

强光场下电子与库仑势散射及多光子过程*

李 介 平

北京师范大学低能核物理研究所, 北京, 100875

1990 年 11 月 4 日收到

对 Schrödinger 方程引入修饰势, 并将波函数展开为 Floquet 分波, 即可实施分离变量. 强光场时弱耦合合法选取合适微扰量, 径向波动方程可逐步近似求解. 以圆极化强光场为例, 计算了散射波函数、散射矩阵和截面. 重要结论是: 强光场下将出现多光子过程, 对应 m 次多光子过程有相应的共振谱线族, 谱线能量约为 $m\hbar\omega$, 并给出谱线强度计算公式.

PACC: 3280F; 0380

一、引 言

外光场下电子与库仑势散射问题的 Schrödinger 方程中, 外光场矢势是依时间作周期变化的, 对这样的哈密顿量含时问题, 求解时首先遇到的困难是如何分离变量, 原则上 Floquet 分波展开可以分离变量, 但由此得到的径向波动方程是对角动量无限耦合的二阶线性微分方程组, 在强光场情形, 不易选择微扰量, 造成求解的另一困难. 直接用数值方法, 则面临如何对角动量截断, 这限制了强光场下应用数值方法. 本文用弱耦合解法, 不仅在引入修饰势后, 实施了变量分离, 并且在强光场时, 选取了合适的小量作微扰处理, 并逐级求解径向波动方程组.

二、径向波动方程与边界条件

以偶极近似下圆极化光场为例. 当取光的传播方向沿 z 轴时, 矢势可写为 ($e = \hbar = m = 1$) $\mathbf{A}(t) = A_0[\mathbf{e}_x \cos(\omega t + \delta) - \mathbf{e}_y \sin(\omega t + \delta)]$.

弱耦合解法的要点为: 对 Schrödinger 方程引入修饰势, 由于库仑势对应的修饰势为 $z/|r - \mathbf{a}(t)|$, $\mathbf{a}(t) = \frac{1}{c} \int d\tau \mathbf{A}(\tau)$, c 为光速. 它正是 Legendre 函数的生成函数, 不难作 Legendre 展开, 并进一步写为球谐函数的叠加, 这也正说明光场的存在使粒子与有心势散射的轴对称性被破坏. 然后, 将相应的波函数展开为 Floquet 分波, 就能实施变量分离, 得到如下的径向波动方程组^[1]:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2Z}{R_{\pm}} + p^2 \right] F_{n,L,M}^{\pm}(r) \\ = \left(-\frac{2Z}{R_{\pm}} \right) \sum B_{L'M',K}^{LM} \left(\frac{a}{r} \right)^{\pm K} F_{n+m,L'M}^{\pm}(r) = g^{\pm}(r), \quad (1)$$

* 国家自然科学基金与中国原子分子数据研究联合体资助的课题.

其中 $r > a$ 取“+”号 $F_{n,L,M}^{\pm}(r) = F_{n,L,M}^{+}(r)$, $R_{\pm} = R_{+} = r$;

$r < a$ 取“-”号 $F_{n,L,M}^{\pm}(r) = F_{n,L,M}^{-}(r)$, $R_{\pm} = R_{-} = a$,

而 $a = A_0/\omega c$, $p^2 = 2(E - n\omega)$, 角动量耦合系数

$$B_{L'M',K_m}^{LM} = \frac{4\pi}{2K+1} Y_K^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \langle Y_L^M | Y_K^{m*} | Y_{L'}^{M'} \rangle, \quad (2)$$

$Y_K^m(\theta, \varphi)$ 为球谐函数, $\langle Y_L^M | Y_K^{m*} | Y_{L'}^{M'} \rangle = \int d\Omega Y_L^{M*} Y_K^{m*} Y_{L'}^{M'}$.

