第 40 卷 第 1 期
1991 年 1 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 40, No. 1
Jan., 1991

相对论带电费密子 Liouville 方程

王仁川 朱栋培[1)]
中国科学技术大学天体物理中心，合肥，230026

黄卓然
美国橡树岭国家实验室

柯治民
美国德州 A&M 大学物理系回旋加速器研究所与理论物理中心

1990 年 1 月 15 日收到

作为密度矩阵一种形式的 Wigner 函数是量子相空间里的分布. 用它描述相对论费密子时，它的通常表达形式为 4×4 矩阵函数. 本文得到相对论带电费密子的 2×2 矩阵形式的 Wigner 函数以及它所满足的 Liouville 方程. 这一方程与量子电动力学里带电费密子满足的 Dirac 方程完全等价. 在描述中能核碰撞的 Walecka 模型里，当只有矢量介子(或标量介子取平均场近似)时，核子满足一定形式的 Dirac 方程. 本文的方程也与之等价. 还证明了 (2×2) Wigner 函数与相对论费密子的波函数在描述量子体系上起着同样的作用. 量子体系的可观察量的全部知识都可以通过这里的 Wigner 函数得到.

PACC: 0360; 2570

一、引 言

微观粒子的量子行为由波函数完全描写. 玻恩对波函数的统计解释揭示了微观粒子与宏观质点行为的巨大差异. 但是这种统计解释又不可能与宏观粒子的经典统计作类比，因为经典统计处理的是相空间即坐标和动量空间里的分布函数. 在量子物理里，由于测不准关系的限制，不可能同时使用坐标空间和动量空间. 1932 年由 Wigner 等人[1]引入的量子相空间分布函数(Wigner 函数)在某种意义上克服了这一困难，重新把微观粒子的分布函数如同经典粒子那样建立在坐标动量的相空间之上，同时把微观粒子波函数所遵循的波动方程如 Schrödinger 方程[2]、Dirac 方程[3] 和 Klein-Gordon 方程[4] 转化为 Wigner 函数所满足的量子 Liouville 方程. 量子 Liouville 方程与经典粒子分布函数所满足的 Liouville 方程极为类似，因而在阐述和表示物理问题时有较强的直观性，在经典类比下，研究者易于抓住问题的核心，使方程得到最佳的简化，因而它得到了广泛的应用.

---

1) 中国科学技术大学近代物理系.

近年来，在非常活跃的重离子物理里出现了对相空间分布函数的极大兴趣。重离子物理里流行的一些模型如核内级联模型、热点模型和流体模型等都十分重视集体和传输行为。在这些模型的框架里，量子分布函数就特别适用。但是绝大多数关于 Wigner 分布函数的讨论都集中在低能无自旋或者可以忽略自旋作用的情况。因为此时由波动方程决定波函数与从 Liouville 方程决定 Wigner 函数是一一对应的，比较简单。要是讨论高能费密子满足的 Dirac 方程，波函数为四分量旋量，那么对应的 Liouville 方程是 4×4 矩阵方程，Wigner 函数为 4×4 矩阵函数，要处理的量大为增加。作为理论分析和形式表示，这种复杂化还是允许的[3,10]。但是如要具体对它进行近似解析计算和数值计算，这种复杂化是极大的障碍。在高能核物理里[5-7]大多数人采用的办法是，对电磁场或介子场作平均场近似以消除自旋的作用[9]，从而大大简化了 Liouville 方程。但显然这种做法过于粗糙，只能作为零级近似。

在不作任何近似的条件下，能否消除高阶矩阵方程带来的附加自由度从而达到简化 Liouville 方程的目的？我们发现，在量子电动力学的框架里这是完全可能的。对于中能核-核碰撞的 Walecka 模型，[8] 只需要对标量介子场作平均场近似也就可以做到这一点。这样从形式到具体计算，采用 Wigner 函数来讨论问题均没有增加新自由度的复杂化，这当然非常有利于费密子 Wigner 函数在核物理领域中的应用。

二、Diruc 方程的二分量形式和 (2×2)Wigner 函数

带电旋量粒子在电磁场中的运动方程为

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu + m)\psi = 0,$$
$$\Box A_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \tag{1}$$

式中 $\Pi_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$，$\gamma^k = \sigma_2\otimes\sigma_k$，$k = 1, 2, 3$，$\gamma^4 = \sigma_3\otimes\sigma_0$，$\sigma_i$ 为 Pauli 矩阵，$\sigma_0 = 1$．由此不难得到二次微分形式的 Dirac 方程

$$\{(\Pi_\mu\Pi_\mu - m^2) + e[\sigma_0\otimes\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H} - i\sigma_1\otimes\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}]\}\psi = 0, \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 分别代表电场和磁场.

