

一维晶化束的非线性动力学 (I)*

邵明珠

重庆交通学院, 重庆, 630073; 西南师范大学, 重庆, 630715

I. HOFMANN

GSI, 5100 Darmstadt, FRG

罗诗裕

重庆交通学院, 重庆, 630073; 西南师范大学, 重庆, 630715

1989年8月28日收到

本文导出了一维库仑链的相干振动方程——Duffing 方程, 并对一些简单模式进行了讨论。用多重尺度法分析了系统的近似解, 用经典方法讨论了它的稳定性, 导出了系统的临界磁场公差和某些热力学量, 为重离子储存环和冷却器的设计提供了理论依据。

PACC: 2920

一、引 言

本世纪初, 人们就发现了晶体的规则性^[1], 接着人们又用群论和X射线衍射方法对它进行了详细的理论研究和实验研究。30年代初, Wigner 首次用量子力学方法研究了库仑晶体, 发现了这种晶体的 bcc 对称性^[2], 后来, 这种晶体又称为 Wigner 晶体。随着计算机技术的发展, 60年代中期, 人们开始对无限单分量等离子体 (OCP) 发生兴趣^[3]。1980年, 人们指出当耦合参数 $\Gamma \geq 170$ 时, 无限 OCP 系统将转变为 bcc 态^[4]。80年代初, 人们开始对约束的 OCP 系统进行研究, 成功地把离子约束在三维空间的局部区域 (陷阱俘获)。1984年, 人们把 Be^+ 离子约束在 Penning 陷阱中, 测得耦合参数 $\Gamma = 10^{[5]}$; 同时, 对储存环中离子束冷却 (二维约束的 OCP) 进行研究^[6]。1986年, 人们用分子动力学方法 (MD) 对这种束流进行了数值计算, 发现了系统的结构相变: 一维链, 锯齿形结构, 螺旋管结构以及多重螺旋管结构等^[7]。与此同时, 人们还指出, 重离子冷却同样可以出现有序现象^[8], 于是人们进一步对储存环的束流晶化发生兴趣, 相继提出了各种冷却方案^[9,10]和诊断技术^[11-14]。1988年在联邦德国召开了第一次国际会议, 把这一研究推向新的阶段^[15]。

但是, 束流晶化尚需实验证实。第一次成功地冷却实验是苏联科学家 1980 年完成的^[6]。他们测量了冷却过程中束流的发射度和能散, 同时还测量了这两个量与束流强度的关系, 结果他们认为束流温度已达到了 1 K, 而且发现他们的结果同当时的内束散射理

* 国家自然科学基金资助的课题。

论矛盾,于是提出了有序概念并进行了初步解释. 1984年,他们利用有序概念成功地阐明了几年前的实验结果^[16,17]. 1986年,人们利用束流晶化概念再次解释了实验现象^[7]. 目前,有几个国家都拥有这样的实验装置:带冷却器的储存环. 文献[18]详细介绍了束流晶化的概念,现状和未来.

束流晶化的研究将为固体物理、等离子体物理、加速器物理和天体物理等学科开辟一个全新的领域. 尽管目前人们对它的应用前景还不十分清楚,但是,它在基础研究方面的潜在意义却是十分引人注目的. 人们还预言了它的某些可能应用. 首先,由于这种晶体以接近光的速度运动,多普勒效应将被抑制,由此而产生的多普勒展宽不再存在,因此,这种晶体可在高分辨谱学中有着重要应用. 又因高速运动的晶体产生的光是相干的,而频率又可在很大范围内连续可调,可望在相干光学领域中找到重要应用. 另外,由于晶化束的流强大,品质好,它将为高能物理,重离子物理和重离子聚变(HIF)等基础研究和应用研究提供重要手段.

我们研究了重离子储存环中一维晶化束的非线性动力学问题,并以联邦德国重离子研究中心(GSI)的储存环(ESR)为例进行研究,导出了动力学允许的若干临界参数. 全部工作用三篇文章进行介绍.

本文讨论了纯的一维库仑链. 引入磁场公差和常数冷却力之后,系统的横向相干振动方程化为典型的 Duffing 方程. 用多重尺度法讨论了系统的近似解和它的稳定性,导出了动力学允许的临界磁场公差为 8.5×10^{-3} . 为储存环和冷却器的设计提供了理论依据.

