第39卷 第5期 物理学报 Vol. 39, No. 5
1990年5月 ACTA PHYSICA SINICA May, 1990

Josephson 结的 I–V 曲线的子台阶

刘曾荣
苏州大学数学系，苏州，215006

江霞妹 韩志斌
中南民族学院数学系，武汉，430074

顾国庆[1]
上海机械学院系统工程系，上海，200093

1989年7月10日收到

本文在文献[1]基础上进一步分析 Josephson 结的 I-V 曲线的子台阶现象．首先把数学方法作了发展，然后用所得的方法分析了产生子台阶的条件，从而完善了对 Josephson 结的 I-V 曲线的分析．

PACC：7455；7450；0230

一、引言

Josephson 结是一个典型的非线性元件，因而其 I-V 特性曲线上所表现的一系列现象[2-4]，就其本质来说是非线性系统的动力学行为的反应．在文献[1]中利用近年来数学上发展的 Melnikov 方法分析了 Josephson结的 I-V曲线上滞后、台阶、混沌等一系列效应，结果与实验相符合．但是也同时看到从理论上仍不能解决子台阶现象，这一点是与实验结果不相符的．

Melnikov 方法其几何实质是距离函数的渐近展开的首项，而用此 Melnikov 函数对 Josephson 结进行分析，能判断台阶现象，却不能判定子台阶现象．由此可设想应该把距离函数作高阶渐近展开，讨论高阶 Melnikov 函数．这方面的纯数学结论的证明见文献[5]．

考虑类似于文献[1]的 Josephson 结模型方程

$$I_{dc}+I_{ac}\sin\omega t=\left(\frac{\hbar c}{2e}\right)\ddot{\varphi}+\left(\frac{\hbar}{2eR_0}\right)(1+\varepsilon\cos\varphi)\dot{\varphi}+I_c\sin\varphi. \tag{1}$$

引入无量纲量

$$\rho=I_{dc}/I_c,\ \alpha=I_{ac}/I_c,\ \beta=2eI_cCR_0^2/\hbar,$$

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室).

$$\Omega=\omega\sqrt{\hbar c/2eI_c},\ \tau=t\sqrt{2eI_c/\hbar c},\tag{2}$$

(1) 式可以化为

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}(1+\varepsilon\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\tau}+\sin\varphi=\rho+\alpha\sin\Omega\tau.\tag{3}$$

在小 ρ, 小 α 和大 β 条件下,引人小参数

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\varepsilon^2\delta,\ \rho=\varepsilon^2 b\delta,\ \alpha=\varepsilon c,\tag{4}$$

方程(3)可写成

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\varepsilon^2\delta(1+\varepsilon\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\tau}+\sin\varphi=\varepsilon^2 b\delta+\varepsilon c\sin\Omega\tau.\tag{5}$$

用高阶 Melnikov 函数对(5)式进行严格讨论,分析了 I-V 曲线上出现子台阶现象.

二、二阶 Melnikov 方法

讨论如下的二阶系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f_1(x,y)+\varepsilon g_1(x,y,t)+\varepsilon^2 h_1(x,y,t),\\ \dot{y}&=f_2(x,y)+\varepsilon g_2(x,y,t)+\varepsilon^2 h_2(x,y,t),\end{aligned}\tag{6}$$

式中 $0<\varepsilon\ll 1$ 为一小参数, $g=\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix}$ 和 $h=\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}$, t 为周期 T 的函数. 并作如下假定:

1) f, g 和 h 为充分光滑函数 (c^r, $r\geqslant 2$)、且在有界集上为有界;

2) 当 $\varepsilon=0$ 时,(6)式为一Hamiltonian 系统,即存在函数 $H(x,y)$: $R^2\to R$, 使得 $f_1=\frac{\partial H}{\partial y}$, $f_2=-\frac{\partial H}{\partial x}$;

3) 存在开集 $U\subset R^2$、使(6)式的无扰动系统 ($\varepsilon=0$) 存在单参数族周期轨道

$$q^\alpha(t)=(x^\alpha(t),y^\alpha(t)),\ \alpha\in J\subseteq R;$$

4) 记 $q^\alpha(t)$ 的周期为 T^α, 并假定 T^α 为 α 可微函数, 且有 $dT^\alpha/dH^\alpha>0$ (或 $dT^\alpha/dH^\alpha<0$).

