

一维量子晶格气中的孤子激发

陈 传 誉¹⁾

广州师范学院物理系, 广州, 510400

1990年10月14日收到

本文研究一维量子晶格气中粒子最近邻相互作用的非线性性质, 给出这一模型的孤子理论, 同时, 导出孤子能量以及有效质量的表达式。

PACC: 0365; 1190

一、引 言

1956年 Matsubara 和 Matsuda 在对量子流体(如 ^4He) 性质的研究中, 提出量子晶格气的模型^[1]。虽然这一系统的超流跃变发生在液态, 但是, 量子晶格气模型却对系统临界状态的性质给予了很好的描述。

通常, 离子电导率可以用离子从格点到格点的跳动所形成的扩散过程给予描述, 而 Sato 和 Kikuchi^[2] 则采用在扩散过程中离子间存在最近邻相互作用的晶格气模型, 从热涨落的角度对其经典地进行研究。后来, Mahan^[3] 也采用晶格气模型, 但用声子坐标从量子力学角度提出离子电导率的晶格气理论。并由此得到与实验结果符合得很好的依赖于温度的离子电导率理论值。

此外, Girvin 和 Mahan 在对半满带温差电动势率的研究中, 也采用晶格气模型^[4]。

事实上, 在对一些物理问题的研究中, 晶格气模型是一个颇为重要的物理模型。在晶格气模型中, 通常晶格数多于占据晶格的粒子数, 而每一晶格上最多只能被一个粒子所占据。同时, 处于最近邻晶格上的粒子之间存在相互作用。

如所周知, 近些年来, 人们对在一维和准一维系统中的非线性方程中存在孤子解这一问题给予了足够的关注并引起颇大的兴趣^[5-9]。我们也曾经给出通过形变势与光学声子耦合的一维电子系统中的孤子激发理论^[10]。

本文将研究一维量子晶格气中由于最近邻粒子间相互作用的非线性性质, 给出这一模型的孤子理论。结果发现, 当系统最近邻粒子之间的相互作用为相互吸引的弱耦合时, 系统将出现孤子激发, 而当相互作用为相互排斥时, 则不可能有孤子激发。同时导出孤子激发存在时的孤子能量以及孤子有效质量的表达式。

¹⁾ 中国高等科学技术中心(世界实验室)理论物理分中心。

二、基本理论

在量子晶格气模型中,考虑处于晶格平衡位置上经典粒子之间的最近邻相互作用,则其哈密顿量为^[11]

$$H = W \sum_{j,\delta} c_{j+\delta}^\dagger c_j + \frac{1}{2} U \sum_{j,\delta} n_j n_{j+\delta}, \quad (1)$$

$$n_j = c_j^\dagger c_j, \quad (2)$$

(1) 式中对 δ 的取和遍及最近邻晶格。(1) 式等号右端第一项描述粒子在最近邻晶格间的跳动;第二项则描写最近邻粒子之间的相互作用;参数 U 可以是正的也可以是负的,取决于最近邻相互作用是相互排斥抑或是相互吸引; $c_j^\dagger$ 和 c_j 分别为第 j 格点上粒子的产生和湮没算符。它们满足对易关系

$$\{c_j, c_i^\dagger\} = 1, \quad (3a)$$

$$[c_j, c_i^\dagger] = 0 \quad (i \neq j). \quad (3b)$$

即算符 $c_j, c_i^\dagger$ 如果在同一晶座上 ($i = j$) 具有反对易 (3a) 式,而处于不同晶座上 ($i \neq j$) 则是对易的。这就是处于晶格上的粒子的晶格气模型中算符的独特对易关系^[11]。

对 (1) 式作么正变换

$$U = \exp \left[i\pi \sum_{j=2,4,6,\dots} c_j^\dagger c_j \right], \quad (4)$$

则哈密顿量变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= U^{-1} H U \\ &= W \left[\sum_j c_j^\dagger c_j - \sum_j c_j^\dagger (c_{j+1} + c_{j-1}) \right] \\ &\quad + \frac{U}{2} \sum_j c_j^\dagger c_j (c_j^\dagger c_j + c_{j+1}^\dagger c_{j+1} + c_{j-1}^\dagger c_{j-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