另两文见文献[26, 27].

二、运动方程

1. 理想场情况下离子的相干运动方程

在人们认真研究储存环的有序现象时,对一维库仑链给予了极大的注意. 当储存环中的离子数比较低(例如,对于 GSI 的实验储存环 ESR 大约为 10^6 数量级)时,晶化束退化为库仑链,相邻离子之间的距离大约为 10^{-5}m . 假设离子只有横向位移,而相邻离子之间的距离是严格相等的. 选择离子的平衡轨道作为自然坐标, x 是离开平衡轨道的横向距离,第 j 个离子和第 i 个离子之间的距离为 $x_j - x_i$, 则作用在第 i 个离子上总的库仑力为(在运动坐标系中)

$$E_i = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{1}{|x_j - x_i|^2}, \quad (1)$$

E_i 在 x 方向上的投影 E_{ix} 由公式

$$E_{ix} = E_i \sin \varphi = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{1}{|x_j - x_i|^2} \sin \varphi \quad (2)$$

给出. 式中

$$\sin \varphi = \frac{x_i - x_j}{a_1}, \quad (3)$$

$$a_1 = \sqrt{(kl)^2 + (x_i - x_j)^2}, \quad (4)$$

$$k = j - i,$$

l 是相邻离子间的距离, 如图 1 所示.

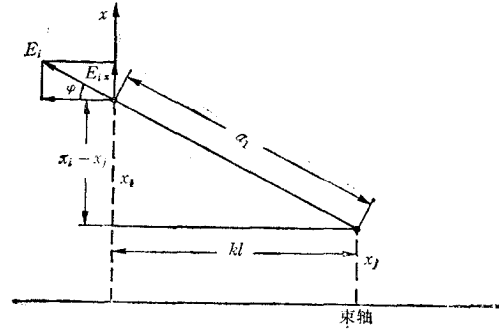


图 1 离子相互作用示意图

作用在第 i 个离子上的聚焦力是线性的, 且可表示为 $-\kappa x_i$, 根据牛顿第二定律, 第 i 个离子的运动方程可表示为(在实验室坐标系中)

$$m\gamma\ddot{x}_i = -\kappa x_i + \frac{z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \sum_{j \neq i} \frac{x_i - x_j}{\{(kl)^2 + (x_i - x_j)^2\}^{3/2}}, \quad (5)$$

式中 m 是离子质量, ze 是离子电荷, κ 是磁场的聚焦强度, γ 是相对论因数, 等式右端第二项中的 γ^2 是坐标转换因数.

由于强的库仑相互作用, 单离子激发不再存在, 感兴趣的是一维库仑链的相干模式. 假设在这个系统中有如下模式的相干运动存在^[14]:

$$x_i = a \sin(n\theta_i - \omega t), \quad (6)$$

式中 θ 是围绕储存环的方位角, n 是相干模式数, $\theta_i = 2\pi i/N$, N 是储存环中离子的总数. 只考虑一些特殊的、有意义的情形, 例如, 只考查振幅相同、相位不同的情形^[14].

$$x_j = x_{i+k} = a \sin(n\theta_{i+k} - \omega t), \quad (7)$$

式中 $\theta_j = \theta_{i+k} = 2\pi(i+k)/N$. 把方程(6)和(7)代到(5)式中, 略去脚标, 并略去四次以上的高阶项, 可得横向相干振动方程

$$m\gamma\ddot{x} = -\kappa x + \frac{z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 l^3} \left\{ \sum_{k \neq 0} \frac{1 - \cos \Delta k}{|k|^3} - \frac{9}{2} \frac{a^2}{l^2} \sum_{k \neq 0} \frac{(1 - \cos \Delta k) \sin^2 \Delta k}{|k|^5} \right\} x - \frac{3z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0\gamma^2 l^5} \left\{ \sum_{k \neq 0} \frac{(1 - \cos \Delta k)^3}{|k|^5} - \frac{3(1 - \cos \Delta k) \sin^2 \Delta k}{|k|^5} \right\} x^3, \quad (8)$$

