

超导体中库珀对的 $SU(2)$ 与 Glauber 相干态——库珀对与约瑟夫森超流性的量子特性研究

黄 洪 斌

东南大学物理系, 南京, 210018
1990 年 12 月 22 日收到

本文利用类自旋算符证明 BCS 超导基态波函数是单个库珀对 $SU(2)$ 相干态波函数的直积, 且在一定条件下为库珀对体系的 $SU(2)$ 相干态波函数。若两块处在 BCS 超导基态的超导体耦合在一起, 则体系仍处在 $SU(2)$ 相干态, 且在一定条件下为定态超辐射态。在 $SU(2)$ 群到谐振子群的收缩下, 库珀对的 $SU(2)$ 相干态变为 Glauber 相干态。讨论了两种情形下库珀对与约瑟夫森超流性的量子噪声、分布及二阶相关特性。

PACC: 0365; 7420F; 7450; 7440

一、引 言

BCS 超导基态波函数为^[1,2]

$$|\text{BCS}\rangle = \prod_k (u_k + v_k e^{-i\varphi_k} c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger) |0\rangle, \quad (1)$$

其中 $c_{k\uparrow}^\dagger, (c_{k\uparrow})$ 为自旋向上的单个电子在 Bloch 态 $|k\rangle$ 上的产生(湮没)算符; $c_{-k\downarrow}^\dagger, (c_{-k\downarrow})$ 为自旋向下的单个电子在 Bloch 态 $|-k\rangle$ 上的产生(湮没)算符, $|0\rangle$ 为真空态。

引进 Anderson 类自旋算符^[3]

$$s_k^+ = c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger, \quad s_k^- = c_{k\downarrow} c_{-k\uparrow}, \quad s_{kz} = \frac{1}{2} (c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} + c_{-k\downarrow}^\dagger c_{-k\downarrow} - 1), \quad (2)$$

则 $s_k^\pm, s_{kz}$ 满足 $SU(2)$ 李代数的对易关系

$$[s_k^+, s_k^-] = 2s_{kz}, \quad [s_{kz}, s_k^\pm] = \pm s_k^\pm. \quad (3)$$

利用(2)式的定义(1)式可表为^[4]

$$|\text{BCS}\rangle = \prod_k (u_k + v_k e^{-i\varphi_k} s_k^+) |0\rangle. \quad (4)$$

Wallace 和 Stavn^[4] 采用类自旋算符利用(4)式处理了 Josephson 结的隧道效应; Rogovin, Scully 及其合作者在一系列工作中广泛采用此法处理定态^[5]和瞬态^[6] Josephson 结动力学, 强调 Josephson 结动力学中的一些现象与量子光学中的一些现象如激光、超辐

射及拉比振荡等之间的相似性; Lugiato 和 Milani^[7] 利用类自旋算符详细地讨论了 Josephson 结库珀对传递算符的两种近似对易关系: 数相角 (number-phase-angle) 及类自旋角动量 (pseudospin-angular-momentum) 描述. 在对 $|\text{BCS}\rangle$ 态的处理上, 文献 [5f] 采用类自旋算符的玻色近似, 将单个超导体的 $|\text{BCS}\rangle$ 态函数写成两个 Glauber 相干态波函数的直积 (零温费密面上、下各用一 Glauber 相干态波函数描写), 而将 Josephson 结用四个耦合谐振子或在一定近似下用两个耦合谐振子 (文献 [5f] 中正是这样做的) 来描述. 而文献 [5c] 则用近乎唯象的方法证明 Josephson 结自振荡态为定态超辐射态. 本文利用类自旋算符从 (4) 式出发严格地证明单个超导体和耦合超导体 BCS 超导基态实际上是 $SU(2)$ 相干态, 这些 $SU(2)$ 相干态在一定条件下即为超辐射态, $SU(2)$ 群到谐振子群的收缩, 使得 $SU(2)$ 相干态变为 Glauber 相干态, 因此文献 [5f, 5c] 的结果只是本文的特例. 同时本文讨论两种相干态下库珀对与 Josephson 超流所遵从的分布、量子噪声及二阶关联特性. 本文采用半经典方法处理超流的量子噪声, 且只考虑零偏压和超流低于其临界值的情形.

