibid.*, 26(1982), 2058; *Nucl. Phys.*, **B212**(1983), 391; V. Rubakov, *Pis'ma ZETF*, 33(1981), 658; *Nucl. Phys.*, **B203**(1982), 311; F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, 48(1982), 1144.

[14] Li Xin-zhou, Wang ke-lin and Zhang Jian-zu, *Nuovo Cimento*, **A75**(1983), 87; *ibid.*, 80(1983), 311.

[15] Li Xin-zhou, Wang ke-lin and Zhang Jian-zu, *Phys. Lett.*, **140B**(1984), 209.

[16] 汪克林、张鉴祖，高能物理与核物理，**9**(1985)，161.

[17] Li Xin-zhou and Zhang Jian-zu, *Phys. Rev.*, **D33**(1986), 562.

[18] Li Xin-zhou, Yu Feng and Zhang Jian-zu, *Phys. Rev.*, **D34**(1986), 1124.

[19] Qi Yong-chang, *Phys. Lett.*, **B176**(1986), 115.

[20] 祁永昌，高能物理与核物理，**10**(1986)，545.

[21] Zhang Jian-zu and Qi Yong-chang, to be published in *J. Math. Phys.*

[22] P. H. Frampton, Zhang Jian-zu and Qi Yong-chang, *Phys. Rev.* **D40**(1989), 3533.

[23] H. J. Lipkin, W. I. Weisberger and M. Peshkin, *Ann. Phys.* (*N. Y.*), 53(1969), 203.

[24] T. T. Wu and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 1018.

[25] T. Dray, *J. Math. Phys.*, 26(1985), 1030.

[26] T. Dray, *J. Math. Phys.*, **27**(1986), 781.
[27] V. B. Beresteskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevski, Relativistic Quantum Theory, Part 1, Pergamon Press, New York, (1971).
[28] Zhang Jian-zu, to be published in *J. Phys. G.*

BOUND STATE WAVE FUNCTIONS OF CHARGED FERMION AND ABELIAN DYON AND THEIR APPLICATION

ZHANG JIAN-ZU QI YONG-CHANG
Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan, 030006
(Received 29 May 1989)

ABSTRACT

The bound state wave functions and energy levels of the system of charged fermion and abelian dyon are obtained for the dyon charge $Z_d < Z_d^c$ and the total angular momentum $j \geqslant |q| + 1/2$. The transition matrix elements of this system in an external electro-magnetic field, are calculated, and corresponding selection rules are obtained. In particular, it is found that the electric dipole transition $\Delta j = 0$ exists, which is different from hydrogen-like atom and violates the parity conservation.

PACC: 1110; 1220D; 1480