式中

$$\Delta = 2\pi n/N. \quad (9)$$

注意到 k 必须是整数, (8)式中的 $\cos \Delta k$ 和 $\sin \Delta k$ 只取下列简单值:

$$\cos \Delta k = \begin{cases} -1 & k = p(2m+1); \\ \cos \frac{\pi}{p} & k = p\left(m + \frac{1}{p}\right); \\ 1 & k = 2pm, \end{cases} \quad (10)$$

$$\sin \Delta k = \begin{cases} 0 & k = p(2m+1); \\ \sin \frac{\pi}{p} & k = p\left(m + \frac{1}{p}\right); \\ 0 & k = 2pm, \end{cases} \quad (11)$$

式中 m 和 p 是任意整数. 将方程(10)和(11)代入(8)式可得

$$m\gamma \ddot{x} = -\kappa x + A_1 \left(S_1 - \frac{9a^2}{2l^2} S_3 \right) x - \frac{3A_1}{2l^2} (S_2 - 3S_3) x^3, \quad (12)$$

式中

$$\kappa = m\gamma Q_0^2 Q^2, \quad A_1 = \frac{z^2 e^2}{4\pi \epsilon_0 \gamma^2 l^3}. \quad (13)$$

在零级近似下, 方程(12)中的 a 由初值确定, 而

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k \neq 0} \frac{1 - \cos \Delta k}{|k|^3} = \frac{4}{p^3} \lambda(3) - 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right) \xi(3), \\ S_2 &= \sum_{k \neq 0} \frac{(1 - \cos \Delta k)^2}{|k|^5} = \frac{16}{p^5} \lambda(5) + 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right)^2 \xi(5), \\ S_3 &= \sum_{k \neq 0} \frac{(1 - \cos \Delta k) \sin^2 \Delta k}{|k|^5} = 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right) \sin^2 \frac{\pi}{p} \cdot \xi(5), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\xi(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(mp+1)^n}, \quad \lambda(n) = (1 - 2^{-n})\zeta(n), \quad \zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \quad (15)$$

Q_0 是自由振动数, Q 是离子回旋频率, 而 $\zeta(n)$ 是辐角为 n 的 Riemann zeta 函数^[19].

令

$$x = lX, \quad (16)$$

则方程(12)可化为

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X + \alpha X^3 = 0, \quad (17)$$

式中 $\dot{X} = dX/dt$, 而

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{m\gamma} \left\{ \kappa - A_1 \left(S_1 - \frac{9a^2}{2l^2} S_3 \right) \right\}, \\ \alpha &= \frac{3A_1 l}{2m\gamma} (S_2 - 3S_3). \end{aligned} \quad (18)$$

到此为止, 考虑的是理想状态下, 一维库仑链的相干振动方程. 事实上, 由于任何一种因素, 例如磁场公差, 束流冷却效应和电子屏蔽效应等都将使运动方程变得更加复杂. 下面对非完整磁场和常数冷却力情况进行讨论.

2. 非完整磁场情况下的受迫振动

考虑具有 p 次谐波的场公差对离子运动的影响. 这种情况下, 离子运动方程可表示为

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X + \alpha X^3 = K \cos Q_p t, \quad (19)$$

式中

$$K = Q^2 \gamma_p, \quad Q_p = p\omega_0, \quad \gamma_p = \Delta b_p / B_0, \quad (20)$$

Ω_p 是扰动场的 p 次谐波频率, Δb_p 是 p 次谐波扰动场的振幅, B_0 是平衡轨道上的磁场强度.