这样,算符 c_j 的运动方程为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial c_j}{\partial t} &= [c_j, \mathcal{H}] \\ &= \left(W - \frac{U}{2} \right) c_j - W(c_{j+1} + c_{j-1}) + U(c_j c_{j+1}^\dagger c_{j+1} + c_j c_{j-1}^\dagger c_{j-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

这是一个非线性的算符方程。利用相干态的方法,可以将其变换为格点上粒子运动的概率幅方程。

采用 Glauber 的相干态^[12]

$$|\Psi\rangle = \prod_j |\alpha_j\rangle \quad (7)$$

作为系统哈密顿量 $\mathcal{H}$ 的本征态。 j 格点上粒子运动的概率幅可定义为

$$\alpha_j = \langle \Psi | c_j | \Psi \rangle \quad (8)$$

由(7), (8)式不难得出, 算符 c_i 的本征方程

$$c_i |\alpha_i\rangle = \alpha_i |\alpha_i\rangle. \quad (9)$$

当一维量子晶格气中粒子运动概率幅 $\alpha_i(t)$ 发生变化的空间尺度远大于晶格常数时, 可以将 $\alpha_i(t)$ 看作是空间的缓变量而采用连续模型。在连续模型近似下,

$$\alpha_{i+\delta} = \varphi(x, t) \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \delta^2 + \dots. \quad (10)$$

将方程(6)作用于态 $|\Psi\rangle$ 上并经连续化近似之后, 便可以得到关于 $\varphi(x, t)$ 的运动方程

$$i\hbar\varphi_t = -\left(W + \frac{U}{2}\right)\varphi - Wa^2\varphi_{xx} + U[2\varphi^*\varphi + a^2(\varphi^*\varphi)_{xx}], \quad (11)$$

式中 a 为晶格气模型中的晶格常数, 为解方程(11), 作如下变换:

$$\varphi(x, t) = \phi(x - Vt)e^{-i(Et/\hbar - kx)}, \quad (12)$$

$$k = \frac{\hbar V}{2Wa^2}, \quad (12a)$$

$\hbar$ 为狄喇克的普朗克常数。注意到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x - Vt) = 0$$

这一关系, 那么由(12)式可以将方程(11)变换为

$$\varepsilon\phi = -a^2\phi_{xx} + U'[2\phi^3 + \phi a^2(\phi^2)_{xx}]. \quad (13)$$

引进一个无量纲的参量 $\xi = x/a$, 则上式变为

$$\varepsilon\phi(\xi, t) = -\phi_{\xi\xi} + U'\phi[2\phi^2 + (\phi^2)_{\xi\xi}], \quad (14)$$

式中

$$\varepsilon = \frac{1}{W}(E + W + U/2 - Wa^2k^2), \quad (15a)$$

$$U' = U/W. \quad (15b)$$

方程(14)两边同时乘以 $2\phi_\xi$, 整理后可得 $\phi(\xi, t)$ 的方程为

$$\phi_\xi^2 = \phi^2(U'\phi^2 - \varepsilon)(1 - 2U'\phi^2)^{-1}. \quad (16)$$

三、结果与讨论

当量子晶格气模型中处于晶格上粒子的最近邻相互作用为弱耦合即 $U' \ll 1$ 时, 方程(16)可变为

$$\phi_\xi^2 = \phi^2(-\varepsilon + c_1\phi^2 + c_2\phi^4), \quad (17)$$

式中

$$c_1 = U'(1 - 2\varepsilon), \quad (18a)$$

$$c_2 = 2U'^2. \quad (18b)$$

方程(17)具有精确的孤子解^[10]

$$\phi = [A + B \cosh^2 q(a\xi - Vt)]^{-\frac{1}{2}} = [A + B \cosh^2 q(x - Vt)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

这里

$$A = (c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4\epsilon c_2})/2\epsilon, \quad (20a)$$

$$B = -\sqrt{c_1^2 + 4\epsilon c_2}/\epsilon, \quad (20b)$$

$$(qa)^2 = -\epsilon. \quad (20c)$$

由(18)–(20)式,不难得到孤子解(19)式存在的条件为

$$U < 0. \quad (21)$$

即一维量子晶格气模型中,处于格点平衡位置上的经典粒子的最近邻相互作用必须是相互吸引时,才有孤子激发(19)式的存在。而相互排斥的最近邻相互作用则不可能出现孤子激发。如果等效到磁性问题中, U 的正、负分别代表反铁磁性和铁磁性^[11],由此恰好说明一维磁性孤子将出现于铁磁性链之中而不可能出现于反铁磁性链。