旋量场 ψ 为四分量旋量．如果写成两个二分量的旋量

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \tag{3}$$

则方程(2)中 ψ_1 和 ψ_2 是耦合的．引入新量 Ψ，使

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix} = U^{-1}\otimes\sigma_0\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi_2+\psi_1\\ \psi_2-\psi_1\end{pmatrix}, \tag{4}$$

式中 $U = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，则易从方程(2)得到两个退耦的方程

$$\{(\Pi_\mu\Pi_\mu - m^2) + e[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}]\}\Psi_1 = 0,$$
$$\{(\Pi_\mu\Pi_\mu - m^2) + e[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}]\}\Psi_2 = 0. \tag{5}$$

从方程(5)看，Ψ_1 和 Ψ_2 遵循的方程形式极为相似，这启发我们，Ψ_2 可以通过某种作用而从 Ψ_1 得到．事实上有

$$\Psi_2(x,e) = \sigma_2\hat{\theta}\Psi_1(x,e), \tag{6}$$

式中算子 $\hat{\theta}$ 对复函数 $g(x,e)$ 的作用定义为

$$\hat{\theta}g(x,e) = g^*(x,-e), \tag{7}$$

* 表示复共轭. 显然

$$\hat{\theta}^2 = 1. \tag{8}$$

这样求得了 Ψ_1 后,就可以得 ϕ

$$\phi = U\Psi = U\begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \sigma_2\hat{\theta}\Psi_1\end{pmatrix}. \tag{9}$$

因此可以用 Ψ_1 来构造 Wigner 函数. 为此必须引进下面的记号:

虚数 i_1, i_2 取值 i;电荷 e_1, e_2 取值 e. $\phi(1) \equiv \phi(x_1)$, $\phi(2) \equiv \phi(x_2)$. $\partial_{1\mu} = \partial/\partial x_1^\mu$, $\partial_{2\mu} = \partial/\partial x_2^\mu$,

$$\boldsymbol{\sigma}(a) = \left(\sigma_1, \begin{pmatrix}0 & -i_a \\ i_a & 0\end{pmatrix}, \sigma_3\right) \qquad a = 1,2.$$

由方程(5)得 $\Psi_1(2)$ 和 $\Psi_1^+(1)$ 满足的方程为

$$\begin{aligned}&\{[\partial_{2\mu}\partial_{2\mu} - 2i_2e_2A_\mu(2)\partial_{2\mu} - e_2^2A_\mu^2(2) - m^2] + e_2[\boldsymbol{\sigma}(2)\cdot\boldsymbol{H}(2) \\ &\quad - i_2\boldsymbol{\sigma}(2)\cdot\boldsymbol{E}(2)]\}\Psi_1(2) = 0, \\ &[\partial_{1\mu}\partial_{1\mu} + 2i_1e_1A_\mu(1)\partial_{1\mu} - e_1^2A_\mu^2(1) - m^2]\Psi_1^+(1) + e_1\Psi_1^+(1)[\boldsymbol{\sigma}(1) \\ &\quad \cdot\boldsymbol{H}(1) + i_1\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{E}(1)] = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

这个方程的解为

$$\Psi_1^+(1) = \Psi_1^+(x_1,i_1,e_1),\ \Psi_1(2) = \Psi_1(x_2,i_2,e_2). \tag{11}$$

那么从(10)式可推得

$$\begin{aligned}(\Box_2 - \Box_1)\Psi_1(2)\Psi_1^+(1) &= 2[i_2e_2A_\mu(2)\partial_{2\mu} + i_1e_1A_\mu(1)\partial_{1\mu}]\Psi_1(2)\Psi_1^+(1) \\ &+ [e_2^2A_\mu^2(2) - e_1^2A_\mu^2(1)]\Psi_1(2)\Psi_1^+(1) - e_2[\boldsymbol{\sigma}(2)\cdot\boldsymbol{H}(2) - i_2\boldsymbol{\sigma}(2) \\ &\cdot\boldsymbol{E}(2)]\Psi_1(2)\Psi_1^+(1) + e_1\Psi_1(2)\Psi_1^+(1)[\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{H}(1) + i_1\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{E}(1)].\end{aligned} \tag{12}$$