对于满足 $T^\alpha=\frac{m}{n}T$ 的周期轨道 $q^\alpha(t)$ (m, n为互质正整数)引入一阶 Melnikov 函数和二阶 Melnikov 函数

$$M_1^{m/n}(t_0)=\int_0^{mT} f(q^\alpha(t))\wedge g(q^\alpha(t),t+t_0)dt,\tag{7}$$

$$\begin{aligned}M_2^{m/n}(t_0)=\int_0^{mT} f(q^\alpha(t))\wedge\Big\{\Big[\frac{1}{2}D^2f(q^\alpha(t))\Big][q_1^\alpha(t+t_0,t_0)]^2\\ +Dg(q^\alpha(t),t+t_0)q_1^\alpha(t+t_0,t_0)+h(q^\alpha(t),t+t_0)\Big\}dt.\end{aligned}\tag{8}$$

显然(7)式所代表的一阶 Melnikov 函数就是原先的 Melnikov 函数[6]. (8)式中的

$$q_1^\alpha(t,t_0)=(x_1^\alpha(t,t_0),\ y_1^\alpha(t,t_0))$$

是如下变分方程的解：

$$\dot{q}_1^\alpha(t,t_0)=Df(q^\alpha(t-t_0))q_1^\alpha(t,t_0)+g(q^\alpha(t-t_0),t). \tag{9}$$

不难验证

$$\frac{dq^\alpha}{dt}=\left(\frac{dx^\alpha}{dt},\ \frac{dy^\alpha}{dt}\right),\ \frac{dq^\alpha}{d\alpha}=\left(\frac{dx^\alpha}{d\alpha},\ \frac{dy^\alpha}{d\alpha}\right) \tag{10}$$

为(9)式所对应的齐次线性方程的解．通过计算相应的朗斯基行列式，可以验证此两解为线性无关．因而线性非齐次方程(9)原则上可以利用常数变分法找到其相应的解．

主要数学结果如下：

定理 1：(*A*) 如果 $M^{m/n}{}_1(t_0)\equiv 0$，当 $t_0\in[0,T)$ 时，$M^{m/n}{}_2(t_0)$ 存在不依赖于 ε 的简单零点，则对充分小 ε，(6) 式存在周期为 $\frac{m}{n}T$ $(n=1)$ 的次谐解或者周期为 $\frac{m}{n}T$ $(n>1)$ 的超次谐解；

(*B*) 如果 $M^{m/n}{}_1(t_0)\not\equiv 0$，当 $t_0\in[0,T)$ 时，

$M^{m/n}(t_0)$ 存在不依赖于 ε 的简单零点，则对充分小 ε，(6) 式存在周期为 $\frac{m}{n}T(n=1)$ 的次谐解或者周期为 $\frac{m}{n}T$ $(n>1)$ 的超次谐解．

定理的详细证明见文献[5]．

三、(5)式的次谐解分析

令 $x=\varphi$，$y=\dot{\varphi}$，(5) 式等价于方程组

$$\begin{aligned}&\dot{x}=y,\\&\dot{y}=-\sin x+\varepsilon c\sin\Omega\tau+\varepsilon^2\delta[b-(1+\varepsilon\cos x)y].\end{aligned} \tag{11}$$

