

含 Chern-Simons 项的 (2+1) 维标量 量子电动力学*

倪光炯 徐建军

复旦大学物理系, 上海, 200433

1990 年 10 月 14 日收到

本文用一种方便的微扰展开方法, 将一个含有 Chern-Simons 项的 (2+1) 维标量量子电动力学 (QED) 模型中的标量场 ϕ 量子化, 在一圈图近似下, 导出矢量场 A_μ 的等效作用量, 从而证明有两支 (不稳定的) 元激发谱. Chern-Simons 项的耦合系数不受 ϕ 场量子化的影响.

PACC: 0370; 1110

在 (2+1) 维空间的规范场论不同于 (3+1) 维情形, 一个有趣的特点是: 它可以加上一个 Chern-Simons (C-S) 项^[1], 从而引起一些奇特的性质, 如在量子水平上, 使玻色子转变为费密子^[2]. 这一性质可能在量子霍尔效应和高温超导理论中有重要意义. 在本文中讨论一个场论模型: 一个有质量的复标量场 ϕ 与 $U(1)$ 规范场 A_μ 耦合, 再相应地加上 Maxwell 动能项和 C-S 项^[3]. 此模型的作用量在欧氏空间写出为

$$S = \int d^3x [(D_\mu \phi)^* (D_\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi + i(\xi/4\pi) \epsilon_{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + (1/4e^2) F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}], \quad (1)$$

式中 $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$, 在自然单位制中, ϕ , A_μ , m , g , ξ 和 e^2 的质量量纲分别为 $1/2$, 1 , 1 , 0 , 0 和 1 . 本文目的是运用量子场论中一种新的简化微扰论方法^[4], 算出 ϕ 场一圈图近似下的 A_μ 场有效作用量, 从而给出它的传播子和元激发的质量谱.

我们要完成对 ϕ 场的路径积分, 以求出它对有效作用量的贡献

$$\exp[-S_{\text{eff}}^{(\phi)}] = \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \exp[-S_\phi] = \det^{-1}[\hat{H}] = \exp\{-\text{Tr} \ln \hat{H}\}, \quad (2)$$

$$S_\phi = \int d^3x [\phi^* D_\mu^\dagger D_\mu \phi + m^2 \phi^* \phi] = \int d^3x [\phi^* \hat{H} \phi], \quad (3)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (4)$$

$$\hat{H}_0 = \hat{p}^2 + m^2, \quad (5)$$

$$\hat{H}_1 = g(A_\mu \hat{p}_\mu + \hat{p}_\mu A_\mu) + g^2 A^2, \quad (6)$$

($\hat{p}_\mu = -i\partial_\mu$, $A^2 = A_\mu A_\mu$). 注意公式

$$\ln(A/B) = -\int_0^\infty dt t^{-1} [\exp(-At) - \exp(-Bt)], \quad (7)$$

便可计算重整化的 $\ln \hat{H}$ 如下: (引入量纲 (-2) 的参数 t)

$$(\ln \hat{H})_r = -\left\{ \int_0^\infty dt t^{-1} \exp(-\hat{H}t) \right\}_r, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \exp\{-(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)t\} &= \text{Tr} \left\{ \exp(-\hat{H}_0 t) + (-t) \exp(-\hat{H}_0 t) \hat{H}_1 \right. \\ &\quad \left. + 1/2(-t)^2 \int_0^1 du \exp[-(1-u)\hat{H}_0 t] \hat{H}_1 \exp[-u\hat{H}_0 t] \hat{H}_1 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

* 国家自然科学基金和国家教育委员会博士点基金资助的课题.

$$\text{或} \quad S_{\text{eff}}^{(\phi)} = \text{Tr} \ln \hat{H} = I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)} + \dots \quad (10)$$

