

具有 Hulthén 型势的 Dirac 方程的束缚态*

胡 嗣 柱 苏 汝 铿

复旦大学物理系, 上海, 200433

1990 年 10 月 4 日收到

本文给出, 具有一维 Hulthén 型标量势和矢量势的 Dirac 方程的束缚态精确解。对于三维情况, 在 Hulthén 型标量势和矢量势相等的条件下, 给出 Dirac 方程的 S 波解。

PACC: 0365; 1240Q

一、引 言

在强耦合条件下, 在势场中运动的粒子的相对论效应变得很重要^[1,2]。在以前的工作^[3-5]中, 对一维和三维具有标量势和矢量势的 Dirac 方程的束缚态解和散射态解, Schwinger 机制等作了分析和讨论。由于三维的 δ 函数型的势阱可被认为是力程趋于零时 Hulthén 势的特例, 这一势场又能比较好地解释碱性卤化物 F 色心的电子性质, 而且, 具有 Hulthén 势的薛定谔方程的 S 波解能通过超几何函数解析地给出^[6], 因此, 讨论 Hulthén 势的相对论效应最近引起了人们的兴趣。Dominguez-Adame 等人讨论了具有 Hulthén 势的 Klein-Gordon 方程的 S 波束缚态解和散射态解^[7,8]。本文将把这些讨论推广到 Dirac 方程的情况。本文将给出: 1) 对具有一维标量 Hulthén 势和一维矢量 Hulthén 势的 Dirac 方程, 能谱所满足的方程和束缚态波函数; 2) 对三维情况, 在 Hulthén 标量势和矢量势相等的条件下, 对量子数 $k = -1$ 的态 ($k = \pm(j + \frac{1}{2})$), 求得它的能级和波函数。这些精确的波函数解均可通过特殊函数解析地给出。

二、一维 Hulthén 势

一维标量 Hulthén 势 $S(z)$ 和一维矢量 Hulthén 势 $V(z)$ 具有如下形式:

$$S(z) = -S_0 \frac{e^{-z/a}}{1 - e^{-z/a}} \quad (S_0 > 0); \quad V(z) = -V_0 \frac{e^{-z/a}}{1 - e^{-z/a}} \quad (V_0 > 0), \quad (1)$$

相应的 Dirac 方程是

$$\{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta[M + S(z)]\}\phi(x, y, z) = [E - V(z)]\phi(x, y, z). \quad (2)$$

取

* 国家自然科学基金与国家教育委员会博士点基金资助的课题。

$$\psi = \varphi(z) e^{i(p_1 x + p_2 y)}, \quad (3)$$

式中 $\varphi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$ 是旋量波函数, p_1, p_2 是常动量。由 (2) 式得 $\varphi(z)$ 满足的方程是

$$\gamma_3 \frac{d\varphi}{dz} = \{\gamma_4(E - V(z)) - (M + S(z)) - i\gamma_1 p_1 - i\gamma_2 p_2\} \varphi, \quad (4)$$

式中 γ_μ 是 4×4 Dirac 矩阵。以 $\gamma_3 \frac{d}{dz}$ 作用于方程 (4) 等号, 两端得

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} &= \left[-(E - V)^2 + (M + S)^2 + p_1^2 + p_2^2 \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} 0 & i(V' - S') \\ i(V' + S') & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \\ \frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} &= \left[-(E - V)^2 + (M + S)^2 + p_1^2 + p_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & i(V' - S') \\ i(V' + S') & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

以 $V(z)$ 和 $S(z)$ 的表示式 (1) 代入方程 (5), 并引入新变量 $x = e^{-z/a}$ 。为求出禁闭的束缚态解, 要求 $S_0 > V_0$ [4]。用文献 [3] 的方法作正则变换

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

式中

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{S_0 - V_0} & \sqrt{S_0 - V_0} \\ i\sqrt{S_0 + V_0} & -i\sqrt{S_0 + V_0} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