由文献[1]可知，Josephson 结的子台阶对应于(5)式的无扰动系统 ($\varepsilon=0$) 的 R 型周期轨道的扰动，因而只需考虑(11)式中对应于 $\varepsilon=0$ 的 R 型周期轨道．此类解为

$$\begin{aligned}x_\pm^l(\tau,k)&=\pm 2\arcsin\left(\operatorname{sn}\frac{\tau}{k}\right),\\ y_\pm^l(\tau,k)&=\pm\frac{2}{k}\operatorname{dn}\left(\frac{\tau}{k}\right),\end{aligned} \tag{12}$$

式中 $H_\pm^l(k)=2/k^2-1$，周期为 $T_\pm^l(k)=2kK(k)$，$K(k)$ 为第一类完全椭圆积分，k 为模；sn 和 dn 为 Jacobi 椭圆函数．

对于满足 $T_+^l(k)=\frac{m}{n}T=\frac{2\pi m}{n\Omega}$ 的周期轨道，其一阶 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned}M^{m/n}{}_1(\tau_0)&=\frac{2c}{k}\int_0^{mT}\operatorname{dn}\frac{\tau}{k}\sin\Omega(\tau+\tau_0)d\tau\\&=\begin{cases}2\pi c\operatorname{sech}\dfrac{\pi mK'(k)}{K(k)}\sin\Omega\tau_0 & n=1;\\ 0 & n\neq 1.\end{cases}\end{aligned} \tag{13}$$

这里 $K'(k)=K(k')$，$k'=\sqrt{1-k^2}$，因此，由(13)式可知，当 $n=1$ 时，$M_1^{m/n}(\tau_0)$ 存在简单零点，故由上节定理 1(*B*) 可得

结论 1：当 ε 充分小时，在(11)式的未扰动的周期为 mT 的*R*型轨道附近，存在(11)式的周期为 mT 的次谐解.

当 $n\neq 1$ 时，$M_1^{m/n}(\tau_0)\equiv 0$，由 $M_1^{m/n}(\tau_0)$ 无法对超次谐解作出判定，为此必须考虑二阶 Melnikov 函数. 经过相当复杂的计算过程，可以得到

$$M_2^{m/n}(\tau_0)=2n\delta(\pi b-b_{m/n})+J_1(m,n)\cos^2\Omega\tau+\frac{1}{2}J_2(m,n)\sin 2\Omega\tau_0, \tag{14}$$

式中

$$b_{\frac{m}{n}}=\frac{4E(k)}{k}-\frac{\varepsilon}{3k^5}(8k(k)-5E(k))+\frac{8a}{3k}(k(k)-2E(k)),$$

$$J_1(m,n)=2c^2n^4k^2m^2\left\{\frac{E^2(k)}{k'^2}\left[\frac{1}{2m^2}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sech}\dfrac{j\pi K'(k)}{K(k)}}{(jn)^2-m^2}\right]^2\right.$$
$$\left.-\left[\frac{E(k)}{2k'^2m^2}\cdot K(k)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sech}\dfrac{j\pi K'(k)}{K(k)}}{(jn)^2-m^2}\right]^2\right\},$$

$$J_2(m,n)=\frac{c^2}{k^2}\int_0^{mT}\mathrm{dn}^2\frac{\tau}{k}\left\{\int_0^{\tau}\mathrm{dn}\frac{\tau}{k}\cos\Omega\tau d\tau\right.$$
$$\cdot\int_0^{\tau}\left(\frac{1}{\mathrm{dn}^2\dfrac{\tau}{k}}\int_0^{\tau}\mathrm{dn}\frac{\tau}{k}\sin\Omega\tau d\tau\right)d\tau+\int_0^{\tau}\mathrm{dn}\frac{\tau}{k}\sin\Omega\tau d\tau$$
$$\left.\times\int_0^{\tau}\left(\frac{1}{\mathrm{dn}^2\dfrac{\tau}{k}}\int_0^{\tau}\mathrm{dn}\frac{\tau}{k}\cos\Omega\tau d\tau\right)d\tau\right\}d\tau,$$

$b_{m/n}$ 中的 $E(k)$ 为第二类完全椭圆积分.

