

压缩现象与光子统计分布

刘正东 刘三秋

江西师范大学物理系, 南昌, 330027

1990年10月4日收到

本文研究压缩现象与光子统计分布之间的关系。通过逐次注入处于激发态的原子, 无损光学腔内的光子数概率分布会有有趣的变化, 腔场有可能取得较深的压缩。

PACC: 4250; 3280; 4260D

腔场与原子的非线性相互作用中, 腔场的某一正交分量可具有比相干态更小的量子起伏^[1-4]。注意到该非经典的量子起伏的值的出现是平均光子数 $\bar{n}$ 和“时间” λt 的函数, 尽管这可初步归因于腔场与原子非线性耦合带来的饱和效应^[2,4], 但深入的物理机制的进一步分析尚未进行。又注意到压缩的产生往往与腔场趋近初始光学相干状态的过程有关^[2], 同时, 腔场的压缩效应与反聚束效应之间呈现出令人惊异的或同时出现、或毫无对应的复杂关系^[3]。因此, 进一步研究压缩现象与光子统计分布之间的关系是必要的, 这将有利于寻找加深压缩的途径。

考虑一个二能级原子与单模腔场相互作用, 在旋波近似下, 其哈密顿量为

$$\hat{H} = \hbar\omega_a \hat{S}_{11} + \hbar\omega_b \hat{S}_{22} + \hbar Q \hat{a} + \hat{a} + \hbar\lambda(\hat{S}_{12} \hat{a} + \hat{S}_{21} \hat{a}^+), \quad (1)$$

式中 S 为 2×2 矩阵

$$(\hat{S}_{ij})_{kl} = \delta_{ki} \delta_{jl}, \quad (2)$$

其它符号与文献[6]相同。

该哈密顿量可重新写作: $\hat{H} = \hbar(\hat{H}_0 + \hat{V})$, (3)

$$\text{自由部分} \quad \hat{H}_0 = \omega_a \hat{S}_{11} + \omega_b \hat{S}_{22} + Q \hat{a} + \hat{a} + \frac{\Delta}{2} (\hat{S}_{11} - \hat{S}_{22}), \quad (4)$$

$$\text{相互作用部分} \quad \hat{V} = \lambda \hat{S}_{12} \hat{a} + \lambda \hat{S}_{21} \hat{a}^+ - \frac{\Delta}{2} (\hat{S}_{11} - \hat{S}_{22}), \quad (5)$$

$$\text{式中偏调} \quad \Delta = Q - (\omega_a - \omega_b), \quad (6)$$

$$\text{并有} \quad [\hat{H}_0, \hat{H}] = [\hat{V}, \hat{H}] = [\hat{H}_0, \hat{V}] = 0. \quad (7)$$

在相互作用表象中, 时间平移算符可写成

$$\hat{U}(t, 0) = e^{-i\hat{V}t} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\hat{\mu}} t + i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin \sqrt{\hat{\mu}} t}{\sqrt{\hat{\mu}}}, & -i\lambda \frac{\sin \sqrt{\hat{\mu}} t}{\sqrt{\hat{\mu}}} \hat{a} \\ -i\lambda \hat{a}^+ \frac{\sin \sqrt{\hat{\mu}} t}{\sqrt{\hat{\mu}}}, & \frac{\hat{a}^+ \hat{a}}{\hat{a} \hat{a}^+} \left(\cos \sqrt{\hat{\mu}'} t - i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin \sqrt{\hat{\mu}'} t}{\sqrt{\hat{\mu}'}} \right) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

式中 $\hat{\mu} = \lambda^2 \hat{a} \hat{a}^+ + \Delta^2/4$, $\hat{\mu}' = \lambda^2 \hat{a}^+ \hat{a} + \Delta^2/4$,

若逐个注入无损光学腔内的原子被调整得在任意时刻腔内仅含一个, 则第 k 次相互作用的原子-腔场系统的密度算符

$$\hat{\rho}_k(t_k) = \hat{U}(t_k, 0) \hat{\rho}_k(0) \hat{U}^\dagger(t_k, 0). \quad (9)$$

若每次注入的原子进腔以前均处于激发态, 则

$$\hat{\rho}_k(0) = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_k'(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

