第 39 卷 第 1 期　　物 理 学 报　　Vol. 39, No. 1
1990 年 1 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Jan., 1990

有限振幅声波在平面界面上的反射和折射*

郑晓瑜　　钱祖文

中国科学院声学研究所，北京，100080

1989 年 3 月 28 日收到

在文献[1]的基础上，进一步研究了有限振幅声波在平面界面上的反射和折射，求得了两种介质中的场，并对界面条件和折射关系作了讨论.

PACC: 4325; 4330

一、引　　言

关于有限振幅声波的边值问题近年来发表了一系列的工作．文献[2]导出了有关方程，在适定的界面条件下求解了平面的反射问题，并预言存在Ω谐波．文献[3]考虑了声速的有限振幅效应，研究了 Snell 定律．为了弄清有限振幅波通过界面的折射情况，本文以文献[1]为基础，在界面上使用连接条件，分别求方程的解．

二、有限振幅波的二阶近似解

文献[1]在 Lagrange 坐标下，通过微扰法，求得位移势的一阶场 $\varphi^{(1)}$ 满足齐次波动方程，二阶势 $\varphi^{(2)}$ 满足非齐次方程，即

$$\Box^2\varphi^{(2)} = -\left\{-\frac{3}{2}(\varphi_{ab}^{(1)})^2 - \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) - \Gamma\varphi_{aa}^{(1)}\varphi_{bb}^{(1)} - \frac{2\Gamma+1}{4}\left[(\varphi_{aa}^{(1)})^2 + (\varphi_{bb}^{(1)})^2\right]\right\}. \tag{1}$$

式中 a,b 为 Lagrange 坐标，$\varphi_{aa}^{(1)}$ 为对 a 的二阶导数，Γ 为介质的物态常数，Y_1,Y_2 为

$$Y_1 = \int\left[\varphi_{ab}^{(1)}\varphi_{bbb}^{(1)} - \varphi_{bb}^{(1)}\varphi_{aab}^{(1)}\right]da + f_1(b), \tag{2}$$

$$Y_2 = \int\left[\varphi_{ab}^{(1)}\varphi_{aaa}^{(1)} - \varphi_{aa}^{(1)}\varphi_{bbb}^{(1)}\right]db + f_2(a). \tag{3}$$

并满足相容关系

---

* 国家自然科学基金资助的课题.

$$\frac{1}{2}[(\varphi_{bb}^{(1)})^2-(\varphi_{aa}^{(1)})^2]-(Y_1-Y_2)=0. \tag{4}$$

$\Box^2$为 d'Alember 算子，f_1，f_2 为两个任意函数.

设入射波在第一介质所有量用下标 I 描述，第二介质用下标 II 描述.

令第一介质中的透射一阶势为

$$\varphi_{\rm II}^{(1)}=we^{j(l_1a-l_2b)-j\omega t}. \tag{5}$$

l_1,l_2 为第二介质的波数 l 的两个分量，w 为一阶势的振幅透射系数. 将 (5) 式代入(2)，(3)式，可得(略去时间因子)

$$Y_1=f_1(b)+\frac{1}{2}w^2e^{2j(l_1a-l_2b)}(l_2^4-l_1^2l_2^2), \tag{6}$$

$$Y_2=f_2(a)+\frac{1}{2}w^2e^{2j(l_1a-l_2b)}(l_1^4-l_1^2l_2^2). \tag{7}$$

由相容性条件(4)式，可得

$$f_1(b)=f_2(a)=0. \tag{8}$$

将(5)—(8)式代入(1)式，经繁琐的数学运算得到

$$\Box^2\varphi_{\rm II}^{(2)}=4Ae^{-2j(\omega t-l_1a+l_2b)} \tag{9}$$

式中

$$A=\frac{1}{8}(\Gamma_2+1)w^2l^4. \tag{10}$$

采用文献[1]中的方法求解(9)式，令

$$\varphi_{\rm II}^{(2)}=\phi(a,b)e^{-2j\omega t}, \tag{11}$$

(9)式变为

$$\phi_{aa}+\phi_{bb}+4l^2\phi=4Ae^{2j(l_1a-l_2b)}. \tag{12}$$

再令

$$\phi=\phi_2(a)e^{-2jl_2b}+\phi_3(b)e^{2jl_1a}, \tag{13}$$

代入(12)式，得

$$\frac{d^2\phi_2}{da^2}+4l_1^2\phi_2=2Ae^{2jl_1a}, \tag{14}$$

$$\frac{d^2\phi_3}{db^2}+4l_2^2\phi_3=2Ae^{-2jl_2b}. \tag{15}$$

应用变动参数法求解(14)，(15)式，很容易得到

$$\phi_2(a)=\frac{A}{2jl_1}\left(a-\frac{1}{4jl_1}\right)e^{2jl_1a}, \tag{16}$$

$$\phi_3(b)=-\frac{A}{2jl_2}\left(b+\frac{1}{4jl_2}\right)e^{-2jl_2b}. \tag{17}$$