二、单超导体的 $SU(2)$ 相干态

$$\text{令 } u_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \varepsilon_k/E_k)^{\frac{1}{2}} = \cos \theta_k/2, \quad v_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \varepsilon_k/E_k)^{\frac{1}{2}} = \sin \theta_k/2, \text{ 利}$$

用(3)和(4)式可写为

$$|\text{BCS}, \lambda\rangle = \prod_k \left[\left(\cos \frac{\theta_k}{2} + \sin \frac{\theta_k}{2} \cdot e^{-i\varphi_k} s_k^+ \right) |s_k, -s_k\rangle \right] \quad (5a)$$

$$= \prod_k \left\{ \exp \left[\frac{\theta_k}{2} (e^{-i\varphi_k} s_k^+ - e^{i\varphi_k} s_k^-) \right] |s_k, -s_k\rangle \right\}, \quad (5b)$$

其中 $|s_k, -s_k\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_k$ 为单个库珀对的基态, 即类自旋向下的状态 (真空态), 满足 $s_k^+ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_k = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_k$, $s_k^- \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_k = 0$, λ 为超导体标号 (见下文). 由 (5b) 式知, BCS 超导基态波函数为单个库珀对 $SU(2)$ 相干态函数

$$\exp \left[\frac{\theta_k}{2} (e^{-i\varphi_k} s_k^+ - e^{i\varphi_k} s_k^-) \right] \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_k^{(8)}$$

的直积.

令

$$S_k^\pm = \frac{1}{\theta_k} \sum_k \theta_k s_k^\pm, \quad s_{xk} = \sum_k s_{zk} \quad (6)$$

满足对易关系

$$[S_k^+, S_k^-] = 2\theta_k^{-2} \sum_k \theta_k^2 s_{zk}, \quad [s_{xk}, S_k^\pm] = \pm S_k^\pm. \quad (7)$$

由(6)式 (5b) 式可表为

$$|\text{BCS}, \lambda\rangle = \exp \left[\frac{\theta_1}{2} (e^{-i\varphi_1} S_1^+ - e^{i\varphi_1} S_1^-) \right] |S_1, -S_1\rangle, \quad (8)$$

其中 S_1 为总库珀对数的一半, $|S_1, -S_1\rangle$ 为体系的基态, 即所有类自旋向下的状态 (真空态), 满足 $S_1^- |S_1, -S_1\rangle = 0$. (7) 式的对易关系虽是封闭的, 但不满足 $SU(2)$ 李代数的对易关系, 除非 $\theta_k = \theta_1$ 或 $\sum_k (1 - \theta_k^{-2} \theta_k^2) s_{zk}$ 为一可忽略的小量. 因此 (8) 式形式上是 $SU(2)$ 相干态, 但不是严格的 $SU(2)$ 相干态. 对于强耦合, $\theta_k = \theta_1 = \pi/2$, (8) 式即为严格的 $SU(2)$ 相干态波函数, 也是库珀对的定态超辐射态波函数.

为了讨论处在 BCS 超导基态的库珀对的分布特性, 可将 (5) 式写成单个库珀对 $SU(2)$ 二项式态函数^[9]的直积

$$|\text{BCS}, \lambda\rangle = \prod_k \left\{ \sum_{m_k = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\binom{1}{m_k + \frac{1}{2}} (\sin^2 \theta_k / 2)^{\frac{1}{2} + m_k} (\cos^2 \theta_k / 2)^{\frac{1}{2} - m_k} \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. \times e^{-i(\frac{1}{2} + m_k) \varphi_k} \left| \frac{1}{2}, m_k \right\rangle_k \right\}. \quad (9)$$

当 $\theta_k = \theta_1$ 时, (9) 式为^[9]

$$|\text{BCS}, \lambda\rangle = \sum_{m=-S_1}^{S_1} \left[\binom{2S_1}{S_1 + m} (\sin^2 \theta_1 / 2)^{S_1 + m} (\cos^2 \theta_1 / 2)^{S_1 - m} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times e^{-i(S_1 + m) \varphi_1} |S_1, m\rangle. \quad (10)$$

显见库珀对在态 $|S_1, m\rangle$ 上的概率为

$$P(m) = \binom{2S_1}{S_1 + m} (\sin^2 \theta_1 / 2)^{S_1 + m} (\cos^2 \theta_1 / 2)^{S_1 - m}. \quad (11)$$

(11) 式对应库珀对的二项式分布 (非玻色分布, 也非费密分布). 而 (9) 式只近似对应库珀对的二项式分布, 这是因为每个库珀对的“激发概率” $\sin^2 \frac{\theta_k}{2}$ 与 k 有关, 即各个库珀对对总类自旋 S_1^z 的贡献不一样, 在强耦合时, 每个对的“激发概率”都为 $1/2$, 这时库珀对的分布才是严格的二项式分布.