可以求得

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_k'(t_k) = & \left(\cos \sqrt{\hat{\mu}} t_k + i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin \sqrt{\hat{\mu}} t_k}{\sqrt{\hat{\mu}}} \right) \hat{\rho}_k'(0) \left(\cos \sqrt{\hat{\mu}} t_k - i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin \sqrt{\hat{\mu}} t_k}{\sqrt{\hat{\mu}}} \right) \\ & + \lambda \hat{a}^\dagger \frac{\sin \sqrt{\hat{\mu}} t_k}{\sqrt{\hat{\mu}}} \hat{\rho}_k'(0) \frac{\sin \sqrt{\hat{\mu}} t_k}{\sqrt{\hat{\mu}}} \lambda \hat{a}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{式中} \quad \hat{\rho}_k'(0) = \sum_{m, m'} F_{k-1}(m, m') |m\rangle \langle m'|. \quad (12)$$

密度矩阵的矩阵元在 Fock 空间可以写成

$$\rho_{k, nm}'(t_k) = F_{k-1}(nm) A_n A_m^* + F_{k-1}(n-1, m-1) B_n B_m^*, \quad (13)$$

$$\text{式中} \quad A_n = \cos \sqrt{n+1+\Delta^2/4} \lambda t_k + i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin \sqrt{n+1+\Delta^2/4} \lambda t_k}{\sqrt{n+1+\Delta^2/4}}, \quad (14)$$

$$B_n = \sqrt{\frac{n}{n+\Delta^2/4}} \sin \sqrt{n+\Delta^2/4} \lambda t_k, \quad (15)$$

可以求得腔场的光子数分布概率随注入原子次数 k 的变化规律

$$P_k(n, t_k) = P_{k-1}(n, t_k) |A_n(t_k)|^2 + P_{k-1}(n-1, t_k) |B_n(t_k)|^2. \quad (16)$$

场的复振幅算符的涨落表达式为^[1,2]

$$(\Delta d_{1,2})^2 = \frac{1}{4} (2\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + 1 \pm \langle \hat{a}^2 \rangle \pm \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle) \mp \frac{1}{4} \langle \hat{a} \pm \hat{a}^\dagger \rangle^2, \quad (17)$$

$$\text{式中} \quad \langle \hat{a}^\dagger \rangle_k(t_k) = \sum_n F_{k-1}(n, n+1) (V_1 A_n A_{n+1}^* + V_2 B_{n+1} B_{n+2}^*), \quad (18)$$

$$\langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle_k(t_k) = \sum_n F_{k-1}(n, n+2) V_2 (V_1 A_n A_{n+2}^* + V_3 B_{n+1} B_{n+3}^*), \quad (19)$$

$$V_1 = \sqrt{n+1}, \quad V_2 = \sqrt{n+2}, \quad V_3 = \sqrt{n+3}. \quad (20)$$

若在没有任何原子注入以前腔场处于相干态

$$\hat{\rho}_0'(0) = \sum_{m, m'} \exp(-|\alpha|^2) \alpha^m \alpha^{*m'} / (m! m'!) |m\rangle \langle m'|, \quad (21)$$

则每次相互作用以后腔场的光子统计分布均可由(16)式递推求得。

在注入的第一个原子与腔场共振相互作用中, 场的压缩效应与光子统计分布的关系可由图 1 显示. 在 $\lambda t = 0.10\pi$ 时, $(\Delta d_1)^2$ 大于相干态的涨落, 对应的二阶相干度 $g^{(2)}$ 也大于 1, 此时的光子数分布概率 $P(n)$ 曲线比相应的泊松分布要宽. 引入一个描述 $P(n)$ 曲线宽窄程度的量 $\eta = \langle \Delta n^2 \rangle / \langle n \rangle$ (方差与期望值之比), 显然在泊松分布时有 $\eta = 1$.

不难证明, $g^{(2)} > 1$ 时 $\eta > 1$; $g^{(2)} < 1$ 时 $\eta < 1$. λt 在 0.15π 至 0.32π 的区域时, $(\Delta d_1)^2$ 处于非经典值, 对应的 $g^{(2)}$ 曲线有大致相同的走向且小于 1, 显示非经典的反聚束效应. 压缩最深处 ($\lambda t = 0.25\pi$) 的对应 $P(n)$ 曲线相对最窄, 而且曲线基本左右对称. 因此, 腔场的 d_1 分量出现非经典的压缩效应时, 其光子统计分布是亚泊松的. 在 $\lambda t > 0.32\pi$ 以后, $(\Delta d_1)^2$ 曲线迅速偏离非经典值, 但对应的 $g^{(2)}$ 曲线却较长时间地停留在非经典区域波动, 从图 1(b) 中 λt 为 0.5π 及 π 的 $P(n)$ 曲线可以看到, 尽管此时的 $\eta < 1$, 但曲线均已明显失去左右对称性, 甚至出现复杂的三峰结构.