在上面的推导中, 除对光场矢势作假定之外, 并未引入任何近似。虽然原则上借 Floquet 分波展开, 可以有不同办法分离变量^[2,3], 但是要在强光场时应用弱耦合解法, 修饰势的球谐展开是关键的一步。

下面给出散射问题的边界条件, 散射矩阵元和截面表示^[1]:

$$F_{n,L,M}^{-}(0) = 0, \quad (3)$$

$$F_{n,L,M}^{-}(a) = F_{n,L,M}^{+}(a); \quad \left. \frac{dF_{n,L,M}^{-}}{d\gamma} \right|_a = \left. \frac{dF_{n,L,M}^{+}}{d\gamma} \right|_a. \quad (4)$$

弹性散射时,

$$F_{n,L,M}^{+}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{2ip} Y_L^{M*}(\Omega_i) \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{Z}{p}\right) \{(-1)^{(L+1)} W_{+} + S_{nLM}^e W_{-}\}; \quad (5)$$

$$\text{非弹性散射时 } F_{n,L,M}^{+}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{2i\sqrt{pp_i}} Y_L^{M*}(\Omega_i) \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{Z}{p_i}\right) S_{nLM}^i W_{-}, \quad (6)$$

而 $W_{\pm} = W_{\pm\lambda,\mu}(\pm 2ipr)$ 为 Whittaker 函数, 并且 $\lambda = -iZ/p$, $\mu = L + 1/2$.

弹性散射截面由散射矩阵元表示为

$$d\sigma_{ii} = \left| \frac{4\pi}{2ip} \sum (S_{nLM}^e - 1) Y_L^{M*}(\Omega_i) Y_L^M(\Omega) \right|^2 d\Omega. \quad (7)$$

这些式中考虑了外光场存在时, 分波展开需进一步用球谐表示, 同时也顾及库仑长程作用。

三、强光场下的弱耦合解法

径向波动方程组是角动量无限阶耦合的二次线性微分方程组。严格求解困难, 有必要寻找近似方法、传统的微扰法选取某一物理量作微扰, 在弱光场情形, 这样做不难逐级求解^[2], 但在强光场情形, 不易选取特定物理量作微扰求解, 这是本问题的另一大困难。

然而对方程组(1), 强光场 ($a \gg 1$) 时, 方程等号右边函数中, 量

$$\frac{1}{R_{\pm}} \left(\frac{a}{r}\right)^{\pm K} = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^K \ll 1 & r < a; \\ \frac{1}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^K < \frac{1}{a} \left(\frac{a}{r}\right)^K \ll 1 & r > a. \end{cases}$$

所以可取 $\frac{1}{R_{\pm}} \left(\frac{a}{r}\right)^{\pm K}$ 作微扰求解, 并称为弱耦合近似, 在强光场情形, 选择这样的小量作微扰, 是很好的近似。弱耦合解法的基础是(1)式, 所以修饰势的球谐展开是关键的一步。

四、零阶解

$$\text{零阶方程为 } \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2Z}{R_{\pm}} + p^2 \right] F_{n,L,M}^{(0)}(r) = 0. \quad (8)$$

1. 弹性散射情形

满足(3),(5)式的解为

$$\begin{aligned} F_{n,L,M}^{+(0)}(r) &= \frac{4\pi}{2i p} Y_L^{M*}(\Omega_i) \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{Z}{p}\right) [(-1)^{(L+1)} W_+ + S_{nL}^{(0)*} W_-]; \\ F_{n,L,M}^{-(0)}(r) &= \frac{4\pi}{2i p} Y_L^{M*}(\Omega_i) \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{Z}{p}\right) A_{nL}^{(0)*} \sqrt{r} J_{L+1/2}(kr), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $k^2 = p^2 + 2Z/a$, $J_{L+1/2}(kr)$ 为 Bessel 函数, 由(4)式可得

$$S_{nL}^{(0)*} = (-1)^{(L+1)} \frac{W[J, W_+]}{W[W_-, J]} \Big|_a; \quad A_{nL}^{(0)*} = \frac{(-1)^{(L+1)}(2ip)}{W[W_-, J]} \Big|_a, \quad (10)$$

