

用广田直接法求带高阶修正的扩充的非线性 Schrödinger 方程的孤子解*

刘 中 柱

华中理工大学物理系, 武汉, 430074

黄 念 宁

武汉大学物理系, 武汉, 430072

1990 年 2 月 12 日收到

对于描述超短脉冲在单模光纤中传播的带高阶修正的扩充的非线性 Schrödinger 方程, 用广田直接法求出了它的多孤子解显式。

PACC: 0340K; 0230; 4281

虽然非线性 Schrödinger 方程^[1-3]能够描述短脉冲 (10^{-12} s 数量级) 在单模光纤中传播的主要性质^[4-6], 由于实验观察到的输出脉冲的不对称^[7,8], 将方程修改为变形的非线性 Schrödinger 方程^[9], 随后又由于观察到孤子自频移等现象^[10,11], 认为在超短 (10^{-15} s 数量级) 和超强脉冲在单模光纤中的传播应当由带高阶修正的扩充的非线性 Schrödinger 方程来描写^[4,12,13], 它考虑到了横向不均匀性, 以及非线性色散和耗散的高阶项。

非线性 Schrödinger 方程的孤子解早已求出^[14,15], 其初条件问题也已研究^[16]. 对于变形的非线性 Schrödinger 方程, 除用运动坐标系中分离变量积分求得单孤子解^[17]外, 长期依靠数值计算^[18,19], 直到最近, 才由于采用了亚纯变换矩阵函数方法, 建立了孤子解的系统方法和多孤子解的显式^[20-23]. 对于带高阶修正的扩充的非线性 Schrödinger 方程, 一种以非线性、非局域(积分)变换为基础的解法已经提出^[13]. 在这一变换下, 方程的求解归结为高阶非线性 Schrödinger 方程的求解和计算出这一变换. 虽然高阶非线性 Schrödinger 方程可以如非线性 Schrödinger 方程一样用反散射法求解, 但是要算出多孤子解显式, 特别是要算出所用变换显式, 仍需要相当的技巧和努力, 所以至今仍未得到。

事实上, 广田直接法^[15]更适合实现这一任务. 它不单可以给出高阶非线性 Schrödinger 方程多孤子解显式, 而且正如下面将证明的也可以简单导出所用变换显式. 本文将由此给出带高阶修正的扩充的非线性 Schrödinger 方程的多孤子解显式。

为了应用, 给出 $N=2$ 时解的适用表示式. 并且从它导出渐近行为. 结果表明, 相互作用仍使解的渐近行为是一些分离的保持原有形状的单孤子解. 孤子的速度不因相互作用

* 国家自然科学基金资助的课题。

用而改变。儿玉和长谷川^[13]关于 β_2 和 β_3 项(见方程(1))影响渐近态的孤子速度的结论不能认为是正确的。

描述近单色波包在单模光纤中的传播,在考虑到高阶修正时,提出了含高阶修正的扩充的非线性 Schrödinger 方程

$$i\omega_t + \frac{1}{2}\omega_{xx} + |\omega|^2\omega + i\varepsilon\{\beta_1\omega_{xxx} + \beta_2(|\omega|^2\omega)_x + \beta_3(|\omega|^2)_x\omega\} = 0. \quad (1)$$

这里假定频谱宽 $\Delta\omega$ 与载波频率 ω_1 之比是一个小量 ε

$$\varepsilon \approx O\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_1}\right), \quad (2)$$

β_1, β_2 是实常数, β_3 一般是复数,在求(1)式之基本解时也认为是实常数。

为求(1)式之解,建议如下:考虑高阶的非线性 Schrödinger 方程

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u + i\varepsilon\beta_1\{u_{xxx} + 6|u|^2u_x\} = 0, \quad (3)$$

它是完全可积的。引入一个非线性、非局域的(积分)变换

$$w = u + i\varepsilon\left(3\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2\right)u_x + i\varepsilon(6\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3)u \int_{-\infty}^x |u(x't)|^2 dx', \quad (4)$$