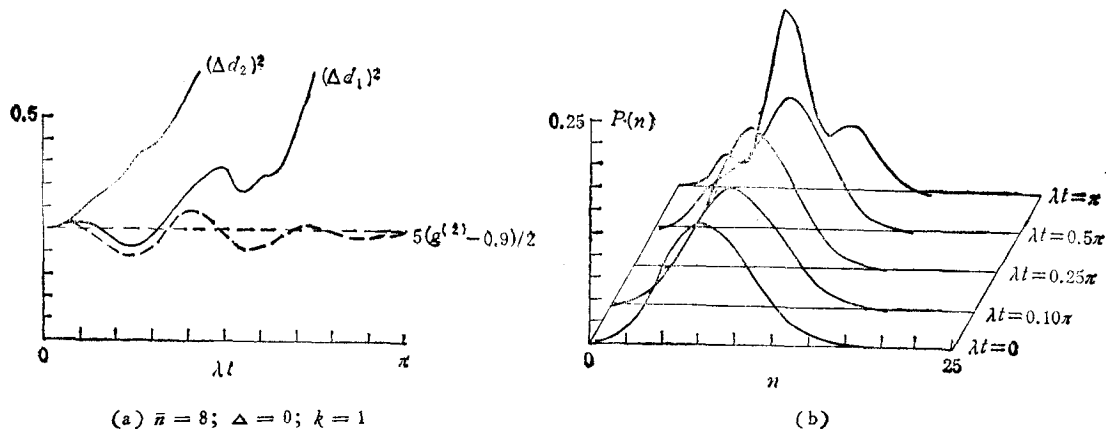


图 1

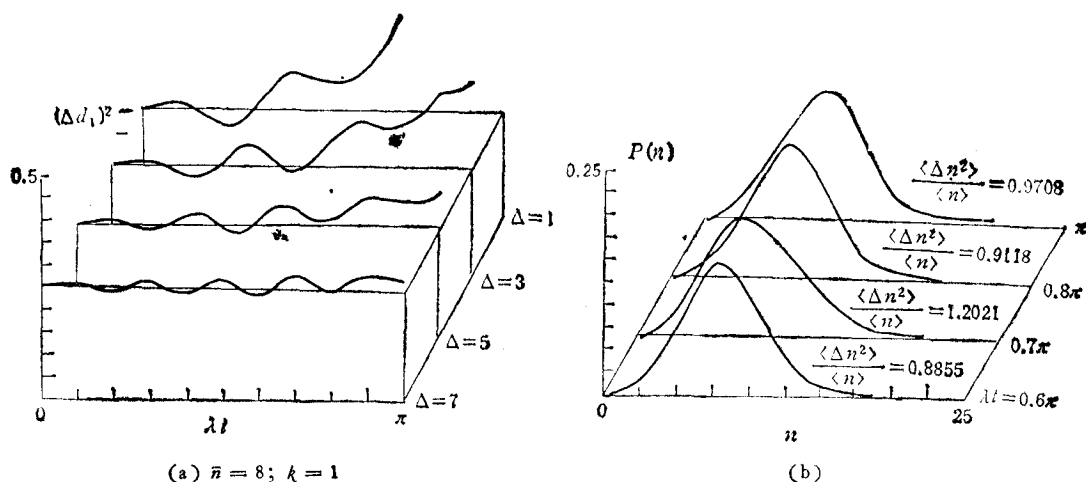


图 2

图 2 显示第一个注入原子与腔场非共振相互作用中偏调对上述函数量的影响. 随着偏调 Δ 的增大, $(\Delta d_1)^2$ 曲线整体上逐渐向表征相干态的 $1/4$ 水平线靠拢, 并逐渐出现反复进入压缩态的现象, 这与共振情况是完全不同的, 但压缩程度亦渐减小. 文献[6]研究了在非共振条件下腔场的一阶相干度周期性地回复光学相干状态的现象, 这两种偏调导致的周期性现象显然不是偶然的巧合. 图 2(b) 显示在远离共振时 ($\Delta = 7$) $P(n)$ 曲线随“时间” λt 的变化情况, 其 η 值亦是在 1 的邻域波动, 但偏离程度不大. 在 λt 为 0.6π 及