其中 $W[J, W_{\pm}] = \sqrt{r} J_{L+1/2}(kr) \frac{dW_{\pm}}{dr} - W_{\pm} \frac{d}{dr} [\sqrt{r} J_{L+1/2}(kr)]$ 为 Wronski 关系。

引入弹性散射相移 δ_L $S_{nL}^{(0)*} = \exp(2i\delta_L)$,

$$\begin{aligned} \delta_L \stackrel{a \gg 1}{=} & \frac{\pi}{2} (L+1) - pa - \frac{Z}{p} \ln(2pa) + \arctan \\ & \times \left\{ \frac{k \cot\left(ka - \frac{\pi}{2} L\right) + \frac{L+1}{a} - \frac{Z}{2p^2 a^2}}{\frac{L(L+1) + Z^2/p^2}{2pa^2} - \left(p + \frac{Z}{pa}\right)} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

2. 非弹性散射情形

同样满足(3),(6)式的解为

$$\begin{aligned} F_{n,L,M}^{+(0)}(r) &= \frac{4\pi}{2i\sqrt{pp_f}} Y_L^{M*}(\Omega_i) \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{Z}{p_f}\right) S_{nL}^{(0)*} W_{-\lambda,\mu}(-2ip_f r), \\ F_{n,L,M}^{-(0)}(r) &= \frac{4\pi}{2i\sqrt{pp_f}} Y_L^{M*}(\Omega_i) \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{Z}{p_f}\right) A_{nL}^{(0)*} \sqrt{r} J_{L+1/2}(k_f r). \end{aligned} \quad (12)$$

此时条件(4)式仅给出波函数有非零解条件为

$$\frac{\frac{dW_-}{dr} \Big|_a}{W_- \Big|_a} = \frac{\frac{d}{dr} [\sqrt{r} J_{L+1/2}(kr)] \Big|_a}{\sqrt{a} J_{L+1/2}(ka)}. \quad (13)$$

(13)式称为连续性条件, 以附标 f 表示其解, 并利用特殊函数性质可改写为

$$\begin{aligned} \frac{J_{L+3/2}(k_f a)}{J_{L+1/2}(k_f a)} &= \frac{L+1 + Za/(ip_f a)}{k_f a} \\ &\times \left[1 + \left(L - \frac{Za}{ip_f a} \right) \frac{W_{-(\lambda_f+1),\mu}(-2ip_f a)}{W_{-\lambda_f,\mu}(-2ip_f a)} \right] - \frac{ip_f}{k_f}. \end{aligned} \quad (14)$$

由于 $k_i^2 = p_i^2 + 2Z/a$, (14) 式在 Z, a 固定, L 一定时给出 k_i (或 p_i) 值, 相应地只有

$$E = E_{m,i} = m\omega + p_i^2/2, \quad (15)$$

非弹性散射零阶波函数才有非零解。在 $a \gg 1$ 时, 或者 $|p_i a| \gg 1$, 或者

$$|\lambda_i| = \left| -\frac{iZa}{p_i a} \right| \gg 1,$$

两者必居其一。不论何种情形, $W_{-\lambda_i, \mu}(-2ip_i a)$ 均有相应的近似表示, 例如 $|p_i a| \gg 1$, 有

$$\frac{W_{-(\lambda_i+1), \mu}(-2ip_i a)}{W_{-\lambda_i, \mu}(-2ip_i a)} \approx \frac{1}{-2ip_i a}.$$

(14) 式化为简单形式, 不难数值求解。另外, 利用特殊函数性质, 在 $a \gg 1$ 时, 从 (14) 式有下列结论:

1) 只有当 $ip_i a$ 为实时, (14) 式才有解, 并且从波函数处处有限要求, 有

$$-ip_i = \sqrt{\frac{2Z}{a} - k_i^2} > 0,$$

于是 $0 < k_i^2 a^2 < 2Za$.

