

自旋体系的一般 $SU(2)$ 相干态

黄 洪 斌

东南大学物理系, 南京, 210018

1990 年 8 月 24 日收到

本文引进自旋体系的一般 $SU(2)$ 相干态, 讨论它的压缩特性、反聚束特性及其产生. 证明当 $SU(2)$ 群收缩到谐振子群时, 一般 $SU(2)$ 相干态转变成一般 Glauber 相干态, 并给出有关的收缩结果.

PACC: 0365, 4250

一、引 言

玻色子体系(如电磁场)的 Fock 态 $|n\rangle$ 和 Glauber 相干态 $|\alpha\rangle$ ^[1]; 自旋体系(如外磁场中的磁偶极子)和类自旋体系(如光相干激发的二能级原子体系)的 Dicke 态 $|jm\rangle$ ^[2] 和 $SU(2)$ 相干态 $|\zeta\rangle$ ^[3] 是被广泛研究和应用的量子态. 有许多方法可产生这些态, 如光的相干激发可产生二能级原子体系的 $SU(2)$ 相干态^[3].

本文引进一般 $SU(2)$ 相干态 $|\zeta, jm\rangle$, 正如一般 Glauber 相干态 $|\alpha, n\rangle$ ^[4-6] 介于态 $|\alpha\rangle$ 和 $|n\rangle$ 之间, 且具备两者的特性并在不同的极限下趋于其中之一, 态 $|\zeta, jm\rangle$ 具备态 $|\zeta\rangle$ 和 $|jm\rangle$ 的特性并在不同的极限下趋于其中之一. 受驱动的谐振子可产生态 $|\alpha, n\rangle$. 本文将证明, 受驱动的自旋体系可产生态 $|\zeta, jm\rangle$. 在 $SU(2)$ 群的收缩下, 态 $|\zeta, jm\rangle$ 变成态 $|\alpha, n\rangle$. 这种收缩将对态 $|\zeta, jm\rangle$ 的压缩特性和关联特性有所影响, 并对两种态下体系的有关非经典特性作了比较.

二、一般 $SU(2)$ 相干态 $|\zeta, jm\rangle$

态 $|\zeta, jm\rangle$ 定义为

$$|\zeta, jm\rangle = T(\zeta)|jm\rangle = \exp(\zeta J_+ - \zeta^* J_-)|jm\rangle, \quad (1)$$

式中 $\zeta = \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $|jm\rangle$ 为 Dicke 态 J_+, J_-, J_z 为 $SU(2)$ 李代数的生成元, 满足对易关系

$$[J_+, J_-] = 2J_z, [J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad (2)$$

且有

$$J_z|jm\rangle = m|jm\rangle, J_{\pm}|jm\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|jm \pm 1\rangle. \quad (3)$$

当 $m = -j$ 时, 态 $|\zeta, j, -j\rangle$ 是通常的 $SU(2)$ 相干态^[3,5], $\theta = 0$ 时, $|0, jm\rangle =$

$|jm\rangle$ 是 Dicke 态。

态 $|\zeta, jm\rangle$ 是非正交的, 因为

$$\begin{aligned} \langle \zeta, jm | \zeta', jm' \rangle &= \sum_{l=-j}^j \sum_{n=-j}^j \sum_{k=-j}^j \left\{ \left[\frac{(j-m)!(j-l)!(j-l)!(j-m')!}{(j+m)!(j+l)!(j+l)!(j+m')!} \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \cdot \frac{(j+n)!(j+k)! \left(-i \tanh \frac{\theta}{2}\right)^{n-l} \left(i \tanh \frac{\theta}{2}\right)^{n-m} \left(-i \tanh \frac{\theta'}{2}\right)^{k-l} \left(i \tanh \frac{\theta'}{2}\right)^{k-m'}}{(j-n)!(j-k)!(n-l)!(n-m)!(k-m')!(k-l)!} \\ &\quad \cdot \left(\cosh \frac{\theta}{2}\right)^{2n} \left(\cosh \frac{\theta'}{2}\right)^{2k} \exp\{i[(m-l)\varphi + (m'-l)\varphi']\} \Big\}, \end{aligned} \quad (4)$$

当 $\zeta = \zeta'$ 时有归一关系

$$\langle \zeta, jm | \zeta, jm' \rangle = \delta_{m, m'}. \quad (5)$$

利用关系(证明见附录)。

$$T^+(\zeta)J_-T(\zeta) = J_- \cos^2 \theta / 2 - e^{-i2\varphi} \sin^2 \theta / 2 \cdot J_+ - e^{-i\varphi} \sin \theta \cdot J_3; \quad (6a)$$

$$T^+(\zeta)J_+T(\zeta) = J_+ \cos^2 \theta / 2 - e^{i2\varphi} \sin^2 \theta / 2 \cdot J_- - e^{i\varphi} \sin \theta \cdot J_3; \quad (6b)$$

$$T^+(\zeta)J_3T(\zeta) = J_3 \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta (e^{i\varphi} J_- + e^{-i\varphi} J_+) \quad (6c)$$