引入质心坐标和相对坐标

$$x^\mu = \frac{1}{2}(x_1^\mu + x_2^\mu),\ x'^\mu = x_2^\mu - x_1^\mu, \tag{13}$$

并定义(2×2) Wigner 函数

$$\begin{aligned}F(x,p;i,e;i_1,e_1;i_2,e_2) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x' e^{-ipx'}\Psi_1(2)\Psi_1^+(1) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x' e^{-ipx'}\Psi_1\left(x + \frac{1}{2}x',\ i_2,\ e_2\right)\Psi_1^+\left(x - \frac{1}{2}x',\ i_1,\ e_1\right),\end{aligned} \tag{14}$$

则方程(12)可写到动量空间去,

$$\begin{aligned}p^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}F(x,p) &= i_2e_2\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu + p_\mu\right)\int d^4p' A_\mu(p')F\left(x,\ p - \frac{1}{2}p'\right)e^{ip'x} \\ &+ i_1e_1\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu - p_\mu\right)\int d^4p' A_\mu(p')F\left(x,p + \frac{1}{2}p'\right)e^{ip'x} \\ &- \frac{1}{2}i\int d^4p' e^{ip'x}A_\mu^2(p')\left[e_2^2F\left(x,p - \frac{1}{2}p'\right) - e_1^2F\left(x,p + \frac{1}{2}p'\right)\right]\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}i\left\{e_2\int d^4p'[\boldsymbol{H}(p')-i_2\boldsymbol{E}(p')]\cdot\boldsymbol{\sigma}(2)F\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right)e^{ip'x}\right.$$

$$\left.-e_1\int d^4p'F\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot[\boldsymbol{H}(p')+i_1\boldsymbol{E}(p')]e^{ip'x}\right\}. \tag{15}$$

此处任意函数 $G(x)$ 的 Fourier 象为

$$G(p)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4xe^{-ipx}G(x), \tag{16}$$

并且已用了自然边界条件

$$\Psi_1(x,\cdots)|_{\Sigma_\infty}=0, \tag{17}$$

Σ_∞ 记四维无限时空的三维无限大封闭边界面。

三、F 与 (4×4)Wigner 函数$\mathscr{F}$的关系及其满足的方程

旋量粒子的 (4×4)Wigner 函数定义为

$$\mathscr{F}(x,p)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x'e^{-ipx'}\psi\left(x+\frac{1}{2}x'\right)\psi^+\left(x-\frac{1}{2}x'\right), \tag{18}$$

用二分量旋量表达，并利用关系(4)式，$\mathscr{F}$ 可写为

$$\mathscr{F}(x,p)=U\begin{pmatrix}\mathscr{F}_{11} & \mathscr{F}_{12}\\ \mathscr{F}_{21} & \mathscr{F}_{22}\end{pmatrix}\tilde{U}, \tag{19}$$

式中

$$\mathscr{F}_{ab}=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x'e^{-ipx'}\Psi_a(x_2)\Psi_b^+(x_1)\quad a,b=1,2. \tag{20}$$

为了能用(2×2)Wigner 函数 $F(x,p;i,e;i_1,e_1;i_2,e_2)$ 来表达上面的 $\mathscr{F}_{ab}$，需要用 Ψ_1 的式子替换 Ψ_2。从关系(6)式看，必须定义特殊的局部作用 $\hat{\theta}_a$，它的作用是改变 i_a，e_a 的符号

$$\hat{\theta}_af(\cdots i_a,e_a,\cdots)=f(\cdots-i_a,-e_a,\cdots), \tag{21}$$

$\hat{\theta}_a$ 为厄密的，并且

$$\hat{\theta}_a\hat{\theta}_a=1. \tag{22}$$

根据(6)式，有

$$\Psi_2(x_a)=\sigma_2(a)\hat{\theta}_a\Psi_1(x_a,i_a,e_a)\Big|_{\substack{i_a=i\\ e_a=e}}=\sigma_2\hat{\theta}_a\Psi_1(x_a,i_a,e_a)\Big|_{\substack{i_a=i\\ e_a=e}}\qquad a=1,2. \tag{23}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{11}(x,p)&\equiv F(x,p;i,e;i_1,e_1;i_2,e_2)\Big|_{\substack{i_1=i_2=i\\ e_1=e_2=e}}=F(x,p;i,e;i,e;i,e)\equiv F(x,p),\\
\mathscr{F}_{12}(x,p)&=\hat{\theta}_1F(x,p;i,e;i_1,e_1;i_2,e_2)|\sigma_2=F(x,p;i,e;-i,-e;i,e)\equiv\hat{\theta}_1F(x,p)\sigma_2,\\
\mathscr{F}_{21}(x,p)&=\sigma_2F(x,p;i,e;i,e;-i,-e)\equiv\hat{\theta}_2\sigma_2F(x,p),\\
\mathscr{F}_{22}(x,p)&=\sigma_2F(x,p;i,e;-i,-e;-i,-e)\sigma_2\equiv\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\sigma_2F(x,p)\sigma_2.
\end{aligned} \tag{24}$$