首先看

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= -\text{Tr} \int_0^\infty dt t^{-1} \exp(-\hat{H}_0 t) = -\int_0^\infty dt t^{-1} \langle p | \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \exp[-(\not{p}^2 + m^2)t] | p \rangle \\ &= -\int d^3 x \int_0^\infty dt t^{-1} \exp(-m^2 t) \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{dp_x}{(2\pi)} \exp(-p_x^2 t) \right]^3 \\ &= -(8\pi^{-3/2}) \int_0^\infty dt t^{-5/2} \exp(-m^2 t) \\ &= -m^3 / (8\pi^{3/2}) \Gamma(-3/2) = -m^3 / 6\pi, \end{aligned} \quad (11)$$

式中在转到动量空间完成对 p 的积分后,把对 t 的积分看作是 Γ 函数的形式表达式,从而使原来的发散积分变为确定的有限值。这也是场论中一种行之有效的正规化办法。或者也可以引入动量积分的截断 Λ , 然后弃去与 Λ 有关的项。两者的结果是一样的。作此种处理后,将认为有关的模型参量均已取重整化后之值。

$$\begin{aligned} I^{(2)} &= -\int_0^\infty dt t^{-1} \text{Tr}(-t) \exp(-\hat{H}_0 t) \hat{H}_1 \\ &= \int_0^\infty dt \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \langle p | \exp[-(\not{p}^2 + m^2)t] | q \rangle \langle q | g^2 A^2 \\ &\quad + g(A_\mu \not{p}_\mu + \not{p}_\mu A_\mu) | p \rangle = \int_0^\infty dt \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^3 q \exp[-(p^2 + m^2)t] \delta(p - q) \\ &\quad \times \{g^2 \tilde{A}^2(q - p) + g[\tilde{A}_\mu(q - p) p_\mu + q_\mu \tilde{A}_\mu(q - p)]\}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$\tilde{A}_\mu(p) = \int d^3 x \exp(-ip_\nu x_\nu) A_\mu(x), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} I^{(2)} &= (8\pi)^{-3/2} \int d^3 x g^2 A^2(x) \int_0^\infty dt t^{-3/2} \exp(-m^2 t) = m(8\pi)^{-3/2} \int d^3 x g^2 A^2 \Gamma(-1/2) \\ &= (-m/4\pi) \int d^3 x g^2 A^2(x) = (-mg^2/4\pi) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{A}_\mu(q) \tilde{A}_\mu(-q). \end{aligned} \quad (14)$$

这里也已作正规化处理。

$$\begin{aligned} I^{(3)} &= -1/2 \int dt t \int_0^1 du \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp(-m^2 t) \exp[-(1-u)p^2 t] \exp(-uk^2 t) \\ &\quad \times \{g^4 \tilde{A}^2(p-k) \tilde{A}^2(k-p) t g^3 [\tilde{A}^2(p-k) \tilde{A}_\nu(k-p)(p_\nu + k_\nu) + (p_\mu + k_\mu) \\ &\quad \times \tilde{A}_\mu(p-k) \tilde{A}^2(k-p)] + g^2 \tilde{A}_\mu(p-k) \tilde{A}_\nu(k-p)(p_\mu + k_\mu)(k_\nu + p_\nu)\}. \end{aligned} \quad (15)$$

以变量 $q = p - k$ 代替 k , 再以 $p' = p - qu$ 代替 p , 完成对 p' 的积分后,用 Γ 函数正规化公式,然后再用公式^[9]

$$\int_0^1 du \frac{1}{[m^2 + u(1-u)g^2]^{1/2}} = \frac{2}{g} \arcsin \frac{g}{\sqrt{g^2 + 4m^2}} \quad (16)$$

