

极端为任意角的记录磁头场理论的研究

姚 学 标

安徽大学物理系, 合肥, 230039

1990 年 1 月 3 日收到

本文用 Schwartz-Christoffel 变换法, 研究极端为任意角度的磁头场的空间分布, 给出一般实数型的理论公式, 并进行数值解和讨论.

PACC: 7530; 4110F; 0390

一、引 言

在磁记录物理中, 有关磁头场的理论计算一般均采用 Karlquist 公式^[1]. 然而, 该公式是在假设磁头极缝间磁势为线性分布和极端为直角的简化磁头模型等条件下推导出来的, 所以, 它用于各种实际磁头的理论分析, 只能提供大致概况, 而不能区分磁头的精细结构. 若选用极端为任意角的磁头模型, 并能导出其磁场分布的理论公式, 则对于各种实际磁头将能提供更好的近似, 为记录磁头的设计提供更正确的理论依据.

我们知道, 数学物理方法中的 Schwartz-Christoffel 变换(简称 S-C 变换)可将边界形状复杂的解析区域转化为边界形状简单的区域, 因此, 特别适合于研究形状复杂的记录磁头. 文献 [2, 3] 均先后利用该方法, 研究了极端为任意角的磁头场问题. 我们发现, 这两文均未能给出一般实用的理论公式. 其中, 文献 [2] 既未给出磁场沿磁头缝隙周围空间分布的明确的理论公式, 且计算结果也存在差错. 比如该文作者将端角为零时解得的转换函数积分常数, 认为可以适用于任意极端角磁头磁场数值的计算, 而我们的计算证明, 积分常数是随着极端角不同而变化的, 故可认定该文的计算定会发生差错. 文献 [3] 也仅给出比较繁琐的复数型的变换方程式.

基于上述情况, 本文再一次利用 S-C 变换法, 对极端为任意角度的记录磁头重新进行研究. 将严格导出磁头场水平分量和垂直分量在磁头缝隙周围空间分布的一般实数型的理论公式, 并用来进行数值解, 最后将进行有意义的讨论.

二、磁头场理论公式的推导

1. 磁头的计算模型

计算模型如图 1 所示. 其中 θ 为磁头极端角, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, 改变 θ 值可以近似任何实际磁头; g 为磁头缝隙宽度.

计算条件: 1) 磁头相对于缝隙中心为对称结构, 且磁头长度及宽度相对缝宽为无限大, 均与实际磁头相符; 2) 因磁头均由高磁导率的软磁材料制成, 则两边磁头表面各为等

磁势面, 设磁势分别为 U_0 和 $-U_0$, 缝隙中心处磁势为零; 3) 不考虑磁层介质对磁头场的影响 (设周围介质磁导率 $\mu = 1$).

原始方程 根据给定条件和场的叠加原理, 求解磁头在缝隙附近空间产生的磁场时, 可简化为一个二维问题, 设二维平面为 $z = x + jy$, 则磁头缝隙外空间磁场可用磁标势 $u(x, y)$ 来描述. 以 z_1, z_2, z_3, z_4 为边界, 其左侧所成的多边形区域内无磁荷分布, 磁标势应满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u(x, y) = 0. \quad (1)$$

(1) 式即为原始方程, 其通解是任意解析函数的实部或虚部, 而满足给定边界条件的解就是要求的磁势.

2. 用 S-C 变换法求复势

图 1 中 z_1, z_2, z_3, z_4 是多角形边界, 不便直接求解, 现利用第二个复平面 $F = \xi + j\eta$, 通过 S-C 变换, 将该多边形区域转换为 F 的上半平面, 如图