如果定义

$$F(x,p)\hat{\theta}_a=\hat{\theta}_aF(x,p), \tag{25}$$

则 $\mathscr{F}$ 可写为

$$\mathscr{F} = U\begin{pmatrix}\sigma_0\\ \hat{\theta}_2\sigma_2\end{pmatrix}F(x,p)(\sigma_0,\hat{\theta}_1\sigma_2)\tilde{U}. \tag{26}$$

此式给出 (2×2)Wigner 函数与 (4×4)Wigner 函数之间的关系．式中 σ_2 不属哪个坐标，$\hat{\theta}$ 对它无作用，并且 $i_a e_a$ 和 e_a^2 对 $\hat{\theta}$ 的作用不变，故可直接写出

$$i_1e_1 = i_2e_2 = ie;\ e_1^2 = e_2^2 = e^2;\ i_1^2 = i_2^2 = -1. \tag{27}$$

此外，显然有

$$i_a e = ie_a.$$

这样，$F(x,p)$ 满足的方程(15)可以改写如下：

$$\begin{aligned}
p^\mu\partial_\mu F(x,p) = {} & ie\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu + p_\mu\right)\int d^4p' A_\mu(p')F\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right)e^{ip'x}\\
& + ie\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu - p_\mu\right)\int d^4p' A_\mu(p')F\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)e^{ip'x}\\
& - \frac{1}{2}ie^2\int d^4p' e^{ip'x}A_\mu^2(p')\left[F\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) - F\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right]\\
& + \frac{1}{2}i\left\{\int d^4p' e^{ip'x}[e_2\boldsymbol{H}(p') - ie\boldsymbol{E}(p')]\cdot\boldsymbol{\sigma}(2)F\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right)\right.\\
& \left. - \int d^4p' e^{ip'x}F\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot[e_1\boldsymbol{H}(p') + ie\boldsymbol{E}(p')]\right\}.
\end{aligned} \tag{28}$$

上述公式明显表示，如果忽略自旋的作用，则 $F(x,p)$ 与 i_1, e_1, i_2, e_2 无关，$\hat{\theta}_a F(x,p) \equiv F(x,p)$，如同 (5) 式中的 Ψ_1 退化为单分量那样，$F(x,p)$ 也退化为单分量的形式．(28)式也可以化为相空间 (x,p) 里的微分方程．

四、Walecka 模型，相对论带电费密子的 Liouville 方程

描述中能核子-核子碰撞的 Walecka 模型里，在标量介子作平均场近似下，核子波函数 ψ 与矢介子波函数 ϕ_μ 满足的方程为

$$\begin{aligned}
&[\gamma_\mu(\partial_\mu - ig\phi_\mu) - M^*]\psi = 0,\\
&(\Box - m^2)\phi_\mu = ig\bar{\psi}\gamma_\mu\psi.
\end{aligned} \tag{29}$$

这组方程与方程(1)完全类似，只要把 e 换为 g，把 A_μ 换为 ϕ_μ，唯一不同之处是介子有静止质量而光子无静止质量．因此，对(29)式中矢介子场 ϕ_μ 的解，设 $m=0$ 即得(1)式中电磁场 A_μ 的解．

利用 Green 函数，ϕ_μ 可表达为

$$\phi_\mu(x) = \phi_\mu^0(x) + ig\int d^4x' G(x-x')\bar{\psi}(x')\gamma_\mu\psi(x'), \tag{30}$$

式中 $G(x)$ 为 Klein-Gordon 算子的 Green 函数

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{ipx}/(p^2 + m^2 - i\varepsilon), \tag{31}$$

而 $\phi_\mu^0(x)$ 为自由 Klein-Gordon 方程的解．

本文的 Wigner 函数 $F(x,p)$ 所满足的方程 (28) 还不能称作费密子的 Liouville 方程，因为其中 $A_\mu(x)$ (或 $\phi_\mu(x)$) 里还包含有旋量场 ψ, $\bar{\psi}$, 方程(28)并不封闭. 要把 ϕ_μ (或 A_μ) 里的 $\psi,\bar{\psi}$ 全用 $F(x,p)$ 表达出来才能使方程封闭.