及

$$T^+(\zeta)F(J_+, J_-, J_3)T(\zeta) = F(T^+J_+T, T^+J_-T, T^+J_3T), \quad (7)$$

可计算得

$$\langle \zeta, jm | J_-^2 | \zeta, jm \rangle = m^2 e^{-i2\varphi} \sin^2 \theta - 2[j(j+1) - m^2] e^{-i2\varphi} \sin^2 \theta / 2 \cdot \cos^2 \theta / 2; \quad (8a)$$

$$\langle \zeta, jm | J_+^2 | \zeta, jm \rangle = m^2 e^{i2\varphi} \sin^2 \theta - 2[j(j+1) - m^2] e^{i2\varphi} \sin^2 \theta / 2 \cdot \cos^2 \theta / 2; \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} \langle \zeta, jm | J_+ J_- | \zeta, jm \rangle &= (j+m)(j-m+1) \cos^4 \theta / 2 + (j-m)(j+m \\ &\quad + 1) \sin^4 \theta / 2 + m^2 \sin^2 \theta; \end{aligned} \quad (8c)$$

$$\begin{aligned} \langle \zeta, jm | J_- J_+ | \zeta, jm \rangle &= (j-m)(j+m+1) \cos^4 \theta / 2 \\ &\quad + (j+m)(j-m+1) \sin^4 \theta / 2 + m^2 \sin^2 \theta; \end{aligned} \quad (8d)$$

$$\langle \zeta, jm | J_3 | \zeta, jm \rangle = m \cos \theta. \quad (8e)$$

由(8)式可算得算符 $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ 的实部和虚部的均方差为

$$\Delta J_1 = \frac{1}{2} [j(j+1) - m^2] (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi); \quad (9a)$$

$$\Delta J_2 = \frac{1}{2} [j(j+1) - m^2] (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi). \quad (9b)$$

测不准关系为

$$\Delta J_1 \Delta J_2 \geq \frac{1}{2} |\langle J_3 \rangle|. \quad (10)$$

将(9)和(8e)式代入(10)式有

$$[j(j+1) - m^2] (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \geq |m \cos \theta|. \quad (11)$$

由(11)式知,当 $m = \pm j$ 时,态 $|\zeta, jm\rangle$ 不是理想态及最小测不准态^[7]. 在此情形下,体系的量子噪声较大. 当 $m = \pm j$ 时,对一定的 θ 及 φ 值,态 $|\zeta, jm\rangle$ 可为理想态及最小测不准态^[7],此时体系的量子噪声较小.

取 $\varphi = 0$, 则当 $\Delta J_1 < \frac{1}{2} |\langle J_3 \rangle|$, 即

$$[j(j+1) - m^2] \cos^2 \theta < |m \cos \theta| \quad (12)$$

时, J_1 分量被压缩^[7]. 显见, $m = 0$ 时,体系无压缩效应,当 $|m|$ 值增大时,体系的量子噪声减小,可以有压缩效应, $|m| = j$ 时,体系的压缩效应最大.

体系的二阶相关函数为

$$g_m^{(2)}(0) = \frac{\langle J_+ J_+ J_- J_- \rangle}{|\langle J_+ J_- \rangle|^2}. \quad (13)$$

当 $g_m^{(2)}(0)$ 分别小于、等于或大于 1 时,称体系具有反聚束、相干或聚束效应. 其中

$$\begin{aligned} \langle J_+ J_+ J_- J_- \rangle = & (j-m)(j-m-1)(j+m+1)(j+m+2) \sin^8 \theta / 2 \\ & + (j+m)(j+m-1)(j-m+1)(j-m+2) \cos^8 \theta / 2 \\ & + (j-m)(j+m+1)(2m+1)^2 \sin^2 \theta \cdot \sin^4 \theta / 2 \\ & + (j+m)(j-m+1)(2m-1)^2 \sin^2 \theta \cdot \cos^4 \theta / 2 \\ & + 4[j(j+1) - 3m^2] \sin^4 \theta / 2 \cdot \cos^4 \theta / 2. \end{aligned} \quad (14)$$

下面对 $m = \pm j$ 和 $m = 0$ 三种情形讨论体系的关联特性:

由(14)和(8c)式得

$$g_{m=-j}^{(2)}(0) = \frac{2j-1}{j} \frac{\tan^4 \theta / 2 + 2(2j-1) \tan^2 \theta / 2 + j(2j-1)}{(2j + \tan^2 \frac{\theta}{2})^2}; \quad (15a)$$

$$g_{m=j}^{(2)}(0) = \frac{2j-1}{j} \frac{\cot^4 \theta / 2 + 2(2j-1) \cot^2 \theta / 2 + j(2j-1)}{(2j + \cot^2 \theta / 2)^2}; \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} g_{m=0}^{(2)}(0) = & 1 + \frac{2}{j(j+1)} \\ & \times \frac{\cot^4 \theta / 2 \cdot [j(j+1) + 2 \cot^2 \theta / 2] - (\cot^4 \theta / 2 - 1)^2}{(1 + \cot^4 \theta / 2)^2}. \end{aligned} \quad (15c)$$

当 $j = 1/2$ 时(15a)和(15b)两式都为零,体系呈反聚束效应; $j \gg 1$, 两式都约为 1, 体系具有相干性. 对(15c)式,仍有小于 1, 等于 1 和大于 1 之分,即体系可呈反聚束、相干及聚束效应. 对 m 的其他值,可作同样的讨论.

三、态 $|\zeta, jm\rangle$ 的产生与收缩

受驱动 j 自旋体系的哈密顿量可表为

$$H(j) = \left(J_3 + j + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega + c(gJ_+ + g^*J_-), \quad (16)$$

式中等号右端第一项加入 $\left(j + \frac{1}{2}\right)$ 是因为取基态能量为 $\frac{1}{2} \hbar \omega$, $g = |g| e^{-i\varphi}$ 是与驱动力及耦合常数有关的因数. c 为无量纲参数, 对自旋体系, $c = 1$, 对谐振子体系, $c \rightarrow 0$. 自旋为 j , 磁矩为 μ 的粒子在外磁场中的哈密顿量^[8]和相干激发原子系统的哈密顿量^[3]即为(14)式的形式.

解定态 Schrödinger 方程

$$H(j)|\zeta, jm\rangle = E(j)|\zeta, jm\rangle. \quad (17)$$

可得本征值 $E(j) = \left(j + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega + m \sqrt{\hbar^2 \omega^2 + 4c^2 |g|^2}$, 其中 $\tan \theta = -2c|g|/\hbar \omega$, 而态 $|\zeta, jm\rangle$ 是 j 自旋体系的本征态. 当 $SU(2)$ 群收缩到谐振子群时^[3,9] (对激子体系这种收缩相当于玻色近似^[9])有

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} H(j) &= \lim_{c \rightarrow 0} \left[\left(J_3 + \frac{1}{2c^2} - \frac{1}{2c^2} + j + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \right. \\ &\quad \left. + g c J_+ + g^* c J_- \right] \\ &= \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega + g a^+ + g^* a = H(n), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} |\zeta, jm\rangle = |\alpha, n\rangle = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a) |n\rangle, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} E(j) &\approx \lim_{c \rightarrow 0} \left[\left(j + m + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega + m \frac{2c^2 |g|^2}{\hbar \omega} \right] \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega - |g|^2 / \hbar \omega = E(n), \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $a^+ = \lim_{c \rightarrow 0} c J_+$, $a = \lim_{c \rightarrow 0} c J_-$, $\alpha = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\theta}{2c} e^{-i\varphi}$, $\alpha^* = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\theta}{2c} e^{i\varphi}$, $n = j + m$. 显见

自旋体系的有关结果收缩到谐振子体系的相应结果. 特别是方程(17)变为

$$H(n)|\alpha, n\rangle = E(n)|\alpha, n\rangle. \quad (21)$$

解方程(21)即得(20)式的 $E(n)$. 文献[4]采用变换哈密顿量 $H(n)$ 的方法解方程(21).

下面列出 $SU(2)$ 群的收缩对前面一些结果的影响(其计算是直截了当的):

$$\lim_{c \rightarrow 0} T^+(\zeta) c^2 J_-^2 T(\zeta) = T^+(\alpha) a^2 T(\alpha) = a^2 + 2\alpha a + \alpha^2; \quad (22a)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} T^+(\zeta) c^2 J_+^2 T(\zeta) = T^+(\alpha) a^{+2} T(\alpha) = a^{+2} + 2\alpha^* a^+ + \alpha^{*2}; \quad (22b)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} T^+(\zeta) c^2 J_+ J_- T(\zeta) = T^+(\alpha) a^+ a T(\alpha) = a^+ a + \alpha a^+ + \alpha^* a + |\alpha|^2, \quad (22c)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} c^2 \Delta J_1^2 = \Delta a_2^2 = 1/4 + n/2; \quad (23a)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} c^2 \Delta J_2^2 = \Delta a_1^2 = 1/4 + n/2, \quad (23b)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \langle c^4 J_+^2 J_-^2 \rangle = (n + |\alpha|^2)^2 + 2n|\alpha|^2 - n, \quad (24)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_n^{(2)}(0) = g_n^{(2)}(0) = 1 + \frac{2n \left(|\alpha|^2 - \frac{1}{2} \right)}{(n + |\alpha|^2)}. \quad (25)$$