使方程 (5) 中的矩阵变为对角矩阵, 从而使 φ_1 和 φ_3 , φ_2 和 φ_4 的方程退耦, 得出

$$\begin{aligned} x^2 f'' + x f' + \left[\alpha^2 - \frac{\beta^2 x}{1-x} + \frac{\zeta^2 x^2}{(1-x)^2} \right] f &= 0, \\ x^2 g'' + x g' - \left[\alpha^2 - \frac{\delta^2 x}{1-x} + \frac{\eta^2 x^2}{(1-x)^2} \right] g &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 f 是 U_1 或 $\tilde{U}_2$, g 是 U_2 或 $\tilde{U}_1$, 系数 $\alpha, \beta, \zeta, \delta, \eta$ 满足

$$\begin{aligned} \alpha &= a \sqrt{M^2 - E^2 + p_1^2 + p_2^2}, \\ \beta &= a \sqrt{2EV_0 + 2MS_0 + \frac{1}{a} (S_0^2 - V_0^2)^{1/2}}, \\ \zeta &= a \sqrt{S_0^2 - V_0^2 - \frac{1}{a} (S_0^2 - V_0^2)^{1/2}}, \\ \delta &= a \sqrt{2EV_0 + 2MS_0 - \frac{1}{a} (S_0^2 - V_0^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\eta = a \sqrt{S_0^2 - V_0^2 + \frac{1}{a} (S_0^2 - V_0^2)^{1/2}}.$$

方程(8)的边界条件是: 当 $x = 0$ (即 $z \rightarrow +\infty$) 和 $x \rightarrow \infty$ (即 $z \rightarrow -\infty$) 时, 有 $f = 0$ 和 $g = 0$.

先求 f 满足的方程(8)的解. 为此, 作代换

$$f(x) = x^\alpha (1-x)^{1+\lambda} v(x), \quad (10)$$

式中 $\lambda = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 则方程(8)变为超几何方程

$$x(1-x)v'' + [(2\alpha+1) - (2\alpha+2\lambda+3)x]v' - [(2\alpha+1)(1+\lambda) - \beta^2]v = 0. \quad (11)$$

它的解是超几何函数. 因此方程(8)满足条件 $f|_{x=0} = 0$ 的解是

$$f(x) = x^\alpha (1-x)^{1+\lambda} F(\alpha + \lambda + 1 + \mu, \alpha + \lambda + 1 - \mu, 2\alpha + 1; x). \quad (12)$$

式中 $\mu = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2} = a\sqrt{(M+S_0)^2 + p_1^2 + p_2^2 - (E-V_0)^2}$, 对于束缚态解, μ 是实数. 利用超几何函数的公式

$$\begin{aligned} F(A, B, C, z) &= \frac{\Gamma(C)\Gamma(B-A)}{\Gamma(C-A)\Gamma(B)} (-z)^{-A} F(A, A-C+1, A-B+1; z^{-1}) \\ &+ \frac{\Gamma(C)\Gamma(A-B)}{\Gamma(C-B)\Gamma(A)} (-z)^{-B} F(B, B-C+1, B-A+1; z^{-1}), \end{aligned} \quad (13)$$

当 $x \gg 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\alpha-\lambda+\mu)\Gamma(\alpha+\lambda+\mu+1)} (-x)^\mu \\ &+ \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\alpha-\lambda+\mu)\Gamma(\alpha+\lambda+1-\mu)} (-x)^{-\mu}. \end{aligned} \quad (14)$$

于是由边界条件 $f|_{x \rightarrow \infty} = 0$ 得到一个量子化条件

$$\alpha - \lambda + \mu = 1 - n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (15)$$

同法可求出满足方程(8)的 g 的解, 结果是

$$g(x) = x^\alpha (1-x)^{1+\rho} F(\alpha + \rho + \mu + 1, \alpha + \rho - \mu + 1, 2\alpha + 1; x). \quad (16)$$

其中 $\rho = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \eta^2\right)^{1/2}$, 相应于 g 的另一个量子化条件是

$$\alpha - \rho + \mu = 1 - m \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (17)$$

由(15)和(17)式得, 束缚态存在的必要条件是

$$m - n = \pm 1$$

或

$$S_0^2 - V_0^2 = \frac{(m-n)^2}{4} (m \neq n), \quad (18)$$

方程(8)的解是

$$\begin{aligned} f(x) &= x^\alpha (1-x)^{1+\lambda} G_n(x), \\ g(x) &= x^\alpha (1-x)^{1+\rho} H_m(x), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} G_n(x) &= F(2\lambda + 2 - n, 2\lambda - 2\mu + 2 - n, 2\alpha + 1; x), \\ H_m(x) &= F(2\rho + 2 - m, 2\rho - 2\mu + 2 - m, 2\alpha + 1; x) \end{aligned} \quad (20)$$