不难验证,若 u 是(3)式之解,则(4)式决定的 w 将是(1)式的准至 ε 的解。因为(1)式本来就只准至 ε , 所以(1)式就能解出。

写出(3)和(4)式的显式。按广田直接法,设(3)式之解为如下形式:

$$u = 2 \frac{g}{h}, \quad (5)$$

式中 h 是实数,代入(3)式,得如下双线性方程:

$$\left\{i(\partial_t - \partial_{t'}) + \frac{1}{2}(\partial_x - \partial_{x'})^2 + i\varepsilon\beta_1(\partial_x - \partial_{x'})^3\right\} g(xt)h(x't')_{x'=x, t'=t} = 0, \quad (6)$$

$$(\partial_x - \partial_{x'})^2 h(xt)h(x't')_{x'=x, t'=t} = 8g(xt)\bar{g}(x't'). \quad (7)$$

这里 $\bar{g}$ 为 g 的复共轭。

由(7)式得

$$h_{xx}h - (h_x)^2 = 4|g|^2, \quad (8)$$

所以

$$\int_{-\infty}^x |u(x't)|^2 dx' = 4 \int_{-\infty}^x \frac{|g|^2}{h^2} dx = \frac{h_x}{h}. \quad (9)$$

这样,代入(4)式得(1)式之解

$$w = 2 \frac{g}{h} \left\{ 1 + i\varepsilon \left(3\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2 \right) \frac{g_x}{g} + i\varepsilon \left(3\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2 - \beta_3 \right) \frac{h_x}{h} \right\} \quad (10)$$

或

$$w = 2 \frac{g}{h} \exp \left\{ i\varepsilon \left(3\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2 \right) \frac{g_x}{g} + i\varepsilon \left(3\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2 - \beta_3 \right) \frac{h_x}{h} \right\}. \quad (11)$$

双线性方程(6)和(7)之解可以写为

$$g_N = \sum_{(\mu)} \mathcal{D}_1(\mu) \exp \left\{ \sum_{j=1}^{2N} (2s_j - \ln \alpha_j) \mu_j + \sum_{1 \leq j < k \leq 2N} A_{jk} \mu_j \mu_k \right\}, \quad (12)$$

$$h_N = \sum_{(\mu)} \mathcal{D}_2(\mu) \exp \left\{ \sum_{i=1}^{2N} (2s_i - \ln \alpha_i) \mu_i + \sum_{1 \leq j < k \leq 2N} A_{jk} \mu_j \mu_k \right\}, \quad (13)$$

式中

$$s_j = p_j x + (ip_j^2 - 4\varepsilon\beta_1 p_j')t + \gamma_j, \quad (14)$$

$$\alpha_j = \prod_{k \neq j} \frac{p_j - p_k}{p_j + \bar{p}_k} \frac{1}{p_j + \bar{p}_j} \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

p_i 和 γ_i 是复常数,

$$p_i = \bar{p}_{i-N}, \quad s_i = \bar{s}_{i-N}, \quad \alpha_i = \bar{\alpha}_{i-N}, \quad i = N+1, N+2, \dots, 2N, \quad (16)$$

$$\exp A_{jk} = \begin{cases} (p_j - p_k)^2 & j, k = 1, 2, \dots, N \text{ 或 } i, k = N+1, N+2, \dots, 2N, \\ (p_j + p_k)^{-2} & j = 1, 2, \dots, N \text{ 而 } k = N+1, N+2, \dots, 2N, \end{cases} \quad (17)$$

$$\mu_j = 1 \text{ 或 } 0, \quad (18)$$

$$\mathcal{D}_1(\mu) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^N \mu_i = \sum_{i=N+1}^{2N} \mu_i + 1; \\ 0 & \text{其它情况,} \end{cases} \quad (19)$$

$$\mathcal{D}_2(\mu) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^N \mu_i = \sum_{i=N+1}^{2N} \mu_i; \\ 0 & \text{其它情况.} \end{cases} \quad (20)$$

由于(12)和(13)式是显式,以它们代入(5)和(11)式,分别得到高阶非线性 Schrödinger 方程(3)和含高阶修正的扩充的非线性 Schrödinger 方程(1)的解的显式.