3. 具有常数冷却力的衰减振动

在冷却过程中, 离子的相空间体积越来越小, 系统是非保守的. 把冷却力看作摩擦力, 于是在运动方程中将出现耗散项. 由于冷却器中离子被电子包围, 假设离子和电子之间的相互作用仅仅是库仑碰撞, 由于这种碰撞离子和电子之间不断交换动量和能量, 结果可以用单位长度上的碰撞能量损失或摩擦力来描述. 在实验室坐标系中, 这种摩擦力可表示为^[20]

$$F = -2\mu m \gamma \frac{dx}{dt}, \quad (21)$$

式中

$$\mu = \frac{2\pi\eta \mathcal{L} r_e r_p j z^2}{e \gamma^2 A \beta} \left(\frac{c}{v^*} \right)^2 = \mu_0 \eta, \quad (22)$$

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}, \quad r_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_p c^2}, \quad j = c n_e \beta c,$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \Delta\theta/\pi,$$

$$\mathcal{L} \approx \ln \left(\frac{\lambda_D \left(\frac{v^*}{c} \right)^2}{2z r_e} \right), \quad (23)$$

r_e 是经典电子半径, r_p 是经典质子半径, m_e 是电子质量, m_p 是质子质量, n_e 是电子密度, j 是电子束流密度, v^* 是离子和电子之间的相对热速度, λ_D 是 Debye 屏蔽长度, A 是离子的质量数, η 是冷却器长度与储存环周长之比. 将(21)式代入(12)式可得

$$\ddot{X} + 2\mu \dot{X} + \omega_0^2 X + \alpha X^3 = 0. \quad (24)$$

同时考虑非完整磁场和束流冷却的影响, 由(19)和(24)式可得离子运动方程

$$\ddot{X} + 2\mu \dot{X} + \omega_0^2 X + \alpha X^3 = K \cos \Omega_p t. \quad (25)$$

方程(25)是熟知的 Duffing 方程.

4. 几种特殊的相干模式

1) $n = N/2$ 模式

$n = N/2$ 模式对应于(10)和(11)式中的 $p = 1$, 一个相干振动波长内包含 2 个离子. 由(10),(11)和(14)式可知 S_n 只取下列特殊值:

$$S_1 = 4\lambda(3), \quad S_2 = 16\lambda(5), \quad S_3 = 0. \quad (26)$$

则方程(25)中的系数

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{m\gamma} (\kappa - 4A_1\lambda(3)), \\ \alpha &= \frac{24A_1l}{m\gamma} \lambda(5). \end{aligned} \quad (27)$$

2) $n = N/4$ 模式

这一模式对应于(10)和(11)式中的 $p = 2$, 一个相干振动波长内包含 4 个离子. 由(10),(11)和(14)式可知 S_n 只取下列简单值:

$$S_1 = \frac{1}{2} \lambda(3) + 2\xi(3), S_2 = \frac{1}{2} \lambda(5) + 2\xi(5), S_3 = 2\xi(5). \quad (28)$$

则方程(25)中的系数

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{m\gamma} \left\{ \kappa - A_1 \left[\frac{1}{2} \lambda(3) + 2\xi(3) - \frac{9a^2}{l^2} \xi(5) \right] \right\}, \\ \alpha &= \frac{3A_1 l}{2m\gamma} \left\{ \frac{1}{2} \lambda(5) - 4\xi(5) \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

三、动力学分析

讨论下面两种情况. 首先分析方程(25)的主共振, 然后再分析它的子谐共振.

1. 主共振, $\Omega_p \approx \omega_0$

如果方程(25)中的 $2\mu\dot{X}$, αX^3 和 $K \cos \Omega_p t$ 项的大小是 $O(\epsilon)$ 数量级, 其他项是 $O(1)$ 数量级, 则方程(25)形式上可改写为

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = -2\epsilon\mu\dot{X} - \epsilon\alpha X^3 + \epsilon K \cos \Omega_p t \quad (30)$$

(只须在结果中令 $\epsilon = 1$ 即可). 利用多重尺度法进行求解. 把解按不同的时间尺度展开^[21]

$$X(T, \epsilon) = X_0(T_0, T_1) + \epsilon X_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (31)$$

式中 $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$. 因为只涉及共振线附近的离子运动行为, 引入简谐因数 σ

$$\Omega_p = \omega_0 + \epsilon\sigma, \quad (32)$$

式中 $\sigma = O(1)$, 而

$$\Omega_p t = \omega_0 T_0 + \sigma T_1, \quad (33)$$

将(31)和(33)式代入(25)式中, 令 ϵ^0 和 ϵ^1 的系数分别相等, 可得

$$\begin{aligned} D_0^2 X_0 + \omega_0^2 X_0 &= 0, \\ D_0^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 &= -2D_0 D_1 X_0 - 2\mu D_0 X_0 - \alpha X_0^3 + K \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1), \end{aligned} \quad (34)$$