于是最后得到旋量波函数 φ 的各个分量是

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \sqrt{S_0 - V_0} [c_1 x^\alpha (1-x)^{1+\lambda} G_n(x) + c_2 x^\alpha (1-x)^{1+\rho} H_m(x)], \\ \varphi_2(x) &= \sqrt{S_0 - V_0} [c_3 x^\alpha (1-x)^{1+\rho} H_m(x) + c_4 x^\alpha (1-x)^{1+\lambda} G_n(x)], \\ \varphi_3(x) &= i\sqrt{S_0 + V_0} [c_1 x^\alpha (1-x)^{1+\lambda} G_n(x) - c_2 x^\alpha (1-x)^{1+\rho} H_m(x)], \\ \varphi_4(x) &= i\sqrt{S_0 + V_0} [c_3 x^\alpha (1-x)^{1+\rho} H_m(x) - c_4 x^\alpha (1-x)^{1+\lambda} G_n(x)]. \end{aligned} \quad (21)$$

将 (21) 式代入方程 (4), 可给出系数 c_1, c_2, c_3, c_4 所满足的方程组, 它是

$$\begin{aligned} \left[(MS_0 + EV_0) - \frac{\alpha}{a} W_0 \right] c_1 - (MV_0 + ES_0)c_2 + (p_1 - ip_2)iW_0c_3 &= 0, \\ (MV_0 + ES_0)c_1 - \left[(MS_0 + EV_0) + \frac{\alpha}{a} W_0 \right] c_2 + (p_1 - ip_2)iW_0c_4 &= 0, \\ (p_1 + ip_2)iW_0c_1 + (MS_0 + EV_0)c_3 + \left[-(MV_0 + ES_0) + \frac{\alpha}{a} W_0 \right] c_4 &= 0, \\ (p_1 + ip_2)iW_0c_2 + \left[(MV_0 + ES_0) + \frac{\alpha}{a} W_0 \right] c_3 - (MS_0 + EV_0)c_4 &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $W_0 = \sqrt{S_0^2 - V_0^2}$. 不难证明, 方程组 (22) 的系数行列式为零, 即方程组是线性相关的. 可以将 c_2, c_3, c_4 表示为 c_1 的函数. 而系数 c_1 可由波函数 ψ 的归一条件给出. 这样, 就完整地给出同时具有一维标量 Hulthén 势和矢量 Hulthén 势下的束缚态能级和波函数精确解.

三、三维 Hulthén 势

对于球对称的三维 Hulthén 势, 在标量势 $S(r)$ 和矢量势 $V(r)$ 相等的条件下^[4], 即在取

$$S(r) = V(r) = -V_0 \frac{e^{-r/a}}{1 - e^{-r/a}} \quad (V_0 > 0), \quad (23)$$

求 Dirac 方程的 S 波解. Dirac 方程是

$$\{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta[M + S(r)]\} \psi(r, \theta, \varphi) = [E - V(r)] \psi(r, \theta, \varphi). \quad (24)$$

用通常惯用的方法^[9], 取

$$\psi = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} i f(r) \Phi_{j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, i, m} \\ g(r) \Phi_{j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, i, m} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\Phi_{j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, i, m} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, i, m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

以分离出 Dirac 方程的径向部分,得

$$-f' - \frac{k}{r}f = (E + M)g, \quad g' - \frac{k}{r}g = [E - M - 2V(r)]f, \quad (27)$$

式中量子数 $k = \pm \left(j + \frac{1}{2}\right)$.

现在求 $k = -1$ 时的解. 引入代换 $x = \exp(-r/a)$, 在方程组 (27) 中消去 g 后, 得 f 满足的方程为

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} - \left(\alpha^2 - \frac{\beta^2 x}{1-x}\right)f = 0, \quad (28)$$

式中 $\alpha = a\sqrt{M^2 - E^2}$, 对于束缚态, α 是实数, $\beta = a\sqrt{2V_0(M + E)}$. 由边界条件 $\psi(0, \theta, \varphi)$ 不发散及 $\psi(\infty, \theta, \varphi) = 0$ 可得出方程 (28) 的边界条件是 $f|_{x=1} = 0$, $f|_{x=0} = 0$. 作函数代换

$$f = x^\alpha(1-x)v(x), \quad (29)$$

由 (28) 式得 $v(x)$ 所满足的方程是超几何方程

$$x(1-x)v'' + [(2\alpha+1) - (2\alpha+3)x]v' - [(2\alpha+1) - \beta^2]v = 0, \quad (30)$$