引入

$$\lambda_i = ip_i = \lambda_i' + i\lambda_i'', \quad (21)$$

$$V_i = 2\lambda_i' + 4\varepsilon\beta_1(3\lambda_i'^2 - \lambda_i''^2), \quad (22)$$

$$K_i = (\lambda_i'^2 - \lambda_i''^2) + 4\varepsilon\beta_1(\lambda_i'^3 - 3\lambda_i'\lambda_i''^2), \quad (23)$$

$$\gamma_i = \lambda_i''x_j + i\rho_i, \quad (24)$$

$$s_i = s_i' + is_i'', \quad (25)$$

$$s_i' = \lambda_i''(x - x_j + V_j t), \quad (26)$$

$$s_i'' = -(\lambda_i'x + K_i t + \rho_i), \quad (27)$$

$$\varphi_i = -\varepsilon(6\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3)2\lambda_i'' + \varepsilon(6\beta_1 - 3\beta_2 - 2\beta_3)\lambda_i''\tanh(2s_i'), \quad (28)$$

当 $N=1$ 时得

$$u_1 = 2\lambda_1''\text{sech}2s_1' \cdot \exp i2s_1'', \quad (29)$$

$$w_1 = u_1 \exp[\varepsilon(6\beta_1 - \beta_2)\lambda_1'] \cdot \exp(-i2\varphi_1). \quad (30)$$

当 $N=2$ 时得

$$\begin{aligned} g_2 = & \frac{p_1 + \bar{p}_2}{p_1 - p_2} (p_1 + \bar{p}_1) \exp 2s_1 + \frac{p_2 + \bar{p}_1}{p_2 - p_1} (p_2 + \bar{p}_2) \exp 2s_2 \\ & + \frac{\bar{p}_1 + p_2}{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} (\bar{p}_1 + p_1) \exp 2(s_1 + s_2 + \bar{s}_2) + \frac{\bar{p}_2 + p_1}{\bar{p}_2 - \bar{p}_1} (\bar{p}_2 + p_2) \exp 2(s_1 + \bar{s}_1 + s_2), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
h_2 = 1 + & \left| \frac{p_1 + \bar{p}_2}{p_1 - p_2} \right|^2 \exp 2(s_1 + \bar{s}_1) + \left| \frac{p_2 + \bar{p}_1}{p_2 - p_1} \right|^2 \exp 2(s_2 + \bar{s}_2) \\
& + \frac{(p_1 + \bar{p}_1)(p_2 + \bar{p}_2)}{|p_1 - p_2|^2} \{ \exp 2(s_1 + \bar{s}_2) + \exp 2(\bar{s}_1 + s_2) \} \\
& + \exp 2(s_1 + \bar{s}_1 + s_2 + \bar{s}_2). \quad (32)
\end{aligned}$$

由此不难得到 g_{2x} 和 h_{2x} . 以 G_2, H_2, G_2^* 和 H_2^*

分别表示 g_2, h_2, g_{2x} 和 h_{2x} 乘以

$$\frac{1}{4} |p_1 - p_2|^2 \exp[-2(s'_1 + s'_2)] \operatorname{sech} 2s'_1 \cdot \operatorname{sech} 2s'_2.$$

由(31), (32)式等不难得到

$$\begin{aligned}
G_2 = & \lambda_1'' \{ [(\lambda_1' - \lambda_2')^2 + \lambda_1''^2 - \lambda_2''^2] - i2\lambda_2''(\lambda_1' - \lambda_2') \tanh 2s'_2 \} \operatorname{sech} 2s'_1 \cdot \exp i2s'_1 \\
& + \lambda_2'' \{ [(\lambda_1' - \lambda_2')^2 + \lambda_1''^2 - \lambda_2''^2] - i2\lambda_1''(\lambda_2' - \lambda_1') \tanh 2s'_1 \} \operatorname{sech} 2s'_2 \cdot \exp i2s'_2, \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2 = & [(\lambda_1' - \lambda_2')^2 + \lambda_1''^2 + \lambda_2''^2] - 2\lambda_1''\lambda_2'' [\tanh 2s'_1 \cdot \tanh 2s'_2 \\
& + \operatorname{sech} 2s'_1 \cdot \operatorname{sech} 2s'_2 \cdot \cos 2(s'_1 - s'_2)], \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2^* = & 2\{(\lambda_1'' - i\lambda_1')\lambda_1''[(\lambda_1' - \lambda_2')^2 + \lambda_1''^2 - \lambda_2''^2] - i2\lambda_2''(\lambda_1' - \lambda_2') \tanh 2s'_2\} \\
& + \lambda_2''\lambda_1''[(\lambda_1' - \lambda_2')^2 + \lambda_1''^2 - \lambda_2''^2] - i2\lambda_2''(\lambda_1' - \lambda_2') (1 + \tanh 2s'_2) \} \operatorname{sech} 2s'_1 \\
& \cdot \exp i2s'_1 + 2\{(\lambda_2'' - i\lambda_2')\lambda_2''[(\lambda_2' - \lambda_1')^2 + \lambda_2''^2 - \lambda_1''^2] - i2\lambda_1''(\lambda_2' - \lambda_1') \tanh 2s'_1\} \\
& + \lambda_1''\lambda_2''[(\lambda_2' - \lambda_1')^2 + \lambda_2''^2 - \lambda_1''^2] - i2\lambda_1''(\lambda_2' - \lambda_1') (1 + \tanh 2s'_1) \} \\
& \times \operatorname{sech} 2s'_2 \cdot \exp i2s'_2, \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2^* = & 2(\lambda_1'' + \lambda_2'')[(\lambda_1' - \lambda_2')^2 + \lambda_1''^2 + \lambda_2''^2] - 4(\lambda_1'' + \lambda_2'')\lambda_1''\lambda_2'' \tanh 2s'_1 \cdot \tanh 2s'_2 \\
& + 2\lambda_1''[(\lambda_1' - \lambda_2')^2 + \lambda_1''^2 - \lambda_2''^2] \tanh 2s'_1 + 2\lambda_2''[(\lambda_1' - \lambda_2')^2 + \lambda_2''^2 - \lambda_1''^2] \tanh 2s'_2 \\
& + 4\lambda_1''\lambda_2''[(\lambda_1'' + \lambda_2'') \cos 2(s'_1 - s'_2) + (\lambda_1' - \lambda_2') \sin 2(s'_1 - s'_2)] \operatorname{sech} 2s'_1 \cdot \operatorname{sech} 2s'_2. \quad (36)
\end{aligned}$$