式中 $D_n = \partial/\partial T_n$, 解方程(34)可得方程(25)的一级近似解

$$X = a \cos(\omega_0 t + \sigma T_1 - \gamma) + O(a), \quad (35)$$

式中 a 和 γ 由方程

$$\begin{aligned} a' &= \mu a + \frac{1}{2} \frac{K}{\omega_0} \sin \gamma, \\ a\gamma' &= \sigma a - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 + \frac{1}{2} \frac{K}{\omega_0} \cos \gamma \end{aligned} \quad (36)$$

给出; 令 $a' = \gamma' = 0$ 可讨论系数的静态行为. 当 $a' = \gamma' = 0$ 时, 方程(36)化为

$$\mu a = \frac{1}{2} \frac{K}{\omega_0} \sin \gamma,$$

$$\sigma a - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 = -\frac{1}{2} \frac{K}{\omega_0} \cos \gamma. \quad (37)$$

于是静态解可表示为

$$X = a \cos(\Omega_p t - \gamma) + O(\epsilon), \quad (38)$$

式中 a 和 γ 由方程(37)给出. 由方程(37)可得系统的频率响应曲线

$$\sigma = \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^2 \pm \left(\frac{K^2}{4\omega_0^2 a^2} - \mu^2 \right)^{1/2}, \quad (39)$$

如图 2 所示.

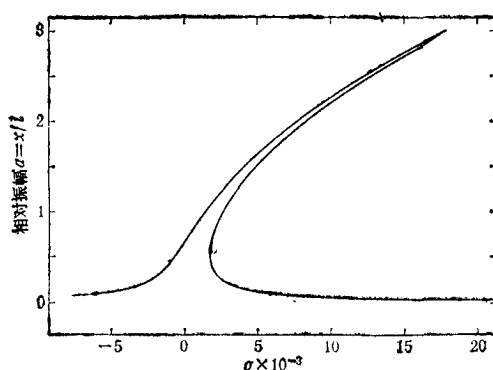


图 2 频率响应曲线 $\mu = 0.025 \times 10^3$

对于 GSI 的实验储存环, 选择如下一组参数: U^{92+} , $E = 500 \text{ MeV/A}$, $Q_0 = 2.3$, 环的周长 100 m , $\eta = 1/50$, $n_e = 10^{15} \text{ m}^{-3}$, $v^*/c = 10^{-3}$. 从这些参数可以导出相邻离子间的临界距离 $l_0 = 1.75 \times 10^{-3} \text{ m}$, 选择 $l = 1.1l_0$.

由图 2 可以看出, 非线性使得响应曲线向右弯曲; 同时, 当频率从大到小或从小到大变化时, 系统将出现跳跃现象.

为了讨论静态解的稳定性, 令

$$a = a_0 + a_1, \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1, \quad (40)$$

式中 a_0 和 γ_0 是系统的静态解, 满足方程(37), 而 a_1 和 γ_1 是离开静态解的任意小量. 把方程(40)代入方程(36), 按小量 a_1 和 γ_1 展开, 保留线性项可得

$$\begin{aligned} a_1' &= -\mu a_1 + \left(\frac{K}{2\omega_0} \cos \gamma_0 \right) \gamma_1, \\ \gamma_1' &= -\left(\frac{3\alpha a_0}{4\omega_0} + \frac{K}{2\omega_0 a_0^2} \cos \gamma_0 \right) a_1 - \left(\frac{K}{2\omega_0 a_0} \sin \gamma_0 \right) \gamma_1. \end{aligned} \quad (41)$$

系统的稳定性与下列本征方程的本征值有关:

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \Gamma = 0, \quad (42)$$

式中

$$\Gamma = \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega_0} \right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0^2}{8\omega_0} \right) + \mu^2. \quad (43)$$

当 $\Gamma > 0$ 时系统是稳定的; 当 $\Gamma < 0$ 时系统是不稳定的; 当 $\Gamma = 0$ 时系统处于临界状态.