利用关系

$$\begin{aligned}\psi(x)\psi^+(x) &= \int d^4p\mathscr{F}(x,p) \\ &= \sigma_0\otimes(\mathscr{F}_{11}+\mathscr{F}_{22})+\sigma_1\otimes(\mathscr{F}_{11}-\mathscr{F}_{22})+i\sigma_2\otimes(\mathscr{F}_{12}-\mathscr{F}_{21}) \\ &\quad -\sigma_3\otimes(\mathscr{F}_{12}+\mathscr{F}_{21}).\end{aligned} \tag{32}$$

可以将(30)式改写如下:

$$\boldsymbol{\phi}(x)=\boldsymbol{\phi}^0(x)+2g\int d^4x'd^4p'G(x-x')\mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{F}_{11}(x',p')-\mathscr{F}_{22}(x',p')),$$

$$\phi_4(x)=\phi_4^0(x)+2ig\int d^4x'd^4p'G(x-x')\mathrm{Tr}(\mathscr{F}_{11}(x',p')+\mathscr{F}_{22}(x',p')). \tag{33}$$

这里 Tr 表示对 2×2 矩阵求迹. 另外,可以用单位矩阵及 Pauli 矩阵把 $F(x,p)$ 展开

$$F=f_1\sigma_1+f_2\sigma_2+f_3\sigma_3+f_0\sigma_0, \tag{34}$$

则

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{11}&=F=f_1\sigma_1+f_2\sigma_2+f_3\sigma_3+f_0\sigma_0, \\ \mathscr{F}_{22}&=\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\sigma_2F\sigma_2=\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2(-f_1\sigma_1+f_2\sigma_2-f_3\sigma_3+f_0\sigma_0).\end{aligned} \tag{35}$$

上述公式中,对电磁作用言，$f_\mu=f_\mu(x,p;i,e;i_1,e_1;i_2,e_2)$，而对核子-介子系统，$f_\mu=f_\mu(x,p;i,g;i_1,g_1;i_2,g_2)$，并且总取 $f_4=if_0$, $\sigma_4=-i\sigma_0$. 如果没有 $\hat{\theta}_a$ 作用，则 i_1,i_2 自动取值 $i,e_1,e_2(g_1,g_2)$ 自动取值 $e(g)$;如果有算子 $\hat{\theta}_a$ 存在，则在作用完后再如上法取值.

今引入两个新算子 $\hat{\theta}_+$ 和 $\hat{\theta}_-$,

$$\hat{\theta}_+=\frac{1}{2}(1+\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2),\ \hat{\theta}_-=\frac{1}{2}(1-\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2), \tag{36}$$

显见

$$\hat{\theta}_++\hat{\theta}_-=1,\ \hat{\theta}_+^2=\hat{\theta}_+,\ \hat{\theta}_-^2=\hat{\theta}_-,\ \hat{\theta}_+\hat{\theta}_-=\hat{\theta}_-\hat{\theta}_+=0, \tag{37}$$

$\hat{\theta}_+,\hat{\theta}_-$ 为互补的投影算子. 这样有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{11}+\mathscr{F}_{22}&=2[\hat{\theta}_-f_1\sigma_1+\hat{\theta}_+f_2\sigma_2+\hat{\theta}_-f_3\sigma_3+\hat{\theta}_+f_0\sigma_0], \\ \mathscr{F}_{11}-\mathscr{F}_{22}&=2[\hat{\theta}_+f_1\sigma_1+\hat{\theta}_-f_2\sigma_2+\hat{\theta}_+f_3\sigma_3+\hat{\theta}_-f_0\sigma_0].\end{aligned} \tag{38}$$

(33)式就成为

$$\begin{aligned}\phi_1(x)&=\phi_1^0(x)+8g\hat{\theta}_+\int d^4x'd^4p'G(x-x')f_1(x',p'), \\ \phi_2(x)&=\phi_2^0(x)+8g\hat{\theta}_-\int d^4x'd^4p'G(x-x')f_2(x',p'), \\ \phi_3(x)&=\phi_3^0(x)+8g\hat{\theta}_+\int d^4x'd^4p'G(x-x')f_3(x',p'), \\ \phi_4(x)&=\phi_4^0(x)+8g\hat{\theta}_+\int d^4x'd^4p'G(x-x')f_4(x',p').\end{aligned} \tag{39}$$