由(33)–(36)式, 得到当 $N=2$ 时高阶非线性 Schrödinger 方程(3)和含高阶修正扩充的非线性 Schrödinger 方程(1)的解

$$u_2 = 2G_2/H_2, \quad (37)$$

$$w_2 = u_2 \exp \left\{ i\varepsilon \left(3\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2 \right) G_2^*/G_2 + i\varepsilon \left(3\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2 - \beta_3 \right) H_2^*/H_2 \right\}. \quad (38)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, (37)式化为非线性 Schrödinger 方程的两孤子解.

现在讨论(37)和(38)式在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时的渐近行为. 设 $\lambda_1'', \lambda_2'' > 0$ 及

$$V_1 > V_2. \quad (39)$$

以 $\mathcal{Q}_i$ 表示 $x = x_i - V_i t$ ($i=1, 2$) 的邻域. 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 此两邻域在 x 坐标中从左到右分开如下:

$$\mathcal{Q}_2 \quad \mathcal{Q}_1. \quad (40)$$

此时, 在邻域 $\mathcal{Q}_2$ 中有

$$\operatorname{sech} 2s'_1 \approx 0, \quad (41)$$

$$\tanh 2s'_1 \approx 1; \quad (42)$$

在邻域 $\mathcal{Q}_1$ 中有

$$\operatorname{sech} 2s'_2 \approx 0, \quad (43)$$

$$\tanh 2s'_2 \approx -1. \quad (44)$$

于是看到在 Q_1 中,

$$G_2/H_2 \approx \frac{\lambda_1'' \{[(\lambda_1' - \lambda_2')^2 + \lambda_1''^2 - \lambda_2''^2] + i2\lambda_2''(\lambda_1' - \lambda_2')\} \operatorname{sech} 2s'_1 \cdot \exp i2s'_1}{(\lambda_1' - \lambda_2')^2 + \lambda_1''^2 + \lambda_2''^2 + 2\lambda_1''\lambda_2'' \tanh(2s'_1)}. \quad (45)$$

因而可以得到

$$\begin{aligned} u_2 &\approx 2\lambda_1'' \operatorname{sech} 2(s'_1 + \lambda_1'' \Delta_1^{(+)}) \cdot \exp i2(s'_1 - \delta_1^{(+)}) \\ &\approx 2\lambda_1'' \operatorname{sech} 2\lambda_1''(x - x_1 + V_1 t + \Delta_1^{(+)}) \cdot \exp(-i2(\lambda_1' x + K_1 t + \rho_1 + \delta_1^{(+)})), \end{aligned} \quad (46)$$

式中

$$\Delta_1^{(+)} = -\frac{1}{2} \lambda_1''^{-1} \ln \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2} \right|, \quad (47)$$

$$\delta_1^{(+)} = \frac{1}{2} \arg \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2} \right). \quad (48)$$