2. 子谐共振, $\Omega_p \approx 3\omega_0$

利用类似方法可以导出子谐共振的一阶近似解

$$X = a \cos \left\{ \frac{1}{3} (\Omega_p t - \gamma) \right\} + \frac{K}{\omega_0^2 - \Omega_p^2} \cos \Omega_p t + O(\epsilon). \quad (44)$$

系统的频率响应曲线由方程

$$9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{9\alpha a^2}{8\omega_0} \right) = \frac{81\alpha^2\Lambda^2}{16\omega_0^2} a^2 \quad (45)$$

给出, 系统的临界参数

$$K_c = \left| 2(\omega_0^2 - \Omega_p^2) \sqrt{\frac{\sigma\omega_0}{9\alpha}} \right| = 8\omega_0\sigma \sqrt{\frac{\sigma\omega_0}{9\alpha}}. \quad (46)$$

取 $\sigma = 2 \times 10^4$ 和前面相同的一组参数, 可求得动力学允许的磁场公差 $r_{pc} = 8.5 \times 10^{-3}$. 这一结果表明仅当磁场公差 $r_p < 8.5 \times 10^{-3}$ 时, 储存环的运转是稳定的. (45)式中的 $\Lambda = K/[2(\omega_0^2 - \Omega_p^2)]$.

四、系统的全局分叉

上面讨论了系统的局部分叉, 现在讨论系统的全局分叉特征. 令

$$x_1 = \omega_0 \alpha^{-\frac{1}{2}} X, \quad \tau = \omega_0 t, \quad (47)$$

则方程(25)化为

$$\ddot{x}_1 + x_1 + x_1^3 = -\delta \dot{x}_1 + \lambda_1 \cos Q_2 \tau, \quad (48)$$

式中 $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{d\tau}$, 而

$$\delta = 2\mu\omega_0^{-2}, \quad \lambda_1 = K\omega_0^{-3}\alpha^{1/2}, \quad Q_2 = \Omega_p/\omega_0. \quad (49)$$

假设 $\delta \dot{x}_1, \lambda_1 \cos Q_2 \tau$ 是 $O(\epsilon)$ 级小量, 则方程(48)可改写为

$$\ddot{x}_1 + x_1 + x_1^3 = -\epsilon \delta \dot{x}_1 + \epsilon \lambda_1 \cos Q_2 \tau. \quad (50)$$

将用 Melnikov 方法分析方程(50)的全局分叉特征. 首先考虑无扰动方程, 相应的解可表示为

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= \left(\frac{2\kappa_1^2}{1-2\kappa_1^2} \right)^{1/2} \operatorname{cn} u, \\ y(\tau) = \dot{x}_1(\tau) &= -\frac{(2\kappa_1^2)^{1/2}}{1-2\kappa_1^2} \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{dn} u, \end{aligned} \quad (51)$$

式中 $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{sn} u$ 和 $\operatorname{dn} u$ 是 Jacobian 椭圆函数, 而

$$u = \tau(1-2\kappa_1^2)^{1/2}, \quad (52)$$

构造下列 Melnikov 函数:

$$M^{m/n}(\tau_0) = \int_0^{nT} y(\tau) \{ \delta y(\tau) - \lambda_1 \cos Q_2(\tau + \tau_0) \} d\tau, \quad (53)$$

式中 $T = \frac{m}{n} \frac{2\pi}{Q_2}$, $y(\tau)$ 由(51)式给出, 完成积分可得^[22]

$$M^{m/n}(\tau) = I_s(m, n)\delta - \lambda_1 I_1(m, n) \sin Q_2 \tau_0, \quad (54)$$

式中

$$I_s(m, n) = \frac{8n}{3(1-2\kappa_1^2)^{1/2}} \left(\frac{1-\kappa_1^2}{1-2\kappa_1^2} K(\kappa_1) - E \right), \quad (55)$$

$$I_1(m, n) = \begin{cases} 2\sqrt{2} Q_2 \pi \operatorname{sech}(Q_2 K' \sqrt{1-2\kappa_1^2}) & n=1, m \text{ 为奇数;} \\ 0 & n \neq 1, m \text{ 为偶数,} \end{cases} \quad (56)$$

$$K' = K(\kappa_1'), \quad \kappa_1' = \sqrt{1-\kappa_1^2}, \quad \kappa_1^2 = (1-2\kappa_1^2)H_1/\kappa_1'^2, \quad (57)$$

H_1 是能量常数, 由系统的初始条件决定, 而 E 是第二类 Jacobian 椭圆积分, $K(\kappa)$ 是第一类 Jacobian 全椭圆积分.