将(16)，(17)式代入(13)式，再将所得结果代入(11)式，便可得到非齐次方程(9)的一个特解，再加上对应的齐次波动方程解的通解，则(9)式的全解为

$$\varphi_{\rm II}^{(2)}=e^{-2j(\omega t-l_1a+l_2b)}\left[\frac{A}{2j}\left(\frac{a}{l_1}-\frac{b}{l_2}\right)+P+P_1\right]. \tag{18}$$

式中 P_1 为齐次通解的振幅待定常数。

$$p = \frac{A}{8}\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\right). \tag{19}$$

在第一介质中一阶势 $\varphi_{\mathrm{I}}^{(1)}$ 为

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(1)} = (e^{-jk_2b} + Ve^{jk_2b})e^{-j(\omega t - k_1a)}. \tag{20}$$

k_1, k_2 为波数 k 的两个分量，用同样的方法可以求得与文献[1]的(20)式相同的解(除了一个无关紧要的常数因子 $\frac{1}{C_0^2}$ 以外)，再加上齐次通解，则第一介质中的全解为

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(2)} = \left\{\frac{\alpha_1}{k_2^2} e^{2jk_1a} + e^{2j(k_1a - k_2b)}\left[\frac{\alpha_2}{2j}\left(\frac{a}{k_1} - \frac{b}{k_2}\right) + Q + C_1\right]\right.$$
$$\left. + e^{2j(k_1a + k_2b)}\left[\frac{V^2\alpha_2}{2j}\left(\frac{a}{k_1} + \frac{b}{k_2}\right) + V^2Q + C_2\right]\right\} e^{-2j\omega t}. \tag{21}$$

式中 C_1, C_2 为齐次通解的待定常数，Q 为

$$Q = \frac{\alpha_2}{8}\left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2}\right), \tag{22}$$

$$\alpha_1 = \frac{V}{4}[(\Gamma_1 - 1)k^4 + 2k_2^2(k_1^2 - k_2^2)], \tag{23}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{8}(\Gamma_1 + 1)k^4. \tag{24}$$

三、界面连接条件的讨论

正如文献[2]指出，在有限振幅边值问题中，场的振幅依赖于坐标变量，各阶场之间不独立，因此，严格说来，给界面条件的提法带来困难，但我们可近似地认为各阶场的压力和法向速度在界面上连续，在这样的近似下，文献[4]得到了如下的界面条件，即在 $b = 0$ 的界面上，法向速度和压力分别连续.

$$\frac{\partial\varphi_{\mathrm{I}}^{(2)}}{\partial b} = \frac{\partial\varphi_{\mathrm{II}}^{(2)}}{\partial b}, \tag{25}$$

$$\rho_1\left[\varphi_{\mathrm{I}}^{(2)} + \frac{1}{2}k_2^2Ve^{2jk_1a - 2j\omega t}\right] = \rho_2\varphi_{\mathrm{II}}^{(2)}. \tag{26}$$

将 $\varphi_{\mathrm{I}}^{(2)}$, $\varphi_{\mathrm{II}}^{(2)}$ 两式代入(25)，(26)式，可得

$$\left[(1 - V^2)\left(\frac{k_2}{k_1}\alpha_2a + 2jk_2Q + \frac{1}{2jk_2}\alpha_2\right) + 2jk_2(C_1 - C_2)\right]e^{2jk_1a}$$
$$= \left[\frac{l_2}{l_1}Aa + 2jl_2P + \frac{A}{2jl_2} + 2jl_2P_1\right]e^{2jl_1a} \tag{27}$$

$$\rho_1\left[\frac{\alpha_1}{k_2^2} + \frac{1}{2}k_2^2V + \frac{1 + V^2}{2j}\frac{\alpha_2}{k_1}a + (1 + V^2)Q + C_1 + C_2\right]e^{2jk_1a}$$
$$= \rho_2\left[\frac{A}{2jl_1}a + P_1 + P_1\right]. \tag{28}$$