等完成积分,最后得到 $I^{(3)}$, 与 (14) 式之 $I^{(2)}$ 合并。考虑到 (11) 式 $I^{(1)}$ 与 A_μ 无关,就有一圈图近似下的:

$$S_{\text{eff}}^{(\phi)} = \text{Tr} \ln \hat{H} = I^{(2)} + I^{(3)}$$

$$\begin{aligned}
&= (16\pi)^{-1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ g^2 \tilde{A}_\mu(k) \tilde{A}_\nu(-k) \left[(k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \left(-2m/k^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(4m^2 + k^2)}{k^2 \sqrt{k^2}} \arcsin \sqrt{k^2/(k^2 + 4m^2)} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\delta_{\mu\nu} \left(2m + \frac{(4m^2 + k^2)}{\sqrt{k^2}} \arcsin \sqrt{k^2/(k^2 + 4m^2)} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - g^4 \tilde{A}_\mu^2(k) \tilde{A}_\nu^2(-k) \frac{2}{\sqrt{k^2}} \arcsin \sqrt{k^2/(k^2 + 4m^2)} \right\}. \quad (17)
\end{aligned}$$

注意如继续取(10)式展开以后各项的贡献,将出现 A_μ 的高阶项,它们并不改变(17)式中 A_μ 二次项的结果。再看(1)式等号右端另外两项,其中规范场动能部分

$$\begin{aligned}
S_F &= \int d^3x (4e^2)^{-1} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
&= (2e^2)^{-1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \tilde{A}_\mu(k) \tilde{A}_\nu(-k) \quad (18)
\end{aligned}$$

包含一个横场投影因数 $(\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu)$, 与(3+1)维 QED 相似,它表示规范自由度或约束的存在。为下一步求传播子,需先在这里引入规范固定项,这相当于改 $(\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu)$ 为 $[\delta_{\mu\nu} k^2 - (1 - 1/\alpha)k_\mu k_\nu]$, 其中规范参数 α 可以取任意有限值,通常取 $\alpha = 0$ 时为 Landau 规范, $\alpha = 1$ 时则为 Feynman 规范。(1)式中与 C-S 项联系的作用量为

$$\begin{aligned}
S_{C-S} &= \int d^3x (i(\xi/4\pi) \epsilon_{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda) \\
&= -(\xi/4\pi) \epsilon_{\mu\nu\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{A}_\mu(k) \tilde{A}_\nu(-k) k_\lambda. \quad (19)
\end{aligned}$$

于是我们模型中 A_μ 的总有效作用量在一圈图近似下为

$$\begin{aligned}
S_{\text{eff}}^{(A)} &= S_{\text{eff}}^{(\Phi)} + S_F + S_{C-S} \\
&= (2\pi)^{-3} \int d^3k \tilde{A}_\mu(k) \tilde{K} A_\nu(-k) + \dots, \quad (20)
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
\tilde{K} &= (g^2/16\pi) (-2m/k^2 + ((4m^2 + k^2)/k^2 \sqrt{k^2}) \arcsin \sqrt{k^2/(k^2 + 4m^2)}) \\
&\quad \times (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) + (g^2/8\pi) (2m + ((4m^2 + k^2)/\sqrt{k^2}) \\
&\quad \arcsin \sqrt{k^2/(k^2 + 4m^2)}) \delta_{\mu\nu} - (\xi/4\pi) \epsilon_{\mu\nu\lambda} k_\lambda + 1/(2e^2) [\delta_{\mu\nu} k^2 \\
&\quad - (1 - 1/\alpha) k_\mu k_\nu]. \quad (21)
\end{aligned}$$

记动量表象中 A_μ 的传播子为 $\tilde{G}_{\mu\nu}(k)$, 它定义为 $\tilde{K}_{\mu\nu}$ 之逆, 即

$$\tilde{K}_{\mu\nu} \tilde{G}_{\nu\tau} = \delta_{\mu\tau}. \quad (22)$$

为求 $\tilde{G}_{\nu\tau}$, 设

$$\tilde{G}_{\nu\tau} = a(k^2) \delta_{\nu\tau} + b(k^2) k_\nu k_\tau + c(k^2) \epsilon_{\nu\tau\sigma} k_\sigma, \quad (23)$$