2) 存在 L_m , 仅当 $L \leq L_m$ 时, 方程 (14) 有解。

3) 不存在 $k_i a \lesssim 1$ 的解。

4) 由于 $J_{L+1/2}(k_i a)$ 含三角函数, (14) 式可能是多根的。

(14) 式的解求出, 还不能唯一地确定波函数, 借助归一化条件, 有

$$S_{nL}^{(0)i} = \frac{2i\sqrt{pp_i}}{4\pi\sqrt{Y_L^{M*}(Q_i)Y_L^M(Q_i)}} \frac{\sqrt{a} J_{L+\frac{1}{2}}(k_i a)}{W_{-\lambda_i, \mu}(-2ip_i a)} \frac{1}{N_{L,i}};$$

$$A_{nL}^{(0)i} = \frac{2i\sqrt{pp_i}}{4\pi\sqrt{Y_L^{M*}(Q_i)Y_L^M(Q_i)}} \frac{1}{N_{L,i}};$$

$$N_{L,i}^2 = \left| \frac{\sqrt{a} J_{L+1/2}(k_i a)}{W_{-\lambda_i, \mu}(-2ip_i a)} \right|^2 \int_a^\infty W_{-\lambda_i, \mu}^2 dr + \int_0^a r J_{L+1/2}^2(k_i r) dr. \quad (16)$$

五、一阶弹性散射解

一阶方程为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2Z}{R_\pm} + p^2 \right] F_{n,L,M}^{\pm(1)}(r) = g^{\pm(0)}(r)$$

$$- \left(-\frac{2Z}{R_\pm} \right) \sum_{L', M'} \left(\frac{a}{r} \right)^{\pm K} B_{L'M', K}^{LM} F_{n', L', M'}^{\pm(0)}(r), \quad (17)$$

式中方程等号右边函数 $g^{\pm(0)}(r)$ 只含已知的零阶解 $F_{n', L', M'}^{\pm(0)}(n' = n + m)$, 径向波动方程 (1) 的耦合关系已解除, 变为非齐次微分方程, 并且可积。根据边界条件, 同样可写出波函数和散射矩阵元, 其中弹性散射矩阵元为

$$S_{nLM}^{(1)c} = S_{nL}^{(0)c} + \frac{(-1)^L \exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{Z}{p}\right)}{4\pi Y_L^{M*}(Q_i)} \times \int_0^\infty ds g^{+(0)}(s) [W_+ + (-1)^{(L+1)} S_{nL}^{(0)c} W_-] \\ - \frac{2ip \exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{Z}{p}\right)}{4\pi Y_L^{M*}(Q_i)} \frac{\int_0^a ds g^{-(0)}(s) \sqrt{s} J_{L+1/2}(ks)}{W[W_-, J]}. \quad (18)$$

当 $a \gg 1$ 时, (18) 式等号右端诸积分可近似完成。并且 $S_{nLM}^{(1)c} = S_{nL}^{(0)c} + S_C^{(1)c} + S_D^{(1)c}$, 而

$$S_C^{(1)c} = \frac{(-2Z)}{Y_L^{M*}(Q_i)} \sum_{\substack{K=L+L'+1 \\ m=0}}^{K=L+L'+1} B_{L'MK0}^{LM} \frac{Y_{L'}^M(Q_i)}{2ip} \left\{ \frac{S_{nL}^{(0)c} + (-1)^{(L+L')} S_{nL}^{(0)c}}{K} \right. \\ \left. - \frac{2ip}{2\pi k} \frac{A_{nL'}^{(0)c} \mathcal{J}(k)}{W[W_-, J]} \right\}, \quad (19)$$