其解是

$$f(x) = x^\alpha(1-x)F(\alpha+1+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \alpha+1-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, 2\alpha+1; x). \quad (31)$$

(31) 式显然满足边界条件 $f|_{x=0} = 0$. 为满足边界条件 $f|_{x=1} = 0$, 将 (31) 式改写为

$$f(x) = x^\alpha(1-x) \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(-1)}{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma)} F(\alpha+1+\gamma, \alpha+1-\gamma, 2; 1-x) \\ + x^\alpha \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1+\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)} F(\alpha+\gamma, \alpha-\gamma, 0; 1-x), \quad (32)$$

式中 $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. 注意到当 $x \approx 1$ 时,

$$f \approx \frac{\Gamma(-1)}{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma)} r + \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1+\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}. \quad (33)$$

因此,为使边界条件 $f|_{x=1} = 0$ 满足,必须有

$$\alpha+1-\gamma = 1-n \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (34)$$

亦即 $2an\sqrt{M^2 - E^2} = 2V_0a^2(M + E) - n^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$ (35)

(35) 式表示 S 波束缚态所满足的能谱方程,由它可决定能级 E_n . 相应的波函数是

$$f_n(r) = e^{-\frac{nr}{a}}(1 - e^{-r/a})F(1-n, 2\alpha+1+n, 2\alpha+1; e^{-r/a}). \quad (36)$$

特别当 $n=1$ 时,基态能量 E_1 由方程

$$a\sqrt{M^2 - E_1^2} = a^2V_0(M + E_1) - \frac{1}{2} \quad (37)$$

给出. 基态波函数是

$$f_1(r) = e^{-\frac{r}{a}}(1 - e^{-r/a}). \quad (38)$$

将 (36) 式给出的 f_n 代入方程 (27), 以保证它一定是 Dirac 方程的解,并求出 $g_n(r)$ 是

$$g_n(r) = \frac{1}{M + E_n} \left[\frac{1}{r} f_n(r) - \frac{df_n(r)}{dr} \right]. \quad (39)$$

将 $f_n(r)$, $g_n(r)$ 代入 (25) 式,就给出 Dirac 方程的旋量波函数解.

四、结论与讨论

综合上述,我们严格给出同时具有标量禁闭势和矢量势的一维 Hulthén 型势的 Dirac 方程的精确解,其能谱方程由 (15), (17), (18) 式给出,旋量波函数由 (21) 式给出。对三维球对称的 Hulthén 势,在 $S(r) = V(r)$ 的条件下,严格给出 $k = -1$ 的能谱和波函数。特别是,严格给出基态能级和波函数的表示式。

比较文献[7]中同时具有矢量和标量 Hulthén 势的 Klein-Gordon 方程和方程 (28), 可以看到,这时的 Dirac 方程的 f 分量满足的方程与 Klein-Gordon 方程非常相似,因此显然,可以用文献[8]中讨论 Hulthén 势的 Klein-Gordon 方程的连续谱散射态的方法,以求得 Dirac 方程 (27) 的散射态解。为节省篇幅,不再将这一散射态解写出。

- [1] W. Greiner, B. Müller and J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer-Verlag, (1985), Chap. 3, 6.
- [2] I. C. Wang and C. Y. Wong, *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 348.
- [3] R. K. Su and Y. Zhang, *J. Phys. A* **17**(1984), 851.
- [4] R. K. Su and Z. Q. Ma, *J. Phys. A* **19**(1986), 1739.
- [5] R. K. Su, Y. Zhong and S. Z. Hu, *Chinese Phys. Lett.*, **8**(1991), 114.
- [6] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, (1974), Vol. I, p. 175.
- [7] F. Dominguez-Adame, *Phys. Lett.*, **A136**(1989), 175.
- [8] B. Talukdar, A. Yunus and M. R. Amin, *Phys. Lett.*, **A141**(1989), 326.
- [9] 例如见 J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, (1965), p. 53.

BOUND STATES OF THE DIRAC EQUATIONS WITH HULTHÉN-TYPE POTENTIALS

HU SI-ZHU SU RU-KENG

Department of Physics, Fudan University, Shanghai, 200433

(Received 4 October 1999)

ABSTRACT

The exact solutions of bound states of Dirac equation with one-dimensional vector and scalar Hulthén-type potential are obtained. For three-dimensional Hulthén-type potential, the S -wave exact solutions of Dirac equations are also presented provided the scalar potential is equal to the vector potential.

PACC: 0365; 1240Q