式中 a, b, c 为 k^2 的待定函数。将(21), (23)式代入(22)式, 比较同类项, 不难解出

$$a(k^2) = \frac{f(k^2)}{[f(k^2)]^2 + (\xi/4\pi)^2 k^2}, \quad c(k^2) = \frac{\xi/4\pi}{[f(k^2)]^2 + (\xi/4\pi)^2 k^2}, \quad (24)$$

$b(k^2) =$

$$\frac{f(k^2) \left[\left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right) \left(-2m/k^2 + \left(\frac{4m^2 + k^2}{k^2 \sqrt{k^2}} \right) \arcsin \sqrt{\frac{k^2}{(k^2 + 4m^2)}} \right) + \left(\frac{1}{2e^2} \right) (1 - 1/\alpha) \right] + \left(\frac{\xi}{4\pi} \right)^2}{\{ [f(k^2)]^2 + (\xi/4\pi)^2 k^2 \} \left[(g^2/8\pi^2) \left(2m + \frac{(4m^2 + k^2)}{\sqrt{k^2}} \arcsin \sqrt{k^2/(k^2 + 4m^2)} \right) + k^2/2e^2\alpha \right]}, \quad (25)$$

式中

$$f(k^2) = (2e^2)^{-1} k^2 + (g^2/16\pi) \left(2m + \frac{12m^2 + 3k^2}{\sqrt{k^2}} \arcsin \sqrt{k^2/(k^2 + 4m^2)} \right). \quad (26)$$

当取 Landau 规范 ($\alpha = 0$) 时, A_μ 的传播子简化为

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k) = a(k^2)(\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2) + c(k^2)\varepsilon_{\mu\nu\lambda} k_\lambda. \quad (27)$$

为看清楚元激发的质量, 必须从欧氏空间转回到闵氏空间, 即作解析延拓

$$k^2 = k_E^2 \rightarrow -k_M^2 = -k^2,$$

为判定 $\tilde{G}_{\mu\nu}$ 的极点, 观察它分母上的零点

$$\begin{aligned} F(-k^2) &= \{ [f(-k^2)]^2 + (\xi/4\pi)^2 (-k^2) \} \\ &= \left\{ \left[-(2e^2)^{-1} k^2 + (g^2/16\pi) \left(2m + \frac{12m^2 - 3k^2}{\sqrt{k^2}} \arcsin \sqrt{k^2/(4m^2 - k^2)} \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - (\xi/4\pi)^2 k^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

假设元激发质量 M 很小 ($M \ll m$), (28) 式中 $k^2 \approx 0$, 则近似地有

$$k^4 - (2me^2g^2/\pi + \xi^2 e^4/4\pi^2) k^2 + g^4 e^4 m^2/\pi^2 = 0. \quad (29)$$

由此方程之根得出两支元激发谱 (设 $16\pi mg^2/\xi^2 e^2 \ll 1$)

$$M_+^2 = \xi^2 e^4/4\pi^2 + 2me^2g^2/\pi, \quad (30)$$

$$M_-^2 = 16m^2g^4/\xi^2. \quad (31)$$

当 $g = 0$ 时, 即纯 $U(1)$ 规范场加 C-S 项的情形

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{[k^2/4e^4 + (\xi/4\pi)^2]} \left\{ (1/2e^2) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + (\xi/4\pi) \varepsilon_{\mu\nu\lambda} k_\lambda/k^2 \right\}, \quad (32)$$

只存在一支元激发谱

$$M_{g=0}^2 = \xi^2 e^4/4\pi^2. \quad (33)$$

另一特例为 $\xi = 0$, 即 (2+1) 维的标量 QED, 有

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k) = (1/f(k^2))(\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2). \quad (34)$$

此时的元激发谱也只是一支

$$M_{\xi=0}^2 = me^2g^2/\pi. \quad (35)$$

还要注意, 当转到闵氏空间后, (28) 式所示之 $F(-k^2)$ 当 $k^2 > 4m^2$ 时将变为复数,

$$\begin{aligned} F(-k^2) &= \left\{ \left[-(1/2e^2) k^2 + (g^2/16\pi) \left(2m + i \left(\frac{3k^2 - 12m^2}{\sqrt{k^2}} \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \arcsin \sqrt{k^2/(k^2 - 4m^2)} \right) \right]^2 - (\xi/4\pi)^2 k^2 \right\} \quad (k^2 > 4m^2). \end{aligned} \quad (36)$$