0.8π 这两个压缩点, $P(n)$ 基本上是左右对称的亚泊松分布, 前者 $\eta = 0.8855$ 时的压缩深于后者 $\eta = 0.9118$ 时的压缩. 而在 $\lambda t = 0.7\pi$ 时, $\eta > 1$, 压缩消失. 在 $\lambda t = \pi$ 时, 尽管 η 小于 1 但 $P(n)$ 曲线的左右不对称已较明显, 无压缩现象出现. 可见, 在远离共振时, 由于腔场受原子的作用较弱, 其光子统计分布相对初始状态的变异亦较弱, 对应的 η 在初始值附近波动, 这就导致腔场的一阶相干度周期性地回复接近光学相干状态, 二阶相干度在初始值邻域微弱波动, 而在偏离过程中有压缩现象发生. 与共振情况比较, 这种偏离程度较弱, 故压缩较浅.

造成光子数统计分布如此差异的原因可从(16)式看出. 由于激发态原子的作用, $P_k(n)$ 相对原有的 $P_{k-1}(n)$ 必然有所变化且向 n 增大的方向移动; 又由于 B_n 是以 n , Δ , λt 为宗量的三角函数, 在诸变量一定的组合下可能为零或接近零, 使得(16)式中位移项 $P_{k-1}(n)|B_n|^2$ 在对应的 n 点截止或阻塞, 该点左面的 $P(n)$ 曲线继续右移时将在此堆积. 在共振条件下, λt 越大, 系列截止点的间距越小, 其整体均向 n 坐标左方移动. 图 1(b) 中 $\lambda t = \pi$ 时 $P(n)$ 的三峰结构显然与对应的 $B_1 = B_3 = 0$ 有关. 在 $\lambda t = 0.25\pi$ 时, 对应的最小截止点在原有的光子数分布曲线的右端点, 使得新的 $P(n)$ 曲线在右移中被挤压得狭窄而有较深的压缩. 在 $\lambda t = 0.10\pi$ 时, 对应的最小截止点 $B_{100} = 0$ 远离原有的光子数分布曲线尚未及发挥作用, 新的 $P(n)$ 曲线在右移中稍有弥漫. 在非共振条件下, Δ 使得截止点系列的出现相对不易, 如 $\Delta = 7$, $\lambda t = 0.6\pi$ 时, n 从 0 至 50 均无截止点, 仅有 $|B_{13}|^2 \approx 0.007$ 相对较小, 新的 $P(n)$ 曲线稍稍变窄而无明显形变. 远离共振的原子对腔场光子统计分布影响程度的减弱由图 2(b) 清晰可见.

若调节逐次注入腔内的原子飞行速度相同, 并使其在腔内的作用时间导致的最小截止点在初始光子数分布曲线的右端以远, 则激发态原子的逐次牵引作用将使 $P(n)$ 曲线逐渐在截止点前堆积, 在这种过程中有可能出现较深的压缩.

图 3(b) 显示共振条件下取 $\lambda t = 0.25\pi$ 时, 腔场光子数分布概率 $P(n)$ 随注入原子次数 k 的变化情况, 形象地显示 $P(n)$ 逐渐陡峭的过程. 图 3(a) 中对应的 $(\Delta d_1)^2$ 逐渐变小, 在 $k = 5$ 时达到极小值 0.1337, 压缩了 47%, 但以后压缩却逐渐变浅, 并在 $k > 15$ 以后消失. 因此, $P(n)$ 过于狭窄并不有利压缩, 相干压缩态仅仅在光子统计分布偏离