由 (7) 式知, 算符 $S_i^z = S_{i1} \pm i S_{i2} = \theta_i^{-1} \sum_k \theta_k (s_{1k} \pm i s_{2k})$ 的实部和虚部所对应的测不准关系为^[9]

$$\Delta S_{i1} \Delta S_{i2} \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \sum_k \theta_k^{-2} \theta_k^2 s_{zk} \right\rangle \right|. \quad (12)$$

若 $\Delta S_{i1} < \frac{1}{2} \left| \left\langle \sum_k \theta_k^{-2} \theta_k^2 s_{zk} \right\rangle \right|$, 则称 i 分量被压缩. 由 (5) 式易得

$$\Delta S_{i1}^2 = \theta_i^{-2} \sum_k \theta_k^2 \Delta s_{1k}^2 = \frac{1}{4} \theta_i^{-2} \sum_k \theta_k^2 (1 - \sin^2 \theta_k \cdot \cos^2 \varphi_k); \quad (13a)$$

$$\Delta S_{i2}^2 = \theta_i^{-2} \sum_k \theta_k^2 \Delta s_{2k}^2 = \frac{1}{4} \theta_i^{-2} \sum_k \theta_k^2 (1 - \sin^2 \theta_k \cdot \sin^2 \varphi_k); \quad (13b)$$

$$\left\langle \theta_i^{-2} \sum_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}}^2 s_{z\mathbf{k}} \right\rangle = -\frac{1}{2} \theta_i^{-2} \sum_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}}^2 \cos \theta_{\mathbf{k}}. \quad (13c)$$

因 $\cos \theta_{\mathbf{k}} = e_{\mathbf{k}} / \sqrt{\Delta_{\mathbf{k}}^2 + e_{\mathbf{k}}^2}$ 是 $e_{\mathbf{k}}$ 的奇函数, (13c) 式为零, 因此库珀对体系无压缩效应. 而对单个库珀对取 $\varphi_i = \pi/2$, 则当 $\cos^2 \theta_{\mathbf{k}} < |\cos \theta_{\mathbf{k}}|$ 时, $s_{z\mathbf{k}}$ 分量有压缩效应, 显见这一条件总是满足.

从上面的讨论知, 单个库珀对可有压缩效应, 而总的库珀对无压缩效应, 这是因为单个库珀对的类自旋矢量在转动算符

$$T(\vartheta_{\mathbf{k}}, \varphi_i) = \exp \left[\frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2} (e^{-i\varphi_i} s_{\mathbf{k}}^+ - e^{+i\varphi_i} s_{\mathbf{k}}^-) \right]$$

的作用下, 有的处在 Bloch 球的上半球面, 有的在下半球面, 各占库珀对总数的一半, 且以赤道面为对称面, 总自旋矢量则处在 Bloch 球的赤道上, 因此总自旋的 z 分量为零, 即体系的最小测不准量为零, 测不准关系为 $\Delta S_{i1} \Delta S_{i2} \geq 0$, 因而体系无压缩效应.

由(5)和(6)式可得库珀对体系的二阶相关函数

$$g_{(0)}^{(2)} = \frac{\langle S_i^+ S_i^+ S_i^- S_i^- \rangle}{|\langle S_i^+ S_i^- \rangle|^2} = \frac{2S_i - 1 \tan^4 \theta_i/2 + 2(2S_i - 1) \tan^2 \theta_i/2 + S_i(2S_i - 1)}{S_i (2S_i + \tan^2 \theta_i/2)^2}. \quad (14)$$

计算中已令 $\theta_i^{-2} \sum_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}}^2 2s_{\mathbf{k}} \sin^4 \theta_{\mathbf{k}}/2 = \alpha^2 2S_i \sin^4 \theta_i/2$, $\theta_i^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}} s_{\mathbf{k}} \sin \theta_{\mathbf{k}} = \alpha S_i \sin \theta_i$ 等, α

为常数. 对实际的库珀对体系 $S_i \gg 1$, 因此 $g_{(0)}^{(2)} \approx 1$, 即体系具有相干性^[9].