正如文献[4]指出，方程(27)，(28)要定出 C_1，C_2 和 P_1，但此方程依赖于 Lagrange 坐标 a，要想使得它们有唯一解，必须要求

$$
\begin{aligned}
&(1-V^2)\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 a e^{2ik_1a}=\frac{l_2}{l_1}Aae^{2il_1a},\\
&\rho_1(1+V^2)\frac{1}{k_1}\alpha_2 a e^{2ik_1a}=\rho_2\frac{A}{l_1}ae^{2il_1a}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

有解

$$
\frac{\cos\theta}{\cos\theta'}=\frac{\sin\delta}{\sin\delta'}=\frac{\rho_1C_1(1+V^2)}{\rho_2C_2(1-V^2)}.
\tag{30}
$$

关于此解的详细讨论见文献[4]。

另一方面，使(27)，(28)两式中振幅与 a 有关的项相等，则它们成为

$$
e^{2ik_1a}\left[(1-V^2)\left(k_2Q-\frac{\alpha_2}{4k_2}\right)+k_2(C_1-C_2)\right]=e^{2il_1a}\left(l_2P_2-\frac{A}{4l_2}\right),
\tag{31}
$$

$$
\rho_1e^{2ik_1a}\left[\frac{\alpha_1}{k_2^2}+\frac{1}{2}k_2^2V+(1+V^2)Q+C_1+C_2\right]=\rho_2P_2e^{2il_1a}
\tag{32}
$$

$$
P_2=P+P_1
\tag{33}
$$

式中要使以上两式成立，必有通常的 Snell 定律

$$
k_1=l_1,
\tag{34}
$$

则解出

$$
\begin{aligned}
C_2+V^2Q=R_2=(C_1+Q)V+\frac{1}{\dfrac{\rho_1}{\rho_2}+\dfrac{k_2}{l_2}}\Bigg[&\frac{A}{4l_2^2}\\
&-\frac{k_2}{l_2}(1-V^2)\frac{\alpha_2}{4k_2^2}-\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\frac{\alpha_1}{k_2^2}+\frac{1}{2}k_2^2V\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
P_2=(C_1+Q)\frac{\rho_1}{\rho_2}(1-V)+\frac{1}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1}+\dfrac{l_2}{k_2}}\Bigg[&\frac{A}{4l_2k_2}\\
&-(1-V^2)\frac{\alpha_2}{4k_2^2}+\left(\frac{\alpha_1}{k_2^2}+\frac{1}{2}k_2^2V\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{36}
$$

显然，(35)式中等号右端第 1 项是入射波中振幅为常数的有关项按正常反射关系反射的部分，而正常透射部分是(36)式中等号右端第 1 项．与 A 有关的项是与第二介质中的非齐次解有关的项，与 α_2 有关的项是与第一介质中的非齐次解有关的项，两式等号右端末项是与 Q 谐波[1]有关的项． P_2 为第二介质中振幅与 a，b 无关的全部透射谐波，C_2+V^2Q 为第一介质中振幅与 a，b 无关的全部反射谐波．这里 C_1+Q 为振幅与 a，b 无关的全部入射波，通常可取 $C_1=0$。

[1] Qian Zuwen, *Scientia Sinica* (*A*), 25(1982), 492.
[2] Qian Zuwen, Fortschritte der Akustik, FASE/DAGA, (1982), p. 821.
[3] D. C. Frederick and T. B. David, 114th Meeting, Acoust, Soc. Am. (1987).
[4] Qian Zuwen and Zheng Xiaoyu, *Chinese Phys. Lett.*, 6(1989), 305.

REFLECTION OF AND REFRACTION OF FINITE AMPLITUDE SOUND WAVE ON PLANE BOUNDARY OF HALF SPACE

ZHENG XIAO-YU　QIAN ZU-WEN

Institute of Acoustics, Academia Sinica, Beijing, 100080

(Received 28 March 1989)

ABSTRACT

Based on the theory of reference [1], a further investigation of the reflection and refraction of finite amplitute sound waves on a plane boundary between two media is made, and a solution of the refracted sound field in the second medium is obtained. Some problems about boundary condition and refraction law are analysed.

PACC: 4325; 4330