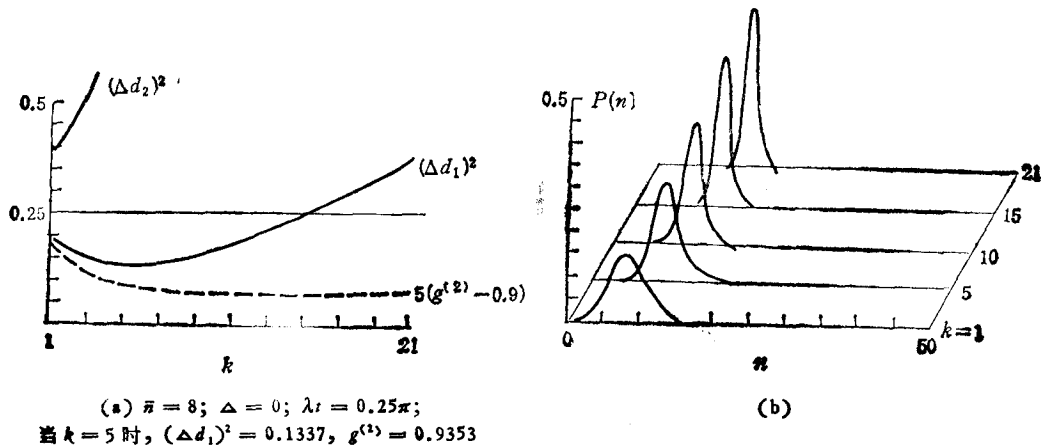


图 3

泊松分布到一定程度时才出现, 这也是强的反聚束效应与同为非经典的压缩效应往往并不同时出现的原因。另外, 由于原子飞越速度和腔长所决定的 λt 的取值使得 $|B_{16}|^2 = 0$, 最小截止点非常接近初始 $P(n)$ 曲线的右端点, 则 k -增大, $P(n)$ 曲线的右移即被截住并迅速堆积成陡峭的峰, 压缩的极值也就在仅注入第 5 次原子时出现。

图 4(a) 显示非共振条件下 $(\Delta = 9, \lambda t = 0.25\pi)$ $(\Delta d_{1,2})^2$ 随注入原子次数的变化情况。可以看到, $(\Delta d_1)^2$ 无压缩, 而 $(\Delta d_2)^2$ 则由经典值逐渐进入非经典值区域, 在 $k = 18$ 时达到极小值 0.1605, 压缩了 36%, 以后又逐渐脱离非经典区域。图 4(b) 是对应的光子数分布概率的变化情况, 可以看到, 偏调 Δ 的较大值使得 $P(n)$ 曲线随 k 而右移不快, 显示原子对腔场的影响减弱; 同时, $P(n)$ 曲线的右移有明显的拖尾现象, 由 (16) 式可知, $P_k(n=0) = P_0(n=0)|A_0|^{2k}$, 而 $|A_0|^2(\lambda t = 0.25\pi) = 0.99$, 故 $P_k(n=0)$ 衰减很慢。还可以看到, 当 $(\Delta d_2)^2$ 出现非经典值时, 对应的光子数分布概率曲线相对变宽, 但无明显的畸变, 对应的 $g^{(2)}$ 大于 1。由前面的讨论可推知, 该现象应在最小截止(阻塞)点远离初始 $P(n)$ 曲线时发生。当 $\Delta = 9, \lambda t = 0.25\pi$ 时, 最小的阻塞点确远在 $n = 44$ 处, 其 $|B_{44}|^2 \approx 1.2438 \times 10^{-4}$ 。另外, 由于对立的右移和拖尾两种因素影响, 当注入原