2 所示, 与 z_1, z_2, z_3, z_4 顶点的对应点分别为 F_1, F_2, F_3, F_4 , 则 S-C 变换式为

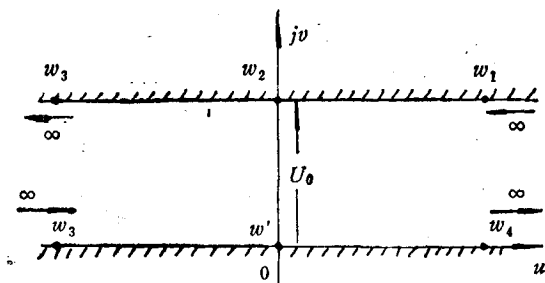


图 3 S-C 变换平面之二

因为 z_3 在 ∞ 处, 且 $\alpha_3 = \pi$, 则常数 A 可利用两个平行边间的距离 $g/2$ 求得^[4]

$$A = j \frac{g}{2\pi},$$

现利用变量置换求解 (3) 式, 令

$$\beta = m/n \approx (1 - \theta/\pi), \quad m, n \in [N], \text{ 互质, } n \geq m, \quad (4)$$

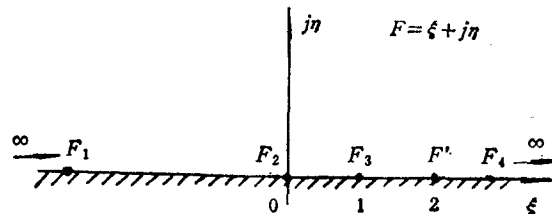


图 2 S-C 变换平面之一

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dF} &= A \prod_{i=1}^4 (F - F_i)^{-\frac{\alpha_i}{\pi}} \\ &= AF^{1-\frac{\theta}{\pi}}(F-1)^{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

所以

$$z = A \int \frac{F^\beta}{F-1} dF + B. \quad (3)$$

(2), (3) 式中, $\alpha, \dots, \alpha_4$ 分别为多边形 z_1, z_2, z_3, z_4 的外角, A, B 为待定常数, $\beta = (1 - \theta/\pi)$.

并设

$$T = F^{\frac{1}{n}}, \quad (5)$$

则 $\int \frac{F^{\frac{m}{n}}}{F-1} dF$ 可化解为

$$\begin{aligned} \int \frac{F^{\frac{m}{n}}}{F-1} dF &= \int \frac{F^{\frac{m}{n}}}{F-1} dF = n \int \frac{T^{m+n-1}}{T^n-1} dT \\ &= \frac{n}{m} T^m + \sum_{k=0}^{n-1} (A_{k1} + jA_{k2}) \ln(T - T_k), \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$T_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + j \sin \frac{2k\pi}{n} = e^{j \frac{2k\pi}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, (n-1), \quad (7)$$

$$A_{k1} = \operatorname{Re} \left[\frac{n T_k^{m-1}}{\prod_{l \neq k} (T_k - T_l)} \right]; \quad A_{k2} = \operatorname{Im} \left[\frac{n T_k^{m-1}}{\prod_{l \neq k} (T_k - T_l)} \right]. \quad (8)$$

至此, (3) 式可写为

$$z = j \frac{g}{2\pi} \left[\frac{n}{m} F^{\frac{m}{n}} + \sum_{k=0}^{n-1} (A_{k1} + jA_{k2}) \ln(F^{\frac{1}{n}} - T_k) \right] + B. \quad (9)$$

由边界条件 $F=0$ 时, $z = -\frac{g}{2}$, 得常数 B 为

$$B = \frac{g}{2} \sum_{k=1}^{n-1} A_{k1} \left(\frac{2k}{n} - 1 \right) + j \frac{g}{2} \sum_{k=1}^{n-1} A_{k2} \left(\frac{2k}{n} - 1 \right). \quad (10)$$