定义系统的临界值

$$\begin{aligned} R_c(m) &= I_s(m, 1)/I_1(m, 1) \\ &= \frac{8K(\kappa_1)}{3\sqrt{2} m \pi^2} \left\{ \frac{\kappa_1'^2}{1-2\kappa_1^2} K(\kappa_1) - E \right\} \operatorname{ch} \left(\frac{m \pi K'}{2K(\kappa_1)} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

(54)式表明, Melnikov 函数 $M^{m/n}(\tau_0)$ 有两个简单零点; 当 $|\lambda_1/\delta| > R_c(m)$ 时, 方程(50)式有两个 m 阶的子谐波解; 否则系统将不存在这类解(因为系统存在大的衰减); 根据 $T = 2m\pi/Q_2$, 而 $T \in (0, 2\pi)$ 可知 $m \leq [Q_2]$ ($[Q_2]$ 表示小于 Q_2 的最大整数), 因此当 $Q_2 < 1$ 时, 不存在任何子谐波解.

注意到临界值 $R_c^m(Q_2)$ 定义在区间 (m, ∞) , 而当 $Q_2 \rightarrow \infty$ 时, $R_c^m(Q_2)$ 也趋于无穷; 当 $Q_2 \rightarrow m$ 时,

$$\lim_{Q_2 \rightarrow m} R_c^m(Q_2) = \begin{cases} 0 & m=1; \\ \infty & m=3, 5, 7, \dots \end{cases} \quad (59)$$

对于 ESR, 选取初值 $X_0 = x_0/l = 1.78 \times 10^{-2}$, $\dot{X}_0 = 0$ (其他参数同上), 由(58)式可得临界值 $R_c(3) = 73.5$. 当 $m=3$ 时, 由(49)式可求得 $\lambda_1/\delta = 1.07 \times 10^8 > R_c(3)$, 于是系统有两个 3 阶子谐波解, 当 m 足够大时, 有可能使得 $\lambda_1/\delta < R_c(m)$, 则方程(50)不再存在任何奇数阶的子谐波解.

五、某些热力学量

当系统由非线性方程(17)描写时(即纯的一维库仑链), 系统的配分函数可表示为^[23]

$$Z = 2\pi kT \left(\frac{m}{a_0} \right)^{1/2} (1 - ckT/8a_0^2), \quad (60)$$

式中

$$a_0 = \kappa - A_1 \left(S_1 - \frac{9a^2}{2l^2} S_3 \right), \quad c = \frac{9A_1}{l^2} (S_2 - 3S_3), \quad (61)$$

k 是玻耳兹曼常数, T 是绝对温度. 由(60)式可得系统的内能和比热

$$E = -\partial(\ln Z)/\partial \left(\frac{1}{kT} \right) = kT \left(1 - \frac{ckT}{8a_0^2} \right),$$

$$c_v = \frac{\partial E}{\partial T} = k \left(1 - \frac{ck_T}{4a_0^2} \right). \quad (62)$$

系统的亥姆霍兹自由能也可表示为

$$F = -k_T \ln Z = -k_T \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(2\pi k_T \frac{m}{a_0} \right) + \ln \left(1 - \frac{ck_T}{8a_0^2} \right) \right\}. \quad (63)$$

在线性近似下,方程(63)可简化为

$$F = k_T \sum \ln \left(2 \sinh \frac{\hbar\omega}{2k_T} \right). \quad (64)$$

对于 $n = N/2$ 模式和第三节中所选择的参数,(60)和(62)式可化为

$$Z = 3.04 \times 10^{-7} k_T (1 - 31.2 k_T), \quad (60')$$

$$E = k_T (1 - 31.2 k_T), \quad c_v = k (1 - 62.4 k_T), \quad (62')$$

式中 k_T 的单位是 eV.