又有

$$G_2^*/G_2 \approx -i2\lambda_1, \quad (49)$$

$$H_2^*/H_2 \approx 2\lambda_1'' - 2\lambda_1'' \tanh 2(s'_1 + \lambda_1'' \Delta_1^{(+)}), \quad (50)$$

所以

$$\begin{aligned} w_2 &\approx 2\lambda_1'' \operatorname{sech} 2\lambda_1''(x - x_1 + V_1 t + \Delta_1^{(+)}) \cdot \exp(-i2(\lambda_1' x + K_1 t + \rho_1 + \delta_1^{(+)})) \\ &\quad \cdot \exp[\varepsilon(6\beta_1 - \beta_2)\lambda_1'] \cdot \exp(-i2\varphi_1^{(+)}). \end{aligned} \quad (51)$$

式中

$$\varphi_1^{(+)} = -\varepsilon(6\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3)2\lambda_1'' + \varepsilon(6\beta_1 - 3\beta_2 - 2\beta_3)\lambda_1'' \tanh 2(s'_1 + \lambda_1'' \Delta_1^{(+)}). \quad (52)$$

类似地, 可以求得 u_2 和 w_2 在 Q_2 中的表示式.

当 $t \rightarrow -\infty$ 时, 在 Q_1 中可得

$$u_2 \approx 2\lambda_1'' \operatorname{sech} 2\lambda_1''(x - x_1 + V_1 t + \Delta_1^{(-)}) \cdot \exp[-i2(\lambda_1' x + K_1 t + \rho_1 + \delta_1^{(-)})], \quad (53)$$

式中

$$\Delta_1^{(-)} = -\Delta_1^{(+)}, \quad (54)$$

$$\delta_1^{(-)} = -\delta_1^{(+)}. \quad (55)$$

又有

$$\begin{aligned} w_2 &\approx 2\lambda_1'' \operatorname{sech} 2\lambda_1''(x - x_1 + V_1 t + \Delta_1^{(-)}) \cdot \exp[-i2(\lambda_1' x + K_1 t + \rho_1 + \delta_1^{(-)})] \\ &\quad \cdot \exp \varepsilon(6\beta_1 - \beta_2)\lambda_1' \cdot \exp[-i2\varphi_1^{(-)} - i2\sigma_1^{(-)}], \end{aligned} \quad (56)$$

式中 $\varphi_1^{(-)}$ 可由(52)式中将 $\Delta_1^{(+)}$ 换为 $\Delta_1^{(-)}$ 而得. $\sigma_1^{(-)}$ 为

$$\sigma_1^{(-)} = -\varepsilon(6\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3)2\lambda_1''. \quad (57)$$

与(29)式比较, (46)和(53)式显示出高阶非线性 Schrödinger 方程的解 u_N 具有孤子解的性质, 因为(46)和(53)式与(29)式的性质完全相同. 以上各式表明, 孤子 1, 由于孤子 2 的存在, 在 $t \rightarrow -\infty$ 至 $t \rightarrow +\infty$ 时, 发生了中心移动 Δ_1 和相的移动 δ_1 ,

$$\Delta_1 = \Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)} = -\lambda_1''^{-1} \ln \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2} \right|, \quad (58)$$

$$\delta_1 = \delta_1^{(+)} - \delta_1^{(-)} = \arg \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2} \right). \quad (59)$$

与(30)式相比, (51)和(56)式显示出含高阶修正的扩充的非线性 Schrödinger 方程的解 w_N 具有孤子解的性质, 因为(51)和(56)式与(30)式的性质完全相同。由于孤子 2 的存在, 在 $t \rightarrow -\infty$ 至 $t \rightarrow +\infty$ 时, 中心移动 $\bar{\Delta}_1$ 和相移动 $\bar{\delta}_1$ 显然是

$$\bar{\Delta}_1 = \Delta_1, \quad (60)$$

$$\bar{\delta}_1 = \delta_1 + \varepsilon(6\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3)2\lambda_1'' + \varepsilon(6\beta_1 - 3\beta_2 - 2\beta_3)\lambda_1''\{\tanh 2(s_1' + \lambda_1''\Delta_1^{(+)} - \tanh 2(s_1' + \lambda_1''\Delta_1^{(-)}))\}. \quad (61)$$