考虑到 $z = x + jy$ 和 $F = \zeta + j\eta$, 则 (10) 式可化为实数型对应关系式

$$\begin{aligned} x &= -\frac{g}{2\pi} \left[\frac{n}{m} \rho^{\frac{m}{n}} \sin \frac{m}{n} \varphi + \sum_{k=0}^{n-1} (A_{k2} \ln P_k + A_{k1} \varphi_k) \right] + \frac{g}{2} \sum_{k=1}^{n-1} A_{k1} \left(\frac{2k}{n} - 1 \right); \\ y &= \frac{g}{2\pi} \left[\frac{n}{m} \rho^{\frac{m}{n}} \cos \frac{m}{n} \varphi + \sum_{k=0}^{n-1} (A_{k1} \ln P_k + A_{k2} \varphi_k) \right] + \frac{g}{2} \sum_{k=1}^{n-1} A_{k2} \left(\frac{2k}{n} - 1 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned} \rho &= |F| = \sqrt{\zeta^2 + \eta^2}; \quad \varphi = \arg F = \arctan \eta / \zeta; \\ P_k &= \left[\left(\rho^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi}{n} - \cos \frac{2k\pi}{n} \right)^2 + \left(\rho^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\varphi}{n} - \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \\ \varphi_k &= \arctan \left[\rho^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\varphi}{n} - \sin \frac{2k\pi}{n} \right] / \left[\rho^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi}{n} - \cos \frac{2k\pi}{n} \right] \\ &\quad k = 0, 1, \dots, (n-1). \end{aligned} \quad (12)$$

已知左边磁头极表面的磁势为 U_0 , 缝隙中心界面上的磁势为零, 则 F 平面 ζ 轴上的 F_1, F_2, F_3 部分和 F_3, F_4 部分也分别具有磁势 U_0 和 0, 这样的边界条件仍然不便于求解。为此, 利用平行板电容器模型, 再利用第三个复平面 $w = u + jv$, 将 F 的上半平面通过 S-C 变换到 w 上磁势分别为 U_0 和 0 两条平行线所包围的内空间, F_1, F_2, F_3, F_4 的对应点分别为 w_1, w_2, w_3, w', w_4 , 如图 3 所示。显然, w 平面上平行于实轴的直线为等磁势线, w 的虚部代表磁势, w 即为所求的复势。

同上述步骤相似, w 对 F 的 S-C 变换式可求得

$$w = C \ln(F - 1) + D. \quad (13)$$

利用条件 $F = F_2 = 0$ 时, $w = w_2 = jU_0$; $F = F' = 2$ 时, $w = w' = 0$, C, D 常数可分别求得

$$C = U_0/\pi, D = 0,$$

于是,

$$w = \frac{U_0}{\pi} \ln(F - 1). \quad (14)$$

3. 磁场分布的理论公式

由 (2) 和 (14) 式可以导出

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dF} \frac{dF}{dz} = -\frac{2U_0}{g} F^{-m/n}. \quad (15)$$

另一方面, 根据 Cauchy-Riemann 定理, 则有

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial v}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + j \frac{\partial u}{\partial x},$$

于是, 由 $H = -\nabla u$, 得到二维磁场分量的表达式为

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{\partial u}{\partial x} = -\operatorname{Im}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{2U_0}{g} \rho^{-\frac{m}{n}} \cos\left(\frac{m}{n} \varphi\right), \\ H_y &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{Re}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{2U_0}{g} \rho^{-\frac{m}{n}} \sin\left(\frac{m}{n} \varphi\right). \end{aligned} \quad (16)$$

最后, 将 (11) 和 (16) 式取标准形式, 并令 $H_0 = 2U_0/g$, 得到磁场水平分量和垂直分量与磁头空间坐标对应的方程组

$$\begin{aligned} \frac{H_x}{H_0} &= \rho^{-\frac{m}{n}} \cos \frac{m}{n} \varphi; & \frac{H_y}{H_0} &= \rho^{-\frac{m}{n}} \sin \frac{m}{n} \varphi; \\ \frac{x}{g} &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{n}{m} \rho^{-\frac{m}{n}} \sin \frac{m}{n} \varphi + \sum_{k=0}^{n-1} (A_{k2} \ln P_k + A_{k1} \varphi_k) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} A_{k1} \left(\frac{2k}{n} - 1 \right); \\ \frac{y}{g} &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{n}{m} \rho^{-\frac{m}{n}} \cos \frac{m}{n} \varphi + \sum_{k=0}^{n-1} (A_{k1} \ln P_k - A_{k2} \varphi_k) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} A_{k2} \left(\frac{2k}{n} - 1 \right). \end{aligned} \quad (17)$$