三、耦合超导体的 $SU(2)$ 相干态

按通常的处理办法, 两耦合超导体的基态波函数可表为两单超导体 BCS 基态波函数的直积^[5a, 5c]

$$|\psi\rangle = |\text{BCS}, L\rangle \otimes |\text{BCS}, R\rangle, \quad (15)$$

其中 $L(R)$ 表示左方(右方)超导体. 假定两超导体等能量态之间存在镜面隧道作用, 则可假定两超导体的算符是对易的^[10]. 由(8), (15)式可写为

$$|\psi\rangle = \exp \left[\frac{\theta}{2} (e^{-i\varphi} S^+ - e^{+i\varphi} S^-) \right] |S, -S\rangle, \quad (16)$$

其中 $S^{\pm} = \theta^{-1} [\theta_L e^{\pm i(\varphi - \varphi_L)} S_L^{\pm} + \theta_R e^{\pm i(\varphi - \varphi_R)} S_R^{\pm}]$, $S_z = S_{zL} + S_{zR}$ (已令 $\lambda = L, R$), $|S, -S\rangle = |S_L + S_R, -(S_L + S_R)\rangle$ 为体系基态, 即所有类自旋向下的状态. 算符 $S^{\pm}, S_z$ 满足对易关系

$$[S^{\pm}, S_z] = 2 \left(\sum_{\mathbf{k}} \theta^{-2} \partial_{\mathbf{k}}^2 s_{z\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}} \theta^{-2} \partial_{\mathbf{q}}^2 s_{z\mathbf{q}} \right); \quad (17a)$$

$$[S_z, S^{\pm}] = \pm S^{\pm}. \quad (17b)$$

$\sum_{\mathbf{k}} \left(\sum_{\mathbf{q}} \right)$ 表示对左方(右方) $\mathbf{k}$ 态求和. (17)式是封闭的, 但不满足 $SU(2)$ 李代数的

对易关系,所以 $|\phi\rangle$ 并不是严格的 $SU(2)$ 相干态,除非 $\theta = \theta_k = \theta_q$ 或

$$\sum_k \theta^{-2} \theta_k^2 s_{zk} + \sum_q \theta^{-2} \theta_q^2 s_{zq} \approx S_z.$$

当 $\theta_k = \theta_q = \theta = \pi/2$ 时, $|\phi\rangle$ 即是文献 [5c] 所讨论的定态超辐射态 (见文中 (6) 式), 这对应形成库珀对的两电子间强耦合的情形, 即假定 $u_k^2 = \cos^2 \theta_k / 2 = 1/2$, $v_k^2 = \sin^2 \theta_k / 2 = 1/2$, 或是只考虑费密面上的库珀对, 这种处理带有一定的局限性. 实际上, 只要

$$\begin{aligned} \delta(S_z) = S_z - & \left(\sum_k \theta^{-2} \theta_k^2 s_{zk} + \sum_q \theta^{-2} \theta_q^2 s_{zq} \right) = \sum_k (1 - \theta^{-2} \theta_k^2) s_{zk} \\ & + \sum_q (1 - \theta^{-2} \theta_q^2) s_{zq} \end{aligned}$$

为一可忽略的小量, $|\phi\rangle$ 即为 $SU(2)$ 相干态函数, $\theta = \pi/2$ 时即为定态超辐射态函数. 本文的处理方法具有普遍性, 可用于处理其他可用 $SU(2)$ 群描述的非均匀体系 (其生成元与某些参量如波矢 k 有关).

当 $\theta = \pi/2$ 时, (16) 式所示的 $SU(2)$ 相干态上将产生最大的宏观偶极矩, 从而产生 Josephson 超辐射, 在一阶近似下, Josephson 超辐射场为 Glauber 相干态, 详细讨论见文献 [5c].