对于光子场,只要在(39)式中将 e 换为 g，而 $G(x-x')$ 用 $D(x-x')=G(x-$

$x')|_{m=0}$ 代替即可。

现在已经用 Wigner 函数的分量 f_μ 把介子场(光子场)表达出来,那么,把它们代回到 $F(x,p)$ 所满足的方程(28)中,并把那里的 $F(x,p)$ 展开为 f_μ,就可以得到关于 f_μ 的封闭方程,它也就是相对论带电费密子的 Liouville 方程

$$
\begin{aligned}
p_\mu\partial_\mu f_0(x,p) &= ie\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu + p_\mu\right)\int d^4p' A_\mu(p') f_0\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right)e^{ip'x} \\
&+ ie\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu - p_\mu\right)\int d^4p' e^{ip'x} A_\mu(p') f_0\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right) \\
&- \frac{1}{2}ie^2\int d^4p' e^{ip'x} A_\mu^2(p')\left[f_0\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) - f_0\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2}i\int d^4p' e^{ip'x}\left[(e_2H_1 - ieE_1)f_1\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) - (e_1H_1 + ieE_1)f_1\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2}i\int d^4p' e^{ip'x}\left[(eH_2 - ie_2E_2)f_2\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) - (eH_2 + ie_1E_2)f_2\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2}i\int d^4p' e^{ip'x}\left[(e_2H_3 - ieE_3)f_3\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) - (e_1H_3 + ieE_3)f_3\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_\mu\partial_\mu f_1(x,p) &= ie\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu + p_\mu\right)\int d^4p' e^{ip'x} A_\mu(p') f_1\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) \\
&+ ie\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu - p_\mu\right)\int d^4p' e^{ip'x} A_\mu(p') f_1\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right) \\
&- \frac{i}{2}e^2\int d^4p' e^{ip'x} A_\mu^2(p')\left[f_1\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) - f_1\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\int d^4p' e^{ip'x}\left[(e_2H_3 - ieE_3)f_2\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) + (e_1H_3 + ieE_3)f_2\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\int d^4p' e^{ip'x}\left[(eH_2 - ie_2E_2)f_3\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) + (eH_2 + ie_1E_2)f_3\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2}i\int d^4p' e^{ip'x}\left[(e_2H_1 - ieE_1)f_0\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) - (e_1H_1 + ieE_1)f_0\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_\mu\partial_\mu f_2(x,p) &= ie\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu + p_\mu\right)\int d^4p' e^{ip'x} A_\mu(p') f_2\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) \\
&+ ie\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu - p_\mu\right)\int d^4p' e^{ip'x} A_\mu(p') f_2\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right) \\
&- \frac{1}{2}ie^2\int d^4p' e^{ip'x} A_\mu^2(p')\left[f_2\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) - f_2\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\int d^4p' e^{ip'x}\left[(e_2H_3 - ieE_3)f_1\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) + (e_1H_3 + ieE_3)f_1\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\int d^4p' e^{ip'x}\left[(e_2H_1 - ieE_1)f_3\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) + (e_1H_1 + ieE_1)f_3\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&+ \frac{i}{2}\int d^4p' e^{ip'x}\left[(eH_2 - ie_2E_2)f_0\left(x,p-\frac{1}{2}p'\right) - (eH_2 + ie_1E_2)f_0\left(x,p+\frac{1}{2}p'\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_\mu \partial_\mu f_3(x, p) &= ie\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu + p_\mu\right)\int d^4p' e^{ip'x} A_\mu(p') f_3\left(x, p - \frac{1}{2}p'\right) \\
&+ ie\left(\frac{1}{2i}\partial_\mu - p_\mu\right)\int d^4p' e^{ip'x} A_\mu(p') f_3\left(x, p + \frac{1}{2}p'\right) \\
&- \frac{1}{2} ie^2 \int d^4p' e^{ip'x} A_\mu^2(p') \left[f_3\left(x, p - \frac{1}{2}p'\right) - f_3\left(x, p + \frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\int d^4p' e^{ip'x}\left[(eH_2 - ie_2E_2) f_1\left(x, p - \frac{1}{2}p'\right) + (eH_2 + ie_1E_2) f_1\left(x, p + \frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\int d^4p' e^{ip'x}\left[(e_2H_1 - ieE_1) f_2\left(x, p - \frac{1}{2}p'\right) + (e_1H_1 + ieE_1) f_2\left(x, p + \frac{1}{2}p'\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2} i \int d^4p' e^{ip'x}\left[(e_2H_3 - ieE_3) f_0\left(x, p - \frac{1}{2}p'\right) - (e_1H_3 + ieE_3) f_0\left(x, p + \frac{1}{2}p'\right)\right].
\end{aligned}
\tag{40}
$$