(17) 式就是适用于分析任意极端角磁头场的实数型理论公式。磁场分量 H_x 和 H_y 随磁头空间坐标 x 和 y 的分布, 可以通过 F 平面的对应点坐标 ζ 和 η 进行数值解。

三、磁头场空间分布的数值解

用 (17) 式进行磁头场分布的数值解时, 可以先指定 x/g 和 y/g 值, 再利用电子计

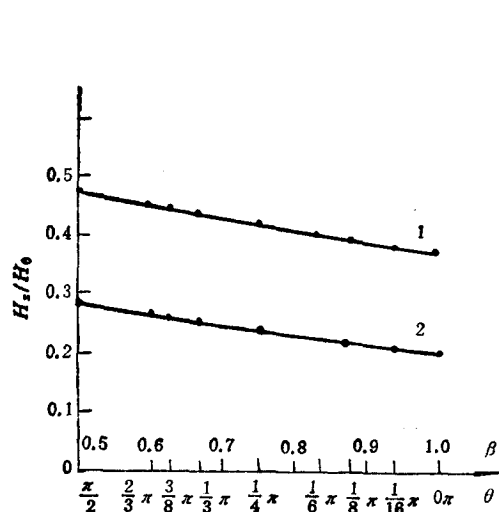


图4 对称轴上磁场随 θ 角变化曲线 曲线1为 $x/g = 0$, $y/g = 0.5$ 时; 曲线2为 $x/g = 0$, $y/g = 1.0$ 时

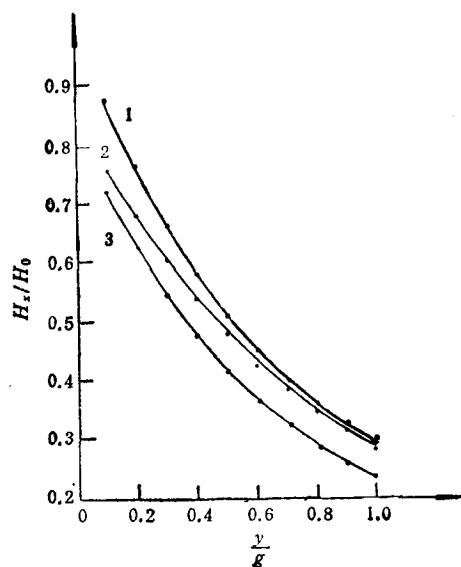


图5 两种方法计算的磁场分布比较 $x/g = 0$; 曲线1为 Karlquist 公式计算的 Karlquist 公式为 $\begin{cases} H_x/H_0 = (2/\pi) \arctan[1/(2y/g)], \\ H_y/H_0 = 0; \end{cases}$ 曲线2为本文(17)式计算的 ($\theta = \pi/2$); 曲线3为本文(17)式计算的 ($\theta = \pi/4$)

算机按循环逼近程序解出 F 的模及辐角, 则求得 H_x/H_0 和 H_y/H_0 的相应值。

为简单起见, 本文仅对磁场沿缝隙中心轴 y 的分布及随极端角的变化进行数值解。计算空间是距磁头缝隙前端半个缝宽和一个缝宽处, 这两个距离都趋近于记录磁介质和磁头间通常的分离尺度。在 y 轴上, 磁场的水平分量最大, 垂直分量为零。计算精确到小数点后第三位。计算结果如图4中曲线1和2所示。

同时, 将由 Karlquist 公式计算的结果与由(17)式计算的结果做比较, 如图5所示。其中, 曲线1和2是两种计算方法的对等比较(磁头极端角均为直角), 而曲线1和3则显示两种计算方法对磁头精细结构的差异(后者是由本文公式计算的, 端角为 $\pi/4$)。计算的数据列于表1。