四、直流 Josephson 超流的量子噪声特性及其关联特性

引进算符 ($\lambda = L, R$)

$$S_\lambda^\pm = \sum_k s_k^\pm, \quad S_{\lambda\lambda} = \sum_k s_{\lambda k}. \quad (18)$$

并定义隧道节库珀对的传递算符^[5a,7]

$$S_T^\pm = S_L^\pm S_R^\mp, \quad S_T^- = S_L^- S_R^+, \quad S_{zT} = \frac{1}{2} (S_{zL} - S_{zR}). \quad (19)$$

这些算符满足对易关系^[7]

$$[S_{zT}, S_T^\pm] = \pm S_T^\pm, \quad [S_T^+, S_T^-] = 2(S_{zL} S_R^+ S_R^- - S_{zR} S_L^+ S_L^-) = 2N. \quad (20)$$

库珀对隧道效应可由哈密顿量^[4,5a]

$$H_T = -T(S_T^+ + S_T^-) \quad T > 0 \quad (21)$$

来描写. 其中 T 为库珀对传递矩阵元.

定义单向隧道电流密度算符

$$J_+ = J_1 + iJ_2 = \frac{4eT}{\hbar} S_T^+, \quad J_- = J_1 - iJ_2 = \frac{4eT}{\hbar} S_T^- \quad (22)$$

满足对易关系

$$[J_1, J_2] = i \left(\frac{4eT}{\hbar} \right)^2 N. \quad (23)$$

并有测不准关系

$$\Delta J_1 \Delta J_2 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{4eT}{\hbar} \right)^2 |\langle N \rangle|. \quad (24)$$

而实验上可测的隧道电流密度

$$J = -2e\dot{S}_{zL} = 2e \frac{i}{\hbar} [S_{zL}, H_T] = \frac{4eT}{\hbar} \frac{(S_L^+ - S_L^-)}{2i} = J_L \quad (25)$$

由(24)式知, Josephson 超流有压缩效应, 须

$$\Delta J_L^2 < \frac{1}{2} \left(\frac{4eT}{\hbar} \right)^2 |\langle N \rangle|. \quad (26)$$

作为一级近似, 可用初始波函数(16)式来计算有关平均值^[5a,7]. 经计算(26)式为

$$\begin{aligned} & \left[S_L \sin^2 \theta_L + S_R \sin^2 \theta_R + 2(\sin^4 \theta_L / 2 \cdot \cos^4 \theta_R / 2 + \cos^4 \theta_L / 2 \cdot \sin^4 \theta_R / 2) \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} (1 - 2S_L - 2S_R) \sin^2 \theta_L \cdot \sin^2 \theta_R \cdot \sin^2(\varphi_L - \varphi_R) \\ & \quad \left. - \frac{1}{4} \sin^2 \theta_L \cdot \sin^2 \theta_R \right] < |(S_L \sin^2 \theta_L + 2\sin^4 \theta_L / 2) \cos \theta_R \\ & \quad - (S_R \sin^2 \theta_R + 2\sin^4 \theta_R / 2) \cos \theta_L|, \end{aligned} \quad (27)$$

其中已令

$$\sum_k s_k \sin^4 \theta_k / 2 = S_L \sin^4 \theta_L / 2, \quad \sum_k s_k \cos^4 \theta_k / 2 = S_L \cos^4 \theta_L / 2, \quad (28)$$

$$\sum_k s_k \sin \theta_k = S_L \sin \theta_L, \quad \frac{1}{2} \sum_k s_k \sin^2 \theta_k = \frac{1}{2} S_L \sin^2 \theta_L, \quad (29)$$

$\sum_k s_k \cos \theta_k = S_L \cos \theta_L$, 将 $k \rightarrow q$, $L \rightarrow R$ 可得另一组. 当 $S_L, S_R \gg 1$ 时, (27)式可化为(注意到 $\sin^2 \theta_k = \Delta_k^2 / (\Delta_k^2 + \sigma_k^2) \approx 0$)

$$\csc^2 \theta_L + \csc^2 \theta_R - 2\sin^2(\varphi_L - \varphi_R) < |\cos \theta_L \cdot \csc^2 \theta_L - \cos \theta_R \cdot \csc^2 \theta_R|. \quad (30)$$

若 θ_L, θ_R 和 $(\varphi_L - \varphi_R)$ 可任意取值, 则(30)式是成立的, 但因库珀对在费密面附近的对称分布特性^[2]和费密面上、下库珀对的隧道过程具有相等的概率^[5f], 使得 θ_k 不能任意取值. 实际上(31)式等号右方为零, 而左方当 $(\varphi_L - \varphi_R) = \pi/2$, 且只在费密面上的库珀对参加隧道效应, 则左方亦为零. 可以看到 Josephson 超流可具有零量子噪声, 但不具有压缩效应.