其中

$$\mathcal{J}(k) = i^{(L-L')} \left\{ \frac{1 + (-1)^{(L-L')}}{K+1} + \frac{(-1)^L}{2ika} [1 - (-1)^{(L'-L)} \cos 2ka] \right\}, \\ S_D^{(1)c} = \frac{(-2Z)}{4\pi Y_L^{M*}(Q_i)} \sum_{\substack{K=L+L' \\ m=0 \\ all i}}^{K=L+L'} B_{L'M'K m}^{LM} \\ \times \frac{Y_{L'}^{M'*}(Q_i) \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{Z}{p_i}\right)}{\sqrt{Y_{L'}^{M'*}(Q_i) Y_{L'}^{M'}(Q_i)}} \cdot \frac{\exp\left\{-i\left[p_i a + \frac{Z}{p} \ln(2pa)\right]\right\}}{aN_{L', i}} \delta E_{n, f} \\ \cdot \left\{ \sqrt{a} J_{L+1/2}(k_i a) \mathcal{J} - \frac{\mathcal{J}(k_i)}{\sqrt{2\pi k_i}} (-i)^{(L+1)} \exp(ipa) \right\}, \quad (20)$$

其中

$$\mathcal{J} = \begin{cases} \frac{1}{ip - ip_i} - \frac{(-1)^{(L+1)} S_{nL}^{(0)c} \exp(2ipa)}{(2pa)^{2\lambda} (ip_i + ip)} & -2ip_i a \gg 1; \\ \frac{1}{ip} \left[1 - \frac{(-1)^{(L+1)} S_{nL}^{(0)c} \exp(2ipa)}{(2pa)^{2\lambda}} \right] & -\lambda_i \gg 1, \end{cases}$$

又

$$\mathcal{J}(k_i) = i^{-(L+L'+1)} \left\{ \frac{\exp[i(k+k_i)a] + (-1)^{(L+L'+1)} \exp[-i(k+k_i)a]}{k+k_i} \right. \\ \left. + (-1)^{(L+1)} \frac{\exp[i(k-k_i)a] + (-1)^{(L+L'+1)} \exp[-i(k-k_i)a]}{k-k_i} \right\}.$$

当散射矩阵元已知, 由(7)式, 弹性散射截面可求出。

六、强光场的修饰作用与多光子过程

现分别讨论强光场对波函数和等效势的影响。首先对波函数,弱光场对波函数的影响可以看作对无外光场时波函数的小修正^[1,2]或称为修饰作用。然而在强光场情形,即使是弱耦合的零阶解,如第四节所述,与无外光场的波函数完全不同,特别是 $r < a$ 时 ($a \gg 1$),波函数近似为自由电子在光场中的散射解,强光场的作用已不能用修饰无光场的波函数来近似。

另一方面,外光场的存在可以引入等效的修饰势 $Z/|r - a(t)|$ 来研究,当实施分离变量后,修饰势可以区分为有心和非有心两部分,有心部分在 $r > a$ 时呈现库仑势形式,而在 $r < a$ 时则相当于常数势阱。显然,弱外光场情形 $a \ll 1$,有心部分完全可近似为库仑势,对应的波函数便近似为无外光场时的库仑散射波函数。但在强光场情形,有心势部分大异于库仑势,在弱耦合解法中,对应有心势的解为零阶近似解,因此在强光场情形,其零阶近似波函数,也截然与无外光场的库仑散射波函数不同。

Gavrila^[4] 对线极化强光场情形,用格林函数法,数值求解了平均修饰势的弹性散射相移,由于平均修饰势未考虑非有心部分,相当于弱耦合方法的零阶解。Gavrila 指出:

$$\delta_L \stackrel{a \gg 1}{\approx} -\frac{Z}{p} \ln(2pa) + \chi_L(p) + \mathcal{O}(1/a),$$