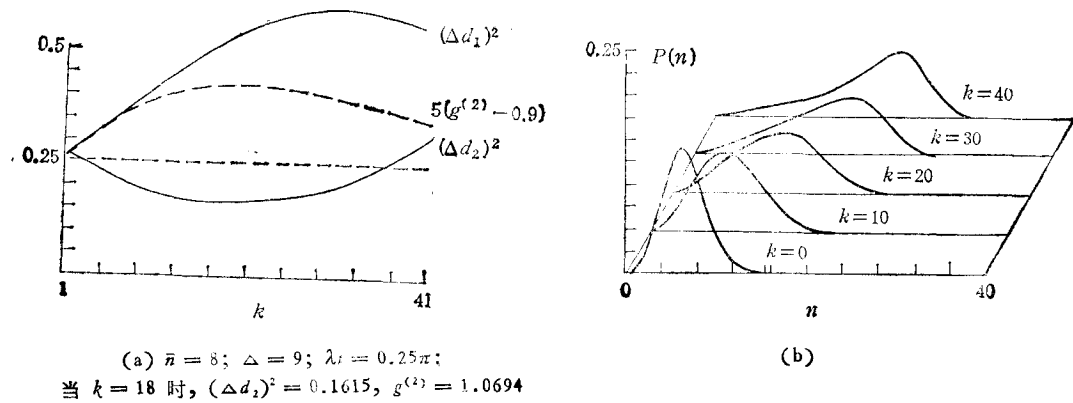


图 4

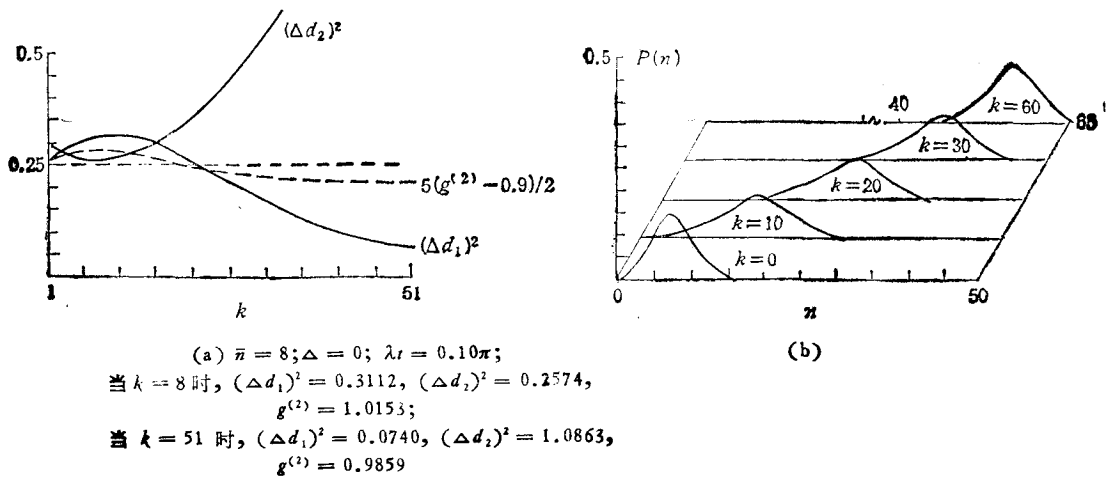


图 5

子次数达到 40 时,腔场的光子数分布概率曲线已有明显的左缓右陡的不对称现象,此时 $(\Delta d_2)^2$ 已进入经典值区域。

可见,若截止(阻塞)点在初始 $P(n)$ 曲线右端以远,在逐次注入激发态原子牵引腔场 $P(n)$ 曲线右移过程中,可望出现 $(\Delta d_1)^2$ 或 $(\Delta d_2)^2$ 的较深压缩,前者对应于光子的亚泊松分布,后者则对应于超泊松分布,两者均要求这种相对于对应泊松分布的变形仅在一定程度以内,并要求保持 $P(n)$ 曲线基本左右对称而无畸变。

当 $\Delta = 0$, $\lambda t = 0.10\pi$ 时,有较远的最小截止点 $|B_{100}|^2 = 0$,故 $P(n)$ 曲线在右移过程中会出现先拓宽再变窄的现象。图 5 中各曲线的变化情况与上述讨论均相符合。当 $k = 51$ 时,有 $(\Delta d_1)^2 \approx 0.0740$,压缩了 70%,该值在 k 继续增大的一段范围内变化甚微,呈现出一种亚稳定状态。

江西省自然科学基金会资助的课题。作者感谢曹昌祺先生的指正和宋辉同志的帮助。

- [1] C. M. Savage and D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.*, 57(1986), 2164.
- [2] 李孝申、刘正东、龚昌德,物理学报,36(1987),1652.
- [3] C. C. Gerry and P. J. Moyer, *Phys. Rev.*, A38(1988), 5665.
- [4] S. Y. Zhu, Z. D. Liu and X. S. Li, *Phys. Lett. A*, 128(1988), 89.
- [5] 刘正东,物理学报,36(1987),1645.
- [6] X. S. Li and Y. N. Peng, *Phys. Rev.*, A32(1985), 1051.

SQUEEZING AND PHOTON STATISTICS

LIU ZHENG-DONG LIU SAN-QIU

Department of Physics, Jiangxi Normal University, Nanchang, 330027

(Received 4 October 1990)

ABSTRACT

In this paper, the relation between squeezing and photon statistics is studied. The photon statistics of cavity field can be changed by injecting atoms at such a low flux that at most one atom at a time is present inside the loss-free cavity, deeper squeezing may be achieved.

PACC: 4250; 3280; 4260D