显然 $J_1(m,n)$ 一般不为零，$J_2(m,n)$ 中积分为一正常积分故收敛，大量数值结果表明 $J_2(m,n)$ 一般也不为零(见表 1).

因此，由(14)式可见，当 $J_1^2+J_2^2\neq 0$ 时，

$$M_2^{m/n}(\tau_0)=\frac{1}{2}\sqrt{J_1^2+J_2^2}\left(\frac{2n\delta(\pi b-b_{m/n})+\dfrac{1}{2}J_1}{\dfrac{1}{2}\sqrt{J_1^2+J_2^2}}+\cos(2\Omega\tau_0+\theta_0)\right), \tag{15}$$

式中 $\theta_0=\arctan J_2/J_1$. 故当参数满足条件

$$\left|\frac{4n\delta(\pi b-b_{m/n})+J_1}{\sqrt{J_1^2+J_2^2}}\right|<1 \tag{16}$$

时，$M_2^{m/n}(\tau_0)$ 存在简单零点. 由定理 1(*A*) 可以得到

表 1　$J_2(m, n)=\frac{c^2}{k^2} l$ 的数值结果

ω	m	n	k	l
2.00000000	2.00000000	3.00000000	0.59928013	0.21341799
2.00000000	3.00000000	4.00000000	0.65681907	0.56308453
2.00000000	3.00000000	5.00000000	0.54987916	0.19567442
2.00000000	4.00000000	5.00000000	0.68912309	1.00456613
2.00000000	5.00000000	6.00000000	0.70975739	1.43877175
2.00000000	4.00000000	7.00000000	0.52779716	0.20917498
2.00000000	2.00000000	7.00000000	0.27997238	0.00556126
3.00000000	2.00000000	3.00000000	0.42332825	0.02157727
3.00000000	3.00000000	4.00000000	0.47026814	0.06143519
3.00000000	3.00000000	5.00000000	0.38448681	0.01907875
3.00000000	4.00000000	5.00000000	0.49752167	0.12005032
3.00000000	5.00000000	6.00000000	0.51529699	0.19319356
3.00000000	4.00000000	7.00000000	0.36751114	0.02014236
3.00000000	2.00000000	7.00000000	0.18876000	0.00049821

结论 2：若参数 (b,δ) 满足 D_0，

$$\frac{|J|}{4n|\pi b-b_{m/n}|}\leqslant\delta\leqslant\frac{\sqrt{J_1^2+J_2^2}+|J|}{4n|\pi b-b_{m/n}|},\tag{17}$$

则当 ε 充分小时，在(11)式的无扰动系统 $(\varepsilon=0)$ 的周期为 $\frac{m}{n}T$ 的 R 型周期轨道附近，存在(11)式的周期为 $\frac{m}{n}T$ 的超次谐轨道；若 $(b,\delta)\bar{\in}\bar{D}_0$，则这类超次谐轨道是不存在的.

在参数 (b,δ) 平面上，区域 D_0 的边界曲线为

$$\begin{aligned}4n\delta(\pi b-b_{m/n})+J_1&=\sqrt{J_1^2+J_2^2},\\4n\delta(b_{m/n}-\pi b)-J_1&=\sqrt{J_1^2+J_2^2}.\end{aligned}\tag{18}$$

设 $|\varepsilon|<1$，完全类似于文献[1]的讨论，可以证实这类超次谐解的稳定性，得到结果为

结论 3：若 $(b,\delta)\in D_0$，则(11)式总有稳定的周期为 $\frac{m}{n}T$ 的超次谐解.