可以看到 f_μ 只依赖于 e_a，与 i_a 无关。因此 $\hat{\theta}_a$ 算子对它的作用可简化。对于核子和介子的情形，只需要将 e 换为 g，A_μ 换成 ϕ_μ。由方程(40)解出 f_μ，再从 $F = f_\mu \sigma_\mu$ 得到(2×2)Wigner 函数，然后由(24)式算出 $\mathscr{F}_{ab}$，代入(19)式即得(4×4)Wigner 函数 $\mathscr{F}$。

五、f_μ 分量下的量子力学

波函数在量子力学、量子电动力学或量子色动力学里处于极为重要的地位。如果知道了一个体系的波函数，也就知道了这个体系所提供的所有信息。在我们这个框架里，得到的是函数 $f_\mu(x,p)$，从它并不能简单地导出波函数。但实际上，我们对波函数本身并不感兴趣。感兴趣的是通过波函数找出有关该物理体系的全部信息。而这里将证明，通过 f_μ 也完全可以找到这些信息。当然此时代表力学量的算符形式要作相应的改变。下面列举一些典型的可观测量的表示式。

1）流密度

$$
j_\mu(x) = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = 8e\hat{\theta}(\mu)\int d^4p f_\mu(x,p), \tag{41}
$$

式中

$$
\hat{\theta}_\mu = \begin{cases} \hat{\theta}_+ & \mu = 1,2,4; \\ \hat{\theta}_- & \mu = 3. \end{cases}
$$

2）一般物理量的期望值

在量子力学里，力学量 $Q(x,p)$ 要用算符 $\hat{Q}(x,\hat{p})$ 代表，$\hat{p}_\mu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$．常规定义

$$
\langle Q \rangle = \int \psi^+(x)\hat{Q}(x,p)\psi(x)d^3x.
$$

现令

$$
x_2 = x + \frac{1}{2}x', \quad x_1 = x - \frac{1}{2}x',
$$

那么

$$\langle Q\rangle=\lim_{x'\to 0}\int\psi^{+}(x_1)\hat{Q}(x_2,\hat{p}(x_2))\psi(x_2)d^3x$$
$$=\lim_{x'\to 0}\int d^3x\hat{Q}(x_2,\hat{p}(x_2))\mathrm{Tr}\int d^4pe^{ipx'}\mathscr{F}(x,p)$$
$$=8\hat{\theta}_{+}\int d^3xd^4pQ\left[x,\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x}+p\right]f_4(x,p).$$

定义与 Q 相应的算子 $\hat{Q}_f$ 为

$$\hat{Q}_f=8\hat{Q}\left[x,p+\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x}\right]\hat{\theta}_{+},\tag{42}$$

则力学量 Q 的期望值为

$$\langle Q\rangle=\int d^3xd^4p\hat{Q}_ff_4(x,p).\tag{43}$$

3) 平均耦合能

电磁场与自旋的耦合能为

$$\Delta E=-\frac{1}{2}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}[\Pi_{\mu},\Pi_{\nu}]=-e[\sigma_0\otimes\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}-i\sigma_1\otimes\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}],\tag{44}$$

故平均耦合能为

$$\langle\Delta E\rangle=\int d^3x\psi^{+}\Delta E\psi(x)=\langle\Delta E_{\mathrm{m}}\rangle+\langle\Delta E_{\mathrm{e}}\rangle,\tag{45}$$

式中

$$\begin{aligned}\langle\Delta E_{\mathrm{m}}\rangle&=\int d^3x\psi^{+}(-e\sigma_0\otimes\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H})\psi\\&=-8e\int d^3xd^4p[H_1(x)\hat{\theta}_{-}f_1(x,p)+H_2(x)\hat{\theta}_{+}f_2(x,p)\\&\quad+H_3\hat{\theta}_{-}f_3(x,p)],\end{aligned}\tag{46}$$

$$\begin{aligned}\langle\Delta E_{\mathrm{e}}\rangle&=ie\int d^3x\psi^{+}\sigma_1\otimes\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\psi\\&=8ie\int d^3xd^4p[E_1(x)\hat{\theta}_{+}f_1(x,p)+E_2(x)\hat{\theta}_{-}f_2(x,p)\\&\quad+E_3(x)\hat{\theta}_{+}f_3(x,p)].\end{aligned}\tag{47}$$