六、结 论

利用多重尺度法和 Melnikov 方法^[24,25]讨论了系统的局部分叉和全局分叉,利用经典方法讨论了系统的稳定性,导出了系统的临界参数.对于全剥离的铀束,当单核能为 500MeV 时,相邻离子之间的临界距离为 1.75×10^{-5} m;当磁场公差小于 8.5×10^{-3} 时,系统是稳定的;同时还导出了一维库仑系统的某些热力学参数.

- [1] E. Madelung, *Phys. Zeitschr.*, **19**(1918), 524.
- [2] W. P. Wigner, *Phys. Rev.* **46**, (1934), 1002.
- [3] S. G. Brush *et al.*, *J. Chem. Phys.*, **45**, (1966), 2102.
- [4] W. L. Slatteberg *et al.*, *Phys. Rev.*, **A21**, (1980), 2087.
- [5] J. J. Bollinger *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **53**, (1984), 348.
- [6] E. N. Dementier *et al.*, *Sov. Phys.: Tech. Phys.*, **25**, (1980), 1001.
- [7] A. Rahman and J. P. Schiffer, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, (1986), 1133.
- [8] J. P. Schiffer and P. Kienle, *Z. Phys. A*, **231**, (1985), 181.
- [9] D. Habs *et al.*, MPI 1987-v3, MPI, Heidelberg, (1987); D. Habs, Crystallization of Particle Beams in Frontiers of Particle Beams Proceedings, South Padre Island, Texas, Springer-Verlag, (1986), pp. 310—337.
- [10] J. Javanainen *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2** (1985), 1768.
- [11] J. P. Vary *et al.*, *Z. Phys. A*, **328**, (1987), 247.
- [12] E. V. Baklanov *et al.*, *Appl. Phys.*, **B39**, (1986), 179.
- [13] I. Hofmann and S. Y. Luo, GSI Reports 89-1, (1989).
- [14] S. Y. Luo and I. Hofmann, GSI Reports 89-21, (1989).
- [15] R. W. Hass, I. Hofmann and D. Liesen, Proc. Workshop on Crystalline Ion Beam, Darmstadt, West Germany, (1988).
- [16] N. S. Dikansky *et al.*, KFK Reports 3846 ECOOL Meeting, Karlsruhe, West Germany, (1984).
- [17] N. S. Dikansky *et al.*, GSI H-85-3, (1985).
- [18] 邵明珠、罗诗裕, (已投)《物理》.
- [19] M. Abramowitz *et al.*, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., New York, (1968).
- [20] D. Liesen, GSI 88-42, Preprint, July, (1988).
- [21] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, Nonlinear Oscillations, John Wiley and Sons, New York, (1979).
- [22] I. S. Gradshteyn *et al.*, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York, (1980).
- [23] A. S. Nowick *et al.*, Diffusion in Solids, Academic Press, New York, (1975).
- [24] Luo Shiyu and Shao Mingzhu, *Radiation Effects Express*, **2**(1988), 45.
- [25] Luo Shiyu, Shao Mingzhu and J. A. Ellison, *Radiation Effects Express*, **1**, (1988), 239.

[26] 邵明珠等, 本刊本期.

[27] 邵明珠等, 本刊本期.

NONLINEAR DYNAMICS OF ONE-DIMENSIONAL CRYSTALLINE BEAM (I)

SHAO MING-ZHU

Chongqing Institute of Communications, Chongqing, 630073;

South-West Normal University, Chongqing, 630715

I. HOFMANN

GSI, 6100 Darmstadt, FRG

LUO SHI-YU

Chongqing Institute of Communications, Chongqing, 630073;

South-West Normal University, Chongqing, 630715

(Received 28 August 1989)

ABSTRACT

A coherent oscillation equation for one-dimensional Coulomb chain has been derived, which is the well-know Duffing equation, and some single modes have been discussed. An approximate solution has been found, and stability of system has been analysed. Besides, we have derived the error of magnetic field and some thermodynamic parameters, and also some critical parameters for ESR at GSI of FRG.

PACC: 2920