表1 对称轴上磁场随 θ 角变化

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{16}\pi$	0π
H_x/H_0									
y/g									
0.5	0.478	0.449	0.442	0.432	0.415	0.400	0.394	0.386	0.378
1.0	0.291	0.264	0.258	0.249	0.235	0.222	0.217	0.210	0.203

注: 对应于 $\eta = 0$, 由(17)式计算出的 x/g 总是为0, 这对本公式也是一种验证。

四、讨 论

1. 本文导出的任意极端角之磁头场的方程组(17), 已化为实数型, 便于实际数值解, 而且给出分别对纵向磁记录和垂直磁记录有作用的磁场水平分量和垂直分量的公式, 有利于两种磁记录系统的理论分析。

2. 由图 4 可见, 在常用的记录距离(如半个缝宽)上, 磁场是随着 θ 角减小单调下降, 当 θ 为零时, 磁场下降为 $\theta = \pi/2$ 时的 79%, 这与文献[5]的结论相一致, 而不存在文献[2]中所提出的 $7\pi/18$ 最佳端角情况。本文计算中, 不存在文献[2]中无穷数列情况, 数据是相互验证的, 因此是可靠的。由此可见, 在纵向磁记录中, 为了提高磁记录的灵敏度、效率和保真度, 宜采用端角趋近直角的记录磁头。比较该图中曲线 1 和曲线 2, 可以清楚地看出, 随着记录距离的增大(如记录磁介质与磁头间距增至 1 个磁头缝宽时), 磁场将显著减小(仅为半个磁头缝宽间距时的 53%—60%)。这就给纵向磁记录的进一步发展提出一个技术课题, 即为了提高记录速度而进一步减小记录磁头缝宽时, 为保证磁记录的质量, 应该如何相应地提高磁记录介质表面的平整度, 从而进一步减小磁介质与磁头的间距, 否则, 将会降低磁记录的灵敏度和效率, 增大磁记录的失真度。

3. 由图 5 可见, 对于极端为直角的磁头, 在距磁头为半缝宽内的距离时, 用 Karlquist 公式计算的误差偏大, 原因是在此范围内假设磁势为线性分布的近似条件与实际情况偏离较大所致。但是, 在实用的记录距离内, 两种计算结果趋于相同, 所以用 Karlquist 公式计算极端为直角型的磁头磁场是可行的。比较图 5 中曲线 1 与曲线 3, 可以明显看到, 对于极端为任意角的磁头, 再用 Karlquist 公式进行分析, 就会产生很大的误差, 而利用本文导出的理论公式, 由于计算条件趋近于实际情况, 则计算结果应更精确, 可为磁头设计提供较可靠的理论依据。

[1] O. Karlquist, *Trans. Reyel. Inst. of Thech., Clockholm*, **86**(1954), 27.

[2] E. E. Francis, T.C. Ku, *IBM J. of Res. and Develop.*, **6**(1962), 260.

[3] 保坂, 電気通信学会雑誌, **49**(1966), 1279.

[4] 郭敦仁, 数学物理方法, 人民教育出版社, 北京, (1978), 第 20 章.

[5] A. D. Booth, *Brit. J. Appl. Phys.*, **3**(1952), 307.

A THEORETICAL STUDY ON THE MAGNETIC FIELD OF A RECORDING HEAD WITH ARBITRARY POLE-ANGLE

YAO XUE-BIAO

Department of Physics, Anhui University, Hefei, 230039

(Received 3 January 1990)

ABSTRACT

In this paper, the distribution of the magnetic field of a recording head with arbitrary pole-angle in the vicinity of the head's air gap is studied by the method of Schwartz-Christoffel transformation. The theoretical formulas are real, and the numerical values of the distribution of the field are obtained. Some applications are also discussed.

PACC: 7530; 4110F; 0390