传播子 $\tilde{G}_{\mu\nu}$ 出现虚部, 意味着我们将 ϕ 场的量子起伏积分以后得到的有质量 A_μ 场并不对应于稳定的粒子, 它具有一定的自发衰变为正、负 ϕ 粒子的概率。或者说, 在二维空间, 倘若存在一个空间均匀的频率为 ω 的 A_μ 振动 ($k=0$), 则当 $\omega > 2m$ 时, 就有在真空中产生正、负 ϕ 粒子对的概率。在 (3+1) 维空间类似的 QED 讨论可见文献[6]。

作为本文的简单小结, 应该指出:

1) 本文在 (2+1) 维空间对含有 C-S 项的有质量标量 QED 模型, 将 ϕ 场量子化, 采用一种方便的微扰论展开方法, 在一圈图近似下, 计算了 A_μ 场的有效作用量 $S_{\text{eff}}^{(1)}$ 。

2) 发现 ϕ 场的量子化不会在 $S_{\text{eff}}^{(1)}$ 中诱导出 C-S 项。特别地说, 包含两个 A_μ 的项, 在一圈图近似下已经算全, 并写明在 (20) 式等号右端第一项中, 未写出的项及高圈图的贡献都至少包含有三个 A_μ 的乘积。这一点与 (2+1) 维旋量 (ψ) QED 的情况不同, 那时 ψ 场的量子化可能会诱导出 C-S 项, 这里不准备讨论这个问题。

3) 计算表明: 在 ϕ 场量子化的一圈图近似下, 对 ξ 参数完全没有修正, 如 (21) 式所示。从本文微扰展开方案看, ϕ 场的高圈图也不改变这一结论。当然, A_μ 场进一步量子化后会有修正, 但文献[3]论证说, 直到无限级的修正都是有限的, 而没有无限修正存在意味着与 ξ 相关的 β 函数等于零。这是本模型的一个特点。

4) 本文表明, 有质量 ($m \neq 0$) 的 ϕ 场量子化后, 与 A_μ 场相耦合 ($g \neq 0$), 会使后者产生两支元激发谱, 其质量分别如 (30) 和 (31) 式所示。这两支元激发都是不稳定的。

- [1] W. Siegel, *Nucl. Phys.*, **B156**(1979), 135;
J. Schonfeld, *Nucl. Phys.*, **B185**(1981), 157;
R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev.*, **D4**(1981), 2291;
S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 975; and *Ann. Phys. (N. Y.)*, **140**(1982), 372.
- [2] A. Polyakov, *Mod. Phys. Lett.*, **A3**(1988), 325;
Yi-xin Chen and Guang-jiong Ni, *Chin. Phys. Lett.*, **7**(1990), 433.
- [3] G. W. Semenoff, P. Sodano and Y. S. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 715.
- [4] Yu-liang Liu and G-j Ni, *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 3840.
- [5] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, (1980).
- [6] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison, Wesley, (1978), p. 281; 297.

SCALAR QUANTUM ELECTRODYNAMICS WITH CHERN-SIMONS TERM IN (2+1) DIMENSIONS

NI GUANG-JIONG XU JIAN-JUN

Department of Physics, Fudan University, Shanghai, 200433

(Received 14 October 1990)

ABSTRACT

By using a convenient perturbative expansion method, a scalar field ϕ in scalar QED with Chern-Simons term is quantized. Under the approximation of one-loop diagram, we have derived the effective action for vector field A_μ and obtained two branches of (unstable) elementary excitation spectra. The coupling coefficient of Chern-Simons term is not affected by the quantization of ϕ field.

PACC: 0370; 1110