由(16)式可计算得超流的二阶关联函数

$$g_T^{(2)}(0) = \frac{\langle S_L^+ S_L^+ S_L^- S_L^- \rangle}{|\langle S_L^+ S_L^- \rangle|^2} = g_L^{(2)}(0) \times g_R^{(2)}(0), \quad (31)$$

其中

$$g_L^{(2)}(0) = \frac{2S_L - 1}{S_L} \frac{\tan^4 \theta_L / 2 + 2(2S_L - 1)\tan^2 \theta_L / 2 + S_L(2S_L - 1)}{(2S_L + \tan^2 \theta_L / 2)^2}, \quad (32a)$$

$$g_R^{(2)}(0) = \frac{S_R(2S_R - 1)^2 \tan^4 \theta_R / 2 + 2(4S_R^2 - 2S_R - 1)\tan^2 \theta_R / 2 + (2S_R - 1)}{S_R(1 + 2S_R \tan^2 \theta_R / 2)^2}. \quad (32b)$$

当 $S_L, S_R \gg 1$ 时, $g_T^{(2)}(0) \approx 1$, 即 Josephson 超流具有相干性, 因而在实验上可观察到超流的宏观量子干涉现象.

五、 $SU(2)$ 群的收缩对库珀对和 Josephson 超流的量子特性的影响

$SU(2)$ 群通过一个奇异变换可变为谐振子群^[11], 这种变换使对易关系(3)式变为谐振子群生成元的对易关系

$$[A_k^-, A_k^+] = 1, \quad (33)$$

其中 $A_k^- = \lim_{c \rightarrow 0} c S_k^-, A_k^+ = \lim_{c \rightarrow 0} c S_k^+, \lim_{c \rightarrow 0} c^2 S_{k,h} = -1/2$. 定义

$$A_i^- = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \lim_{c \rightarrow 0} c S_i^-, \quad A_i^+ = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \lim_{c \rightarrow 0} c S_i^+, \quad (34)$$

其中 $N_i = \sum_k g_i^{-2} \theta_k^2$ ($i = L, R$). 由(7)和(33)式知 A_i^-, A_i^+ 满足玻色对易关系

$$[A_i^-, A_i^+] = 1. \quad (35)$$

这样 BCS 超导基态波函数(8)式变为 Glauber 相干态波函数

$$|\text{BCS}, \alpha_i\rangle = \exp(\alpha_i A_i^+ - \alpha_i^* A_i^-) |0\rangle. \quad (36)$$

且有

$$A_i^- |\text{BCS}, \alpha_i\rangle = \alpha_i |\text{BCS}, \alpha_i\rangle, \quad (37)$$

其中 $\alpha_i = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\theta_i}{2c} e^{-i\varphi_i}$, $\alpha_i^* = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\theta_i}{2c} e^{i\varphi_i}$. 而库珀对的二项式分布变为泊松分布^[9]

$$P(n) = \frac{|\alpha_i|^2 n}{n!} e^{-|\alpha_i|^2} = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (38)$$

在态 $|\text{BCS}, \alpha_i\rangle$ 上, 算符 $A_i^- = A_{i1} + iA_{i2}$ 的两个正交分量的方均差为 $\Delta A_{i1}^2 = \Delta A_{i2}^2 = 1/4$, 体系仍无压缩效应.