虽然相移由于后一项比较复杂, 但是这并不影响包络的性质, 因此解的孤子解性质是确切的。注意到 β_2 和 β_3 的项并不影响孤子的速度。儿玉与长谷川关于 β_2 和 β_3 出现在孤子速度的表示式(见文献[13]的第 520 页)中的结论, 并不正确。

以上的处理仅仅针对具有反常群速色散, 且(1)式之后三项是小量的情形。但是数值计算^[19,24]和理论论证^{[4], [1]}表明, 特别是 $(|w|^2 w)_x$ 项的系数可能不小, 因此需要进一步采取只将 w_{xxx} 和 $(|w|^2)_x w$ 项看作小量的处理。同时对于正常群速色散的情况(即(1)式中 $|w|^2 w$ 加一负号), 以上方法不能导出它的孤子解, 但可以证明^[21,22]这时仍存在孤子解。这些仍需另行研究。

感谢陈英礼教授、刘颂豪教授的讨论和支持。

- [1] P. Kelley, *Phys. Rev. Lett.*, **15**, (1965), 1005.
- [2] V. I. Talanaov, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **2**, (1965), 218.
- [3] A. Hasegawa and F. Tappert, *Appl. Phys. Lett.*, **23**, (1973), 142.
- [4] S. A. Akhmanov, V. A. Vysloukh and A. S. Chirkin, *Uspekhi Fiz. Nauk*, **149**, (1986), 449.
- [5] D. Cotter, *Opt. Quant. Electron.*, **19**, (1987), 1.
- [6] G. Veith, *Fiber and Integrated Optics*, **7**, (1988), 205.
- [7] R. H. Stolen and C. Lin, *Phys. Rev.*, **A17**, (1978), 1448.
- [8] H. Nakatsuka, D. Grisckowsky and A. C. Balant, *Phys. Rev. Lett.*, **47**, (1981), 910.
- [9] N. Tzoar and M. Jain, *Phys. Rev.*, **A23**, (1981), 1266.
- [10] F. M. Mitschke and L. F. Mollenauer, *Opt. Lett.*, **11**(1986), 659.
- [11] J. P. Gordon, *Opt. Lett.*, **11**(1986), 662.
- [12] Y. Kodama, *J. Stat. Phys.*, **39**(1985), 597.
- [13] Y. Kodama and A. Hasegawa, *IEEE J. Quant. Electron.*, **QE-23** (1987), 510.
- [14] V. I. Zakharov and A. B. Shabat, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **61**(1971), 118.
- [15] R. Hirota, *J. Math. Phys.*, **14**(1973), 805.
- [16] J. Satsuma and N. Yajima, *Supp. Prog. Theor. Phys.*, **55**(1974), 284.
- [17] D. Anderson and M. Lisak, *Phys. Rev.*, **A27** (1983), 1393.
- [18] E. A. Golovchenko, E. M. Dianov, A. M. Prokhonov and V. N. Serkin, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **42** (1985), 74.
- [19] K. Ohkuma, Y. H. Ichikawa and Y. Abe, *Opt. Lett.*, **12**(1987), 516.
- [20] 陈宗蕴、黄念宁, 科学通报, **34**, (1989), 1614.
- [21] Z. Y. Chen and N. N. Huang, *Phys. Lett.*, **A142**(1989), 31.
- [22] Z. Y. Chen and N. N. Huang, *Opt. Lett.*, **15**(1990), 4.
- [23] Z. Y. Chen and N. N. Huang, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 4066.
- [24] E. A. Golovchenko, E. M. Dianov, D. V. Mamyshev and A. M. Prokhonov, *Opt. Quant. Electron.*, **20** (1988), 343.

1) 郭祺等, 非线性导波光学研讨会上的报告, 广州, 1月(1990).

SOLITON SOLUTIONS OF THE GENERALIZED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH HIGHER-ORDER CORRECTIONS BY THE DIRECT METHOD OF HIROTA

LIU ZHONG-ZHU

Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074

HUANG NIAN-NING

Department of Physics, Wuhan University, Wuhan, 430072

(Received 12 February 1990)

ABSTRACT

By using the direct method of Hirota, explicit multi-soliton solutions are found for the generalized nonlinear Schrödinger equation with higherorder corrections which describes the ultra-short pulse propagation along monomode optical fibers.

PACC: 0340K; 0230; 4281