其中 $-\frac{Z}{p} \ln(2pa)$ 这一项是由长程库仑势引起的。在圆极化强光场下得出的(11)式与此相似,根据(11)式的解析表示,当 $L/a \ll 1$ 还可近似有

$$\chi_L(p) + \mathcal{O}(1/a) \stackrel{L/a \ll 1}{\approx} \frac{Z}{p} + \frac{L}{pa} \sin^2\left(ka - \frac{\pi}{2}L\right).$$

这一部分不涉及多光子过程,截面能谱是连续的,由于是有心势,对电子入射方向具有轴对称性。

等效修饰势的非有心部分出现在一阶近似方程(17)等号右端,即非齐次项中。对弹性散射矩阵元,非有心势部分的贡献为 $S_B^{(0)*}$ 和 $S_B^{(0)}$ 两部分(见(19)和(20)式), $S_B^{(0)*}$ 代表连续谱,这项是 $m = 0$ 的贡献,即无光子交换过程,此项说明,强光场下,即使无光子交换,一阶弹性散射矩阵元的修正也是不可忽略的。这区别于弱光场情形,后者的一阶近似中,无光子交换项 ($m = 0$) 较之单光子过程项是可略的。

等效势非有心部分的另一项为 $S_B^{(1)*}$, (20) 式表明 $S_B^{(1)*} \propto \frac{1}{a} \delta_{E, E_{m,t}}$, 即此项为能量的离散谱,有明显的共振谱线与 m 次多光子过程对应。当 $a \gg 1$, 有下列特点:

1) 谱线能量 $E = E_{m,t} = m\omega + p_t^2/2 \approx m\omega$, 见(15)式,并由解的性质

$$p_t^2 \approx \mathcal{O}(1/a).$$

2) 多光子过程对散射矩阵元的贡献均与 $1/a$ 同阶,是相互竞争过程。而在弱光场情形,一阶修正只出现单光子过程,其他多光子过程可略。

3) $S_B^{(1)*}$ 只是有限和,见(20)式。强光场涉及的多光子过程,由角动量耦合系数决定,见(2)和(20)式,并由表 1 可比较强弱光场的不同。

表 1 弹性散射矩阵元中角动量与多光子过程关系

强光场 ($a \gg 1$)	弱光场 ($a \ll 1$)
允许 m 次光子过程	只有单光子过程
$0 \leq m \leq K$	$m = 1$
而 $ L'_m + L \geq K \geq L'_m - L $	$L = L' \pm 1$

总之,弱耦合解法对强光场下电子与库仑势相互作用问题是有效的近似方法,对强光场的作用给出清楚的图象,能解释多光子过程的存在和竞争,并指出对应 m 次多光子过程,能谱有相应的共振谱线,在某一分波中,多光子过程是受角动量耦合关系制约的。由于弱耦合解法是解析方法,所有的公式均解析表示,计算简单易行。

[1] 李介平,物理学报,39(1990),1220.

[2] 李介平,第五届全国原子分子物理学术会议文集,(1990),145 页.

[3] L. Dimou and F. H. M. Faisal *Phys. Rev. Lett.*, 59(1987), 872.

[4] M. Gavrilin, in *Fundamentals of Laser Interactions*, ed. by F. Ehlotzky, Springer-Verlag, Berlin, (1985).

SCATTERING OF ELECTRONS BY COULOMB POTENTIAL UNDER A STRONG LASER FIELD AND MULTIPHOTON PROCESSES

LI JIE-PING

Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University, Beijing, 100875

(Received 4 November 1990)

ABSTRACT

By introducing dressed potential and Floquet partial wave expansion of the wave functions, the Schrödinger equation is made separable. In case of strong laser field, the radial wave equations can be solved step by step approximately through the weak coupling method in which an appropriate perturbation term is selected. As an example, with a circularly polarized laser field, the scattering wave function, S-matrix and the cross section are obtained. Important conclusions are: multiphoton processes will appear under strong laser field; m -th multiphoton processes must be connected with a corresponding class of resonance lines with energy near $m\hbar\omega$. The formula of line intensity is also obtained.

PACC: 3280F; 0380