四、Josephson结的子台阶讨论

以记号〈·〉表示在 $[0, mT]$ 区间上的积分平均值. 首先证明如下结果:

结论 4: 设 $\Delta\subset D_0$ 是一有界闭区域，则当 ε 足够小时，$\forall(b,\delta)\in\Delta$，记 $(x_{\frac{m}{n}}^{l}, y_{\frac{m}{n}}^{l})$ 为结论 2 和结论 3 所得到的(11)式的周期为 $\frac{m}{n}T$ 的稳定超次谐解，则有

$$\langle y_{\frac{m}{n}}^{l}\rangle = \langle y_{\frac{m}{n}}^{l}(t, k_{\frac{m}{n}})\rangle = \frac{2\pi n}{mT} = \frac{n\Omega}{m}.$$

证：因 $(x_{\frac{m}{n}}^{l}, y_{\frac{m}{n}}^{l})$ 是满足结论 2 和结论 3 所对应于(11)式的周期为 $\frac{m}{n}T$ 的稳定超次谐轨道．于是应该有

$$x_{\frac{m}{n}}^{l}(mT) - x_{\frac{m}{n}}^{l}(0) = 2n\pi,$$

故有

$$\langle y_{\frac{m}{n}}^{l}\rangle = \frac{1}{mT}\int_0^{mT} y_{\frac{m}{n}}^{l}(\tau)d\tau = \frac{1}{mT}(x_{\frac{m}{n}}^{l}(mT) - x_{\frac{m}{n}}^{l}(0)) = \frac{2n\pi}{mT} = \frac{n\Omega}{m} \quad \text{证毕.}$$

对于 Josephson 结的 I-V 特性曲线，其直流电压 V 为

$$V = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)\left\langle\frac{d\varphi}{dt}\right\rangle. \tag{19}$$

当参数 $(b,\delta)\in D_0$，利用结论 4 的结果，可以求得此时所对应的电压 V 为

$$V = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)\left\langle\frac{d\varphi}{dt}\right\rangle = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)\sqrt{2eI_c/\hbar c}\left\langle\frac{d\varphi}{d\tau}\right\rangle$$
$$= \left(\frac{\hbar}{2e}\right)\sqrt{2eI_c/\hbar c}\,\frac{n\Omega}{m} = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)\frac{n\omega}{m}, \tag{20}$$

即在 I-V 特性曲线上会出现子台阶．该子台阶的位置仅与外加交流频率有关，与 Junction 的性质、直流大小、交流的幅值都无关．

对一定的 δ，当 b 的范围取为

$$\left(\frac{-\sqrt{J_1^2+J_2^2}+4n\delta b\frac{m}{n}}{4n\pi}, \frac{(\sqrt{J_1^2+J_2^2}+J_1)+4n\delta b\frac{m}{n}}{4n\pi}\right)$$

时，子台阶是存在的．即在直流的一定范围内，对于选择的 m/n，如果参数 (b, δ) 满足(16)式，其 I-V 特性曲线上就出现 m/n 阶的子台阶，子台阶的宽度是取决于交流和结的性质．

[1] 钱敏、潘涛、刘曾荣，物理学报，36 (1987)，149.
[2] A. Barone and G. Paterno, Physics and Application of The Josephson Effect, A. Wiley, Interscience Publication, (1982).
[3] R. F. Miracky and J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.*, 50(1983), 856.
[4] M. Octavis and C. Readi Nasser, *Phys. Rev*, B30(1984), 1586.
[5] 刘曾荣、韩志斌、江霞妹，应用数学学报，待发表.
[6] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vecter Fields, Springer-Verlag (1983).

THE SUB-STEPS OF I-V CHARACTERISTICS IN JOSEPHSON JUNCTION

LIU ZENG-RONG

Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou, 215006

JIANG XIA-MEI HUN ZHI-BIN

Department of Mathematics, Zhongnan National College, Wuhan, 430074

GU GUO-QING

Department of Systems Engineering, Shanghai Institute, of Mechanical Engineering, Shanghai, 200093

(Received 10 July 1989)

ABSTRACT

On the basis of Ref. [1], we analyse the sub-steps of I-V characteristics in Josephson junction theoretically. Firstly, a mathematical method is developed, then the conditions of existence of sub-steps are obtained by that method. Our results make the discussion for I-V characteristics in Josephson junction perfect.

PACC: 7455; 7450; 0230