对 $n \neq 0$, 从(23)式可以看出, 态 $|\alpha, n\rangle$ 并不是最小测不准态, 且这种群收缩使体系的压缩效应消失, 但从(25)式知, 当 $|\alpha|^2 < 1/2$ 时, 体系的反聚束效应仍存在。

四、结 论

一般 $SU(2)$ 相干态 $|\zeta, jm\rangle$ 可呈反聚束效应和压缩效应。随着 $|m|$ 值的增加, 体系的量子噪声减小, 而当 $|m|$ 靠近 j 时, 体系有较大的压缩效应, $|m| = j$ 时 (体系初始处在基态 $|j, -j\rangle$ 或全激发态 $|j, j\rangle$ 时), 体系的压缩效应最大。

态 $|\zeta, jm\rangle$ 是受驱动 j 自旋体系的本征态, 当 $SU(2)$ 群收缩到谐振子群时趋于态 $|\alpha, n\rangle$, 这种收缩使体系的压缩效应消失, 但仍可保留反聚束效应。

附 录

令

$$f(\lambda) = T^+(\lambda\eta)J_-T(\lambda\eta), \quad (A.1)$$

$$f^+(\lambda) = T^+(\lambda\eta)J_+T(\lambda\eta), \quad (A.2)$$

$$g(\lambda) = T^+(\lambda\eta)J_zT(\lambda\eta), \quad (A.3)$$

式中 $\lambda = \theta/2$, $\eta = e^{-i\varphi}J_+ - e^{i\varphi}J_-$,

有

$$\frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} = T^+[J_-, \eta]T = -2e^{-i\varphi}g(\lambda), \quad (A.4)$$

$$\frac{\partial f^+(\lambda)}{\partial \lambda} = -2e^{i\varphi}g(\lambda), \quad (A.5)$$

$$\frac{\partial g(\lambda)}{\partial \lambda} = T^+[J_z, \eta]T = e^{-i\varphi}f^+(\lambda) + e^{i\varphi}f(\lambda). \quad (A.6)$$

由 (A.4) 和 (A.5) 式得

$$e^{i\varphi} \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} = e^{-i\varphi} \frac{\partial f^+(\lambda)}{\partial \lambda}. \quad (A.7)$$

对 (A.6) 式微分并把 (A.4) 和 (A.5) 式代入有

$$\frac{\partial^2 g(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -4g(\lambda). \quad (A.8)$$

解方程 (A.8) 并利用初值条件

$$g(0) = J_z, \quad \left. \frac{\partial g(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = e^{i\varphi}J_- + e^{-i\varphi}J_+, \quad (A.9)$$

可得 (6c) 式。

简单地计算可得方程

$$\frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda^2} + 4 \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} = 0. \quad (A.10)$$

解 (A.10) 式并利用初值条件

$$f(0) = J_-, \quad \left. \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = -2e^{-i\varphi}J_z,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} = -2e^{-i\psi}(e^{i\psi}J_- + e^{-i\psi}J_+), \quad (\text{A.11})$$

可得 (6a) 式. 同样的方法可得 (6b) 式.

- [1] R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **130**(1963), 2529.
- [2] H. M. Nussenzveig, *Introduction to quantum optics*, London, Gordon and Breach, (1973), p. 210.
- [3] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, *Phys. Rev.*, **A6**(1972), 2211.
- [4] P. Carruthers and M. M. Nieto, *Am. J. Phys.*, **33**(1965), 537.
- [5] M. H. Mahra and M. V. Satyanarayana, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 640.
- [6] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim and P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 2645.
- [7] K. Wodkiewicz and J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(1985), 458.
- [8] E. Layton, Youhong Huang and Shih-I Chu, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 42.
- [9] 黄洪斌, 物理学报, **38**(1989), 1958.

GENERALIZED $SU(2)$ COHERENT STATE OF SPIN SYSTEM

HUANG HONG-BIN

Department of Physics, Southeast University, Nanjing, 210018

(Received 24 August 1990)

ABSTRACT

This paper introduces the generalized $SU(2)$ coherent state of spin system. Its squeezing and antibunching, and generation are discussed. It is shown that under the contraction of group $SU(2)$ to the harmonic-oscillator group, the generalized $SU(2)$ coherent state transforms to the generalized Glauber coherent state, the related results of the contraction are also given.

PACC: 0365; 4250