文献 [5f] 也提到 BCS 基态可用一个 Glauber 相干态波函数描写, 但是从不同的途径给出的. 若令

$$A_i^+ = a_i^+ + b_i^+, \quad (39)$$

其中 a_i^+, b_i^+ 表示 i 超导体费密面上、下之算符, 满足对易关系

$$[a_i^-, a_i^+] = 1, [b_i^-, b_i^+] = 1, [a_i^+, b_i^+] = 0, [a_i^-, b_i^-] = 0. \quad (40)$$

这样(36)式可表为两个 Glauber 相干态波函数的直积, 即文献 [5f] 所讨论的情形(见文中(13), (14)式)

$$|\text{BCS}, \alpha_i\rangle = [\exp(\alpha_i a_i^+ - \alpha_i^* a_i^-) |0\rangle] \otimes [\exp(\alpha_i b_i^+ - \alpha_i^* b_i^-) |0\rangle]. \quad (41)$$

并有

$$a_i |\text{BCS}, \alpha_i\rangle = \alpha_i |\text{BCS}, \alpha_i\rangle, \quad b_i |\text{BCS}, \alpha_i\rangle = \alpha_i |\text{BCS}, \alpha_i\rangle. \quad (42)$$

下面讨论耦合超导体的情形. 令

$$A^- = \frac{1}{\sqrt{N}} \lim_{c \rightarrow 0} c S^-, \quad A^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \lim_{c \rightarrow 0} c S^+. \quad (43)$$

这有(17)式变为

$$[A^-, A^+] = 1, \quad (44)$$

其中 $N = \sum_k \theta^{-2} \theta_k^2 + \sum_q \theta^{-2} \theta_q^2$. (16) 式变为

$$|BCS, \alpha\rangle = \exp(\alpha A^+ - \alpha^* A^-) |0\rangle, \quad (45)$$

其中 $\alpha = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\theta}{2c} e^{-i\varphi}$, $\alpha^* = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\theta}{2c} e^{i\varphi}$. 显有

$$A^- |BCS, \alpha\rangle = \alpha |BCS, \alpha\rangle. \quad (46)$$

类似(20)式, 定义^[5f]

$$A_T^+ = A_L^+ A_R^-, \quad A_T^- = A_L^- A_R^+, \quad A_{zT} = \frac{1}{2} (A_L^+ A_L^- - A_R^+ A_R^-), \quad (47)$$

则 $A_T^{\pm}$, A_{zT} 满足 $SU(2)$ 李代数的对易关系

$$[A_{zT}, A_T^{\pm}] = \pm A_T^{\pm}, \quad [A_T^+, A_T^-] = 2A_{zT}. \quad (48)$$

下面讨论 Josephson 超流的量子噪声特性和二阶关联特性. 隧道电流密度为

$$\begin{aligned} J &= -2e \frac{\partial}{\partial t} \langle A_L^{\dagger} A_L \rangle = -i \frac{2eT}{\hbar} [A_L^{\dagger} A_L^-, A_T^+ + A_T^-] \\ &= \frac{4eT}{\hbar} \frac{A_T^+ - A_T^-}{2i} = (J_+ - J_-)/2i = J_z. \end{aligned} \quad (49)$$

测不准关系为

$$\Delta J_1 \Delta J_2 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{4eT}{\hbar} \right)^2 |\langle A_{zT} \rangle|. \quad (50)$$

利用(45)式则(50)式为

$$|\alpha_L|^2 + |\alpha_R|^2 \geq |(|\alpha_L|^2 - |\alpha_R|^2)|. \quad (51)$$

显见超流无压缩效应. 用同样的方法可得超流的二阶关联函数

$$g_T^{(2)}(0) = \langle A_T^+ A_T^+ A_T^- A_T^- \rangle / |\langle A_T^+ A_T^- \rangle|^2 = g_L^{(2)}(0) \times g_R^{(2)}(0), \quad (52)$$

其中

$$g_L^{(2)}(0) = 1, \quad g_R^{(2)}(0) = 1 + \frac{2|\alpha_R|^2 + 1}{(|\alpha_R|^2 + 1)^2} \approx 1. \quad (53)$$

Josephson 超流仍具有相干性.

这里有两点需要说明: 一是在讨论隧道电流密度的量子噪声时, 并未考虑 Josephson 辐射场在隧道结所产生的磁通量的影响, 实际上在半经典处理中, 把辐射场当作经典场, 这一影响只是使相差 $\varphi_L - \varphi_R$ 增加一个 c 数^[4], 并不影响本文的结论. 二是 $SU(2)$ 群到谐振子群收缩的物理条件是德拜频率远远大于超导能隙对应的频率^[5f], 这在一般超导体中是可以满足的.