从上面的分析可知，$f_{\mu}(x,p)$ 四个分量完全可以替代波函数 ψ 的四个分量而不丢失有关物理体系的信息，它们之间是等价的。分布函数 $f_{\mu}(x,p)$ 是通过 (2×2)Wigner 函数定义的，而 Wigner 函数又从波函数而来。然而求出分布函数 $f_{\mu}(x,p)$ 并不需要先知道 Wigner 函数或波函数，可以直接依据物理条件从方程解出，且独立自由度和波函数一样多，这无疑是一种独立有效的描述方式。

六、小 结

相对论费密子满足的 Liouville 方程是一个非线性的微分积分方程组，要求它的严格解几乎不可能。如果找初级近似，把 A_{μ} 看作外场，微观粒子对自身的作用也可以忽

略，则方程(40)变为线性齐次方程．但即使这样，也比原方程(1)或(29)要复杂得多，求精确的解析解也很困难．（4×4）Wigner 函数满足的方程要比原方程更直观，更接近经典，依据实际物理条件更易作近似处理，但增加了大量的自由度．本文的方程(40)保留了 Wigner 函数的直观特点而又没有比波动方程增加新的自由度，因此它比（4×4）Wigner 函数更便于作近似计算和数值计算．

本工作主要是在美国橡树岭国家实验室核理论组完成的．部分得到美国能源部核物理局编号为 DE-ACO5840R21400 合同以及美国国家科学基金编号为 NSF 86-08149 合同的资助．

[1] E. P. Wigner, *Phys. Rev.*, 40(1932), 749.
[2] P. Carruthers and F. Zachariasen, *Rev. Mod. Phys.*, 55(1983), 245.
[3] M. E. Carrington, M. J. Rhoades-Brown and M. Ploszajczak, *Phys. Rev.*, D35(1987), 3981.
[4] P. Carruthers and F. Zachariasen, *Phys. Rev.*, D13(1976), 950.
[5] C. Y. Wong, *Phys. Rev.*, C25(1982), 1460.
[6] C. M. Ko, Q. Li and R. C. Wang, *Phys. Rev. Lett.*, 59(1987), 1084.
[7] G. F. Bertsch, "Dynamics of Heavy-Ion Collisions", R. Balian *et al.*, eds. 'Les Houches, Session XXX, 1977 Nuclear Physics with Heavy-Ions and Mesons', North-Holland Publishing Company, (1978), p. 175.
[8] J. D. Walecka, *Ann. Phys.*, 83(1974), 491.
[9] J. Zimanyi, J. Bondorf, I. Mishustin and J. Theis, *Nucl. Phys.*, A435(1985), 810.
[10] F. J. Narcowich and R. F. O'Connell, *Phys. Rev.*, A34(1986), 1.

LIOUVILLE EQUATION OF RELATIVISTIC CHARGED FERMION

WANG REN-CHUAN ZHU DONG-PEI

Astrophysics Center, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026

WONG CHEUK-YIN

Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, TN 37831, *USA*

KO CHE-MING

Cyclotron Institute and Center for Theoretical Physics, Texas A&M University, College Station, TX 77843, *USA*

(Received 15 January 1990)

ABSTRACT

As a form of density matrix, the Wigner function is the distribution in quantum phase space. It is a 2×2 matrix function when one uses it to describe the non-relativistic fermion. While describing the relativistic fermion, it is usually represented by 4×4 matrix function. In this paper we obtain a Wigner function for the relativistic fermion in the form of 2×2 matrix, and the Liouville equation satisfied by the Wigner function. This equation is equivalent to the Dirac equation of charged fermion in QED. Our equation is also equivalent to the Dirac equation in the Walecka model applied to the intermediate energy nuclear collision while the nucleon is coupled to the vector meson only (or taking mean field approximation for the scalar meson). We prove that our 2×2 Wigner function completely describes the quantum system just the same as the relativistic fermion wave function. All the information about the observables can be obtained with our Wigner function.

PACC: 0360; 2570