由归一化条件

$$\int \phi^2(x) dx = 1, \quad (22)$$

并注意 $A+B > 0$ 的要求,将(19),(20)式代入上式,便可以导出孤子的能量表达式

$$E = E(0) + \frac{1}{2} m_s v^2. \quad (23)$$

上式等号右端第一项为孤子的静止能量

$$\begin{aligned} E(0) &= -\frac{U}{2} - W \left(\frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{1 - 2U'^2}}{2U'^2} \right) \\ &\approx -\frac{U}{2} - \frac{W}{U'^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

(23)式等号右端第二项则表示孤子的动能。其中 v 为孤子的速度, m_s 为孤子的有效质量,其表达式为

$$m_s = \hbar^2/2W a^2. \quad (25)$$

四、结 语

通过对一维量子晶格气模型的哈密顿量施行么正变换,并利用相干态的方法将非线性的算符运动方程变换为格点粒子运动的概率幅方程,在采用连续模型近似的基础上,建立了一维量子晶格气模型的孤子理论。结果表明,当一维量子晶格气模型中的最近邻相互作用为弱相互吸引时,系统将出现孤子激发,而当最近邻相互作用为相互排斥时,则系统不可能有孤子出现。当孤子出现时,还给出孤子的能量及有效质量的表达式,它们分别由(23)和(25)两式给出。

在实际系统中,例如,一维磁性孤子,迄今只出现于铁磁性链^[9,13,14]而未能在反铁磁性链中出现的事实正与本文结论一致。因为等效到磁性材料系统,量子晶格气模型中最近邻相互作用 U 的正或负,分别对应反铁磁性或铁磁性。对于液氮来说,由于它所对应的量子晶格气模型中的最近邻相互作用 U 可正可负^[15],因此,当一维液氮所处的状态对应于量

子晶格气模型中存在最近邻弱相互吸引的情况时, 则应有孤子激发。而其所处的状态对应于量子晶格气模型中最近邻相互作用为相互排斥的情况, 则不可能观察到孤子的存在。其它一切可以用一维量子晶格气模型描述的实际系统能否有孤子激发, 则依此类推。

感谢西北大学近代物理研究所周玉魁同志在博士后期间的有益讨论。

- [1] T. Matsubara and H. Matsuda, *Prog. Theor. Phys. (Kyoto)*, **16**(1956), 416.
- [2] H. Sato and R. Kikuchi, *J. Chem. Phys.*, **55**(1971), 677.
- [3] G. D. Mahan, *Phys. Rev.*, **B14**(1976), 780.
- [4] S. M. Girvin and G. D. Mahan, *Phys. Rev.*, **B19**(1979), 1302.
- [5] 孙鑫, 李洪芳, 科学通报, **24**(1979), 443.
- [6] A. S. Davydov, *Phys. Stat. Sol. (b)*, **102** (1980), 275.
- [7] A. S. Davydov and A. V. Zolotariuk, *Phys. Scr.*, **28** (1983), 249.
- [8] V. G. Makhankov, O. K. Pashaev and A. Kunda, *Phys. Scr.*, **28**(1983), 229.
- [9] M. J. Škrinjar, D. V. Kapor and S. D. Stojanovic, *J. Phys. C*, **20**(1987), 2243.
- [10] C. Y. Chen and Y. K. Zhou, *J. Phys. C*, **21**(1988), L261.
- [11] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics*, New York and London, (1981).
- [12] R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **131**(1963), 2766.
- [13] D. I. Pushkarov and Kh. I. Pushkarov, *Phys. Lett.*, **61A** (1977), 339.
- [14] L. G. de Azevedo *et al.*, *J. Phys. C*, **15**(1982), 7391.
- [15] M. Schick and R. L. Siddon, *Phys. Rev.*, **A8**(1973), 339.

SOLITON EXITATION IN ONE-DIMENSIONAL QUANTUM LATTICE GAS

CHEN CHUAN-YU

Department of Physics, Guangzhou Teachers College, Guangzhou, 510400

(Received 14 October 1990)

ABSTRACT

In this paper, the non-linear properties of the nearest neighbor interaction between particles in one-dimensional quantum lattice gas are investigated, giving out the soliton theory of the model. The expressions of the solitons' energy and the effective soliton mass are also derived.

PACC: 0365; 1190