六、结 语

本文证明 BCS 超导基态是单个库珀对 $SU(2)$ 相干态的直积. 当每个库珀对的“激发概率” $\nu_k^2 = \sin^2 \theta_k / 2 = \text{常数}$ 时, 即为 $SU(2)$ 相干态, 若处在 BCS 超导基态的两超导体耦合在一起, 则体系基态仍为 $SU(2)$ 相干态. 因 $SU(2)$ 相干态实际上就是 $SU(2)$ 二项式态^[9], 因此处在 BCS 基态的库珀对呈二项式分布, 且具有二阶相干性, 但量子噪声无

压缩效应,这主要是由于函数 $v_k^2 - 1/2$ 为电子动能的奇函数所致,这限制 θ_k 的取值. 同理, Josephson 超流也无压缩效应,但具有二阶相干性. 当德拜频率远大于超导能隙时,对库珀对可作玻色近似,即本文所讨论的 $SU(2)$ 群到谐振子群的收缩,这种收缩使得库珀对的 $SU(2)$ 相干态变为 Glauber 相干态,二项式分布变为泊松分布,二阶相干函数仍为 1,量子噪声也仍无压缩效应. 玻色近似后的 Josephson 超流仍具有二阶相干性,由于库珀对的玻色特性,超流无压缩效应.

- [1] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.*, **108**(1957), 1175.
- [2] J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, W. A. Benjamin, Inc., New York, (1964).
- [3] P. W. Anderson, *Phys. Rev.*, **112**(1958), 1900.
- [4] P. R. Wallace and M. J. Stavn, *Can. J. Phys.*, **43**(1965), 411.
- [5] (a) P. Lee and M. Scully, *Phys. Rev.*, **B3**(1971), 769;
 (b) D. Rogovin, M. Scully and P. A. Lee, *Progress in Quantum Electronics*, Vol. 2, Part. IV ed. by J. H. Sanders and S. Stenholm, (1973);
 (c) D. Rogovin, *Phys. Rev.*, **B12**(1975), 130;
 (d) D. Rogovin and M. Scully, *Phys. Rep.*, **C25**(1976), 175;
 (e) A. Dirienzo, D. Rogovin, M. Scully, R. Bonifacio, L. A. Lugiato and M. Milani, in *Coherence in Spectroscopy and Modern Physics* ed. by F. T. Arecchi, R. Bonifacio and M. O. Scully New York New York, (1978); (f) R. Bonifacio, M. Milani and M. O. Scully, *Nuovo Cimento*, **B50**(1979), 152.
- [6] (a) D. Rogovin, M. Scully and A. Dirienzo, *Phys. Rev.*, **B18**(1978) 3231; (b) R. Bonifacio, D. Rogovin and M. Scully, *Opt. Commun.*, **21**(1977), 293; (c) M. Milani, R. Bonifacio and M. O. Scully, *Lett. Nuovo Cimento*, **26**(1979), 353.
- [7] L. A. Lugiato and M. Milani, *Nuovo Cimento*, **B55**(1980), 417.
- [8] K. Wodkiewicz and J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(1985), 458.
- [9] 黄洪斌, *物理学报* **40**(1991), 533.
- [10] R. E. Prange, *Phys. Rev.*, **131**(1963), 1083.
- [11] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, *Phys. Rev.*, **A6**(1972), 2211.

SU(2) AND GLAUBER COHERENT STATES OF COOPER PAIRS IN SUPERCONDUCTOR —STUDIES OF THE QUANTUM CHARACTERS OF COOPER PAIRS AND JOSEPHSON SUPERFLUIDITY

HUANG HONG-BIN

Department of Physics, Southeast University, Nanjing, 210018

(Received 22 December 1990)

ABSTRACT

It is shown, using the quasi-spin operator, that the BCS superconducting ground-state wave function is the direct product of single Cooper-pair $SU(2)$ coherent state wave functions, and in certain conditions, is $SU(2)$ coherent state wave function of the Cooper-pair system. If two superconductors, both in BCS ground state, are coupled together, the coupled system is also in $SU(2)$ coherent state. Under the contraction of group $SU(2)$ to harmonic-oscillator group, the $SU(2)$ coherent states contract to Glauber coherent states. The quantum fluctuations, distributions, and second correlations of Cooper pairs and Josephson superfluidity in the two cases are discussed.

PACC: 0365